Une remarque sur les polynomes de M. S. Bernstein

par

M. KAC (Lwów).

Soit $F(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$; on sait que les polynomes de M. S. Bernstein

$$B_n(t)=\sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} t^k(1-t)^{n-k} \tag{1}$$

convergent uniformément dans $\langle 0,1\rangle$ vers $F(t)$. Dans cette Note nous démontrerons le théorème suivant:

Théorème. a) *Si la fonction $F(t)$, définie dans l'intervalle $\langle 0,1\rangle$, y satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant α*[1]), *alors en posant $g_n(F)=\max\limits_{0\leq t\leq 1}|F(t)-B_n(t)|$ on a*

$$g_n(F)=O(n^{-\alpha/2});$$

b) *il existe des fonctions qui remplissent la condition de Hölder avec l'exposant α pour lesquelles*

$$g_n(F)\neq o(n^{-\alpha/2}).$$

Démonstration. a) Définissons les fonctions $\varrho_n^{(t)}(x)$ de la façon suivante:

$$\varrho_1^{(t)}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant t\\ 0, & t<x\leqslant 1\end{cases};\quad \varrho_2^{(t)}(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant t^2,\ t<x\leqslant t+t(1-t)\\ 0, & t^2<x\leqslant t,\ \ t+t(1-t)<x\leqslant 1\end{cases}$$

etc.

---

[1]) C'est à dire que pour tous les t', t'' on a

$$|F(t'')-F(t')|\leqslant M|(t''-t'|^{\alpha} \qquad (0\leqslant\alpha\leqslant 1).$$

Ces fonctions sont évidemment indépendantes [2]) pour chaque valeur de t, et on voit sans peine que

$$B_n(t)=\int_0^1 F\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k^{(t)}(x)\right)dx. \tag{2}$$

Remarquons que

$$\int_0^1 \varrho_k^{(t)}(x)\,dx=t \qquad (k=1,2,\ldots) \tag{3}$$

et introduisons les fonctions

$$\Psi_k^{(t)}(x)=\varrho_k^{(t)}(x)-t.$$

Ces fonctions sont aussi indépendantes et, d'après (3), elles sont orthogonales. En effet [3]), pour $k\neq l$

$$\int_0^1 \Psi_k^{(t)}(x)\,\Psi_l^{(t)}(x)\,dx=\int_0^1 \Psi_k^{(t)}(x)\,dx\int_0^1 \Psi_l^{(t)}(x)\,dx=0. \tag{4}$$

Nous avons aussi

$$\int_0^1 (\Psi_k^{(t)}(x))^2\,dx=t(1-t) \qquad (k=1,2,\ldots). \tag{5}$$

(2), (3), (4) et (5) impliquent

$$|F(t)-B_n(t)|=\left|\int_0^1\left[F(t)-F\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k^{(t)}(x)\right)\right]dx\right|$$

$$\leqslant\int_0^1\left|F\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k^{(t)}(x)\right)-F(t)\right|dx$$

$$\leqslant M\int_0^1\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k^{(t)}(x)-t\right|^{\alpha}dx=M\int_0^1\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Psi_k^{(t)}(x)\right|^{\alpha}dx$$

$$\leqslant M\left[\int_0^1\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Psi_k^{(t)}(x)\right)^2dx\right]^{\alpha/2}=\frac{M\,t^{\alpha/2}(1-t)^{\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}<\frac{M}{n^{\alpha/2}},$$

c'est-à-dire

$$g_n(F)=O(n^{-\alpha/2}).$$

[2]) M. Kac, Sur les fonctions indépendantes (I), Studia Math. 6 (1936) p. 46–58.

[3]) Loc. cit. [2]), p. 48.

b) Posons maintenant

$$F(t)=|t-\tfrac{1}{2}|^{\alpha}.$$

Alors

$$g_n(F)\geqslant|F(\tfrac{1}{2})-B(\tfrac{1}{2})|=|B(\tfrac{1}{2})|$$

$$=\int_0^1\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varrho_k^{(1/2)}(x)-\frac{1}{2}\right|^{\alpha}=\int_0^1\left|\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right|^{\alpha}dx,$$

où $r_k(x)$ sont les fonctions bien connues de M. Rademacher.

On a [4])

$$\int_0^1\left|\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}r_k(x)\right|^{\alpha}dx>\frac{M'}{n^{\alpha/2}},$$

donc

$$g_n(F)\neq o(n^{-\alpha/2}).$$

[4]) Les fonctions $r_k(x)$ sont indépendantes. On doit appliquer la remarque faite après la démonstration du théorème 6 du travail cité.

(Reçu par la Rédaction le 24. 4. 1937).