Sur une série de puissances universelle pour les fonctions continues

par

W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

M. S. Mazurkiewicz a démontré récemment, à l'aide de la théorie des fonctions analytiques, ce

Théorème[1]). *Il existe une série de puissances*

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

aux coefficients rationnels, telle, qu'en groupant convenablement les termes de cette série, on obtient une série qui converge uniformément pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ *vers une fonction continue quelconque donnée d'avance qui s'annule pour* $x = 0$.

Le but de cette Note est de déduire ce théorème du théorème de Weierstrass sans recourir à la théorie des fonctions analytiques.

A ce but je démontrerai d'abord ce

Lemme. $f(x)$ *étant une fonction continue dans l'intervalle* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *telle que* $f(0) = 0$, m *un nombre naturel et* ε *un nombre positif, il existe toujours une fonction* $\varphi(x)$ *continue dans l'intervalle* $0 \leqslant x \leqslant 1$ *et telle que*

$$|f(x) - x^m \varphi(x)| < \varepsilon \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{1}$$

Démonstration. Les fonctions $f(x)$ et x^m étant continues pour $x = 0$, il existe un nombre positif $\delta < 1$, tel que

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } x^m < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant \delta. \tag{2}$$

[1]) Ç. R. Soc. Sc. Varsovie 30 (1937) p. 25 (séance du 19. 1. 1937). Cf. Pal, Tôhoku Math. Journ. 5 (1914) p. 8—9 et 6 (1914/15) p. 42—43.

Posons

$$(3) \qquad \varphi(x) = \frac{f(x)}{x^m} \text{ pour } \delta \leqslant x \leqslant 1$$

et

$$(4) \qquad \varphi(x) = \frac{f(\delta)}{\delta^m} \text{ pour } 0 \leqslant x < \delta.$$

La fonction $\varphi(x)$ est évidemment continue pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. D'après (3) on a

$$(5) \qquad f(x) - x^m \varphi(x) = 0 \text{ pour } \delta \leqslant x \leqslant 1$$

et, d'après (3),

$$\delta^m \varphi(\delta) = f(\delta),$$

donc, d'après (2),

$$|\delta^m \varphi(\delta)| = |f(\delta)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$(6) \qquad |x^m \varphi(\delta)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pour } 0 \leqslant x < \delta.$$

D'après (2), (3) et (6) on a donc

$$|f(x) - x^m \varphi(x)| \leqslant |f(x)| + |x^m \varphi(x)|$$

$$= |f(x)| + |x^m \varphi(\delta)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \text{ pour } 0 \leqslant x < \delta,$$

ce qui donne, d'après (5), la formule (1). Notre lemme est ainsi démontré.

Corollaire. *$f(x)$ étant une fonction continue pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, telle que $f(0) = 0$, m un nombre naturel et ε un nombre positif, il existe toujours un polynôme aux coefficients rationnels, $P(x)$, tel que*

$$(7) \qquad |f(x) - x^m P(x)| < 2\varepsilon \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Démonstration. Soit $\varphi(x)$ la fonction satisfaisant aux conditions de notre lemme. D'après le théorème de Weierstrass, il existe un polynôme $P(x)$ aux coefficients rationnels, tel que

$$|\varphi(x) - P(x)| \leqslant \varepsilon \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

ce qui donne à plus forte raison

$$|x^m \varphi(x) - x^m P(x)| < \varepsilon \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1$$

et, d'après (1), on obtient l'inégalité (7), c. q. f. d.

Soit maintenant

$$(8) \qquad P_1(x),\ P_2(x),\ P_3(x), \ldots$$

une suite infinie formée de tous les polynômes aux coefficients rationnels, qui s'annulent pour $x = 0$. Nous définirons par l'induction une suite infinie de polynômes aux coefficients rationnels

$$(9) \qquad Q_1(x),\ Q_2(x),\ Q_3(x), \ldots$$

comme il suit:

Posons $Q_1(x) = P_1(x)$. Soit maintenant n un nombre naturel donné > 1 et supposons que nous avons déjà défini les polynômes $Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_{n-1}(x)$ et qu'en posant

$$(10) \qquad S_{n-1}(x) = Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots + Q_{n-1}(x)$$

on a $S_{n-1}(0) = 0$.

Soit $m-1$ le degré du polynôme $S_{n-1}(x)$. D'après notre corollaire, il existe pour $f(x) = P_n(x) - S_{n-1}(x)$ et $\varepsilon = \frac{1}{2n}$ un polynôme $P(x)$ aux coefficients rationnels, tel que

$$(11) \qquad |P_n(x) - S_{n-1}(x) - x^m P(x)| < \frac{1}{n} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Nous poserons

$$(12) \qquad Q_n(x) = x^m P(x).$$

D'après (10), (11) et (12) on aura

$$(13) \qquad |P_n(x) - S_n(x)| < \frac{1}{n} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

La suite de polynômes (9) est ainsi définie par l'induction et chaque terme du polynôme $Q_n(x)$ contient x en puissance supérieure que chacun de termes du polynôme $S_{n-1}(x)$. En écrivant l'un après l'autre les termes de chacun de polynômes $Q_1(x)$, $Q_2(x), \ldots$ ordonnés d'après les puissances croissantes de x, on obtient donc une série de puissances

$$(14) \qquad a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

et, en désignant

$$s_n(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \text{ pour } n = 1, 2, \ldots,$$

on conclut, d'après (10), qu'il existe pour tout nombre naturel n un indice $p_n \geqslant n$, tel que

$$s_{p_n}(x) = S_n(x), \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

donc, d'après (13), que

$$(15) \qquad |P_n(x) - s_{p_n}(x)| < \frac{1}{n} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Soit maintenant $f(x)$ une fonction quelconque continue pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et telle que $f(0) = 0$. D'après la propriété de la suite (8) (et le théorème de Weierstrass), il existe pour tout nombre naturel n un indice k_n tel que

$$(16) \qquad |f(x) - P_{k_n}(x)| < \frac{1}{n}, \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

et nous pouvons, comme on voit sans peine, supposer que

$$k_1 < k_2 < k_3 < \ldots.$$

Or, d'après (15), nous avons

$$(17) \qquad |P_{k_n}(x) - s_{p_{k_n}}(x)| < \frac{1}{k_n} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

et les formules (16) et (17) donnent, vu que $k_n \geqslant n$,

$$|f(x) - s_{p_{k_n}}(x)| < \frac{2}{n} \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

La suite infinie $s_{p_{k_n}}(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ converge donc pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ uniformément vers la fonction $f(x)$. Donc, en groupant convenablement les termes de la série (14), on obtient une série qui converge pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ uniformément vers $f(x)$. Le théorème de M. S. Mazurkiewicz est ainsi démontré [2]).

[2]) Il est à remarquer qu'en 1906 M. M. Fréchet a démontré (Rend. Circ. Mat. Palermo 22, p. 36) qu'il existe une série de polynômes qui, si l'on groupe convenablement ses termes, peut représenter une fonction continue donnée quelconque d'une variable réelle.

(Reçu par la Rédaction le 21. 1. 1937).