Über homogene Polynome in (L^2)

von

S. BANACH (Lwów).

§ 1.

Wir bezeichnen mit E, E' zwei vektorielle, normierte und vollständige Räume. Eine für beliebige $x_1, \dots, x_n$ aus E erklärte Operation $u(x_1, \dots, x_n)$, deren Werte dem Raume E' angehören, nennen wir eine *n-lineare Operation*, falls sie stetig und additiv inbezug auf jede der Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$ ist. Es ist bequem eine derartige Operation mit

$$a\, x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \tag{1}$$

zu bezeichnen.

Eine n-lineare Operation $(n>1)$ heiße *symmetrisch*, wenn sich ihr Wert bei beliebigen Permutationen der Variablen nicht ändert. Werden in einer symmetrischen n-linearen Operation r_1 Variablen gleich z_1, weitere r_2 Variablen gleich $z_2, \dots$, schließlich die letzten r_k Variablen gleich z_k gesetzt $(r_1 + \dots + r_k = n)$, so bezeichnen wir die so entstandene Operation mit

$$a\, z_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot z_k^{r_k}.$$

Insbesondere ist

$$a\, z^n = a\, z \cdot \ldots \cdot z\,.$$

Die Operation $a\, z^n$ nennen wir ein *homogenes Polynom n-ten Grades*. Wie leicht zu sehen, enstehen aus verschiedenen symmetrischen n-linearen Operationen stets verschiedene *homogene Polynome n-ten Grades.*

Als Norm einer n-linearen Operation $a\, x_1 \dots x_n$ erklären wir die Zahl

$$\|a\| = \underset{\|x_1\| \le 1, \dots, \|x_n\| \le 1}{\text{ob. Gr.}} \|a\, x_1 \dots x_n\|\,;$$

es ist also

$$\|a\, x_1 \dots x_n\| \leqslant \|a\|.\|x_1\| \dots \|x_n\|\,,$$

insbesondere

$$\|a\, x^n\| \leqslant \|a\|.\|x\|^n \quad [1].$$

Ist E der m-dimensionale euklidische Raum, E' eine Zahlenmenge, so fallen die oben erklärten Operationen mit den gewöhnlichen n-linearen Formen, bzw. den homogenen Formen n-ten Grades zusammen. Bezeichnen ξ_j^i bzw. ξ_j $(j = 1, \dots, m)$ die Koordinaten des Vektors x_i bzw. x, so hat man

$$a\, x_1 \dots x_n = \sum_{j_1 \dots j_n = 1}^{m}{}' a_{j_1 \dots j_n} \xi_{j_1}^1 \dots \xi_{j_n}^n\,,$$

$$a\, x^n = \sum_{j_1 \dots j_n = 1}^{m}{}' a_{j_1 \dots j_n} \xi_{j_1} \dots \xi_{j_n}\,,$$

$$\|a\| = \max |a\, x_1 \dots x_n| \quad \text{für} \quad \sum_{j=1}^{m} (\xi_j^i)^2 \leqslant 1 \quad (i = 1, \dots, n).$$

Wir nehmen jetzt an, daß E der Raum (L^2) sei und daß E' in (L^2) enthalten sei und bezeichnen mit $a\, x_1 \dots x_n$ eine symmetrische n-lineare Operation. Jetzt bedeutet also x_i eine in $(0,1)$ quadratisch integrierbare Funktion $x_i(t)$, ebenso ist $a\, x_1 \dots x_n$ eine derartige Funktion. Ist x_{n+1} ein weiteres Element aus (L^2), so ist

$$\int_0^1 (a\, x_1 \dots x_n)\, x_{n+1}\, dt \tag{2}$$

offenbar ein $(n+1)$-lineares Funktional [2]).

Wir sagen, das homogene Polynom n-ten Grades $a\, x^n$ sei symmetrisch, falls das entsprechende Funktional (2) symmetrisch ist. Insbesondere heißt die lineare Operation $a\, x$ symmetrisch, falls

$$\int_0^1 (a\, x_1)\, x_2\, dt = \int_0^1 (a\, x_2)\, x_1\, dt$$

---

[1]) Vgl. S. Mazur und W. Orlicz, Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen, Stud. Math. 5 (1935) p. 50—68, 179—189.

[2]) Ein Funktional ist eine Operation, deren Wertmenge aus Zahlen besteht.

gilt. In diesem Falle stimmt also unser Symmetriebegriff mit dem von Herrn D. Hilbert in der Theorie der Integralgleichungen eingeführten überein.

Ein Beispiel eines symmetrischen homogenen Polynoms n-ten Grades in (L^2) ist

$$a x^n = \int_0^1 \ldots \int_0^1 K(t_1, \ldots, t_n, t)\, x(t_1) \ldots x(t_n)\, dt_1 \ldots dt_n ,$$

wo K eine symmetrische Funktion der Variablen $t_1, \ldots, t_n, t$ bedeutet, von der Eigenschaft, daß die rechte Seite stets dem Raume (L^2) angehört. Dies ist z. B. der Fall, wenn K in den Veränderlichen $t_1, \ldots, t_n, t$ quadratisch integrierbar ist.

In dieser Arbeit beweisen wir die Sätze:

Satz I. [§ 5]. *Ist $a x_1 \ldots x_n$ eine symmetrische n-lineare Operation in (L^2), so gilt*

$$\underset{\|x_1\| \leq 1, \ldots, \|x_n\| \leq 1}{\text{ob. Gr.}} \|a x_1 \ldots x_n\| = \underset{\|x\| \leq 1}{\text{ob. Gr.}} \|a x^n\| \quad ^{3}).$$

Satz II. [§ 6]. *Ist $a x^n$ ein symmetrisches homogenes Polynom n-ten Grades in (L^2), so gibt es eine Folge $\{x_i\}$ und eine Zahl λ ($\|x_i\| = 1$ für $i = 1, 2, \ldots$; $|\lambda| = \frac{1}{\|a\|}$), derart daß*

$$\lim_{i \to \infty} \|x_i - \lambda a x_i^n\| = 0 .$$

Satz III. [§ 6]. *Ist $a x^n$ ein vollstetiges symmetrisches homogenes Polynom n-ten Grades in (L^2), so gibt es ein Element x und eine Zahl λ ($\|x\| = 1$, $|\lambda| = \frac{1}{\|a\|}$), so daß*

$$x - \lambda a x^n = 0 .$$

In den Sätzen II, III ist der Satz über Existenz von Eigenlösungen einer linearen Integralgleichung mit symmetrischem Kern als Sonderfall enthalten.

§ 2.

Seien x, y $(x + y \neq 0)$ zwei Einheitsvektoren des euklidischen Raumes R_m, welche den Winkel α $(0 \leqslant \alpha < \pi)$ einschließen. Wir bezeichnen mit $\varphi_n(x, y)$ den im Bereiche des Winkels α

[3]) Die Werte der Operation $a x_1 \ldots x_n$ brauchen nicht zu (L^2) angehören.

gelegenen Einheitsvektor, welcher mit y den Winkel α/n bildet, wobei n irgend eine natürliche Zahl bedeutet. Offenbar ist

$$x + \varphi_n(x, y) \neq 0, \quad y + \varphi_n(x, y) \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_2(x, y) = \frac{x + y}{\|x + y\|} .$$

Setzt man

$$x_1 = x, \quad x_2 = y,$$
$$x_k = \varphi_n(x_{k-2}, x_{k-1}) \qquad (k = 3, 4, \ldots),$$

so ergibt sich leicht

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \varphi_{n+1}(x, y).$$

§ 3.

Hilfssatz 1. *Sei $a z_1 \ldots z_n$ eine symmetrische n-lineare Form der Vektoren $z_1, \ldots, z_n$ in R_m mit $\|a\| = 1$. Falls für zwei Einheitsvektoren x_1, x_2 die Beziehungen $x_1 + x_2 \neq 0$, $a x_1 x_2^{n-1} = 1$ stattfinden und $x = \varphi_n(x_1, x_2)$ gesetzt wird, so ist $a x^n = 1$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$. Nach Voraussetzung ist

$$\|x_1\| = 1, \|x_2\| = 1, \quad x_1 + x_2 \neq 0, \quad a x_1 x_2 = 1, \quad \|a\| = 1 .$$

Wir bezeichnen die Koordinaten von x_1, x_2 mit ξ_i^1 bzw. ξ_i^2 und schreiben

$$a x_1 x_2 = \sum_{ik} a_{ik} \xi_i^1 \xi_k^2 \qquad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Dann ist

$$\sum_k \xi_k^2 \sum_i a_{ik} \xi_i^1 = \sum_i \xi_i^1 \sum_k a_{ik} \xi_k^2 = 1$$

und wegen $\|a\| = 1$

$$\sum_k \Big(\sum_i a_{ik} \xi_i^1\Big)^2 \leqslant 1, \quad \sum_i \Big(\sum_k a_{ik} \xi_k^2\Big)^2 \leqslant 1 .$$

Aus diesen Beziehungen folgt

$$\sum_i a_{ik} \xi_k^1 = \xi_k^2 \quad (k = 1, \ldots, m), \qquad \sum_k a_{ik} \xi_i^2 = \xi_i^1 \quad (i = 1, \ldots, m)$$

und hieraus, mit Rücksicht auf $a_{ik} = a_{ki}$,

$$\sum_k a_{ik} \Big(\xi_k^1 + \xi_k^2\Big) = \xi_i^1 + \xi_i^2 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

also

$$\sum_{ik} a_{ik}\left(\xi_i^1+\xi_i^2\right)\left(\xi_k^1+\xi_k^2\right)=\sum_i\left(\xi_i^1+\xi_i^2\right)^2,$$

d. h.

$$a(x_1+x_2)^2=\|x_1+x_2\|^2.$$

Setzt man nun $x=\varphi_2(x_1, x_2)=\dfrac{x_1+x_2}{\|x_1+x_2\|}$, so ergibt sich wie behauptet

$$a x^2=1.$$

Wir nehmen jetzt unseren Hilfssatz für $n-1$ als richtig an; nach Voraussetzung ist

$$\|x_1\|=1, \|x_2\|=1, \quad x_1+x_2\neq 0, \quad a x_1 x_2^{n-1}=1, \quad \|a\|=1.$$

Wir setzen

$$\bar{a} z_1\ldots z_{n-1}=a x_2 z_1\ldots z_{n-1};$$

dieser Ausdruck ist offenbar eine $(n-1)$-lineare symmetrische Form mit $\|\bar{a}\|\leqslant\|a\|=1$. Wegen $\bar{a} x_1 x_2^{n-2}=a x_1 x_2^{n-1}=1$ ist $\|\bar{a}\|=1$. Da die Form $\bar{a}$ die Voraussetzungen unseres Satzes für $n-1$ erfüllt, gilt $\bar{a} x_3^{n-1}=1$, oder

$$a x_2 x_3^{n-1}=1, \quad \text{wo } x_3=\varphi_{n-1}(x_1, x_2), \quad x_2+x_3\neq 0$$

und ebenso

$$a x_3 x_4^{n-1}=1, \quad \text{wo } x_4=\varphi_{n-1}(x_2, x_3), \quad x_3+x_4\neq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a x_{k-1} x_k^{n-1}=1, \quad \text{wo } x_k=\varphi_{n-1}(x_{k-2}, x_{k-1}), \quad x_{k-1}+x_k\neq 0.$$

Da nach § 2 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=\varphi_n(x_1, x_2)$ ist, ergibt sich durch Grenübergang

$$a x^n=1 \text{ für } x=\varphi_n(x_1, x_2).$$

Hilfssatz 2. *Ist $a z_1\ldots z_n$ eine symmetrische n-lineare Form der Vektoren $z_1,\ldots, z_m$ in R_m mit $\|a\|=1$, so gibt es einen Einheitsvektor x, für welchen $a x^n=\pm 1$ ist.*

Beweis. Ist zunächst $n=2$, so gibt es wegen $\|a\|=1$ zwei Einheitsvektoren x_1, x_2 für welche $a x_1 x_2=1$ ist. Fall $x_1+x_2=0$ ist, so genügt es $x=x_1$ zu setzen, anderenfalls besitzt nach Hilfssatz 1 der Vektor $x=\varphi_2(x_1, x_2)$ die verlangte Eigenschaft.

Wir setzen jetzt die Richtigkeit unseres Satzes für $n-1$ voraus. Wegen $\|a\|=1$ existieren n Einheitsvektoren $x_1,\ldots, x_n$, für welche $a x_1\ldots x_n=1$ ist. Wir setzen

$$\bar{a} z_1\ldots z_{n-1}=a z_1\ldots z_{n-1} x_n.$$

Dann ist $\|\bar{a}\|\leqslant\|a\|=1$, also wegen $\bar{a} x_1\ldots x_{n-1}=1$ auch $\|\bar{a}\|=1$.

Nach unserer Annahme gibt es einen Einheitsvektor x_0, für welchen $\bar{a} x_0^{n-1}=\pm 1$, d. h. $a x_0^{n-1} x_n=\pm 1$ ist. Im Falle $x_0+x_n=0$ besitzt also wieder $x=x_0$, anderenfalls aber $x=\varphi_n(x_n, x_0)$ die verlangte Eigenschaft.

§ 4.

Hilfssatz 3. *Ist $a x_1\ldots x_n$ ein symmetrisches n-lineares Funktional in (L^2), so gilt*

$$\|a\|=\underset{\|x\|\leq 1}{\text{ob. Gr.}}\,|a x^n|.$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\|a\|=1$ an. Ist $z=(\xi_1,\ldots,\xi_m)$ ein Vektor des m-dimensionalen Raumes R_m, so bezeichnen wir mit $\bar{z}$ das Element $(\xi_1,\ldots, \xi_m, 0, 0,\ldots)$ aus (L^2). Wir setzen

$$a_m z_1\ldots z_n=a\bar{z}_1\ldots\bar{z}_n; \tag{1}$$

dann ist a_m eine in R_m erklärte symmetrische n-lineare Form und $\|a_m\|\leqslant 1$. Nach Hilfssatz 2 gibt es in R_m einen Einheitsvektor x_m, für welchen $a_m x_m^n=\pm\|a_m\|$ stattfindet. Daher ist

$$a\bar{x}_m^n=\pm\|a_m\|, \quad \|\bar{x}_m\|=1. \tag{2}$$

Wir beweisen jetzt, daß $\lim\limits_{m\to\infty}\|a_m\|=1$ ist.

Wegen $\|a\|=1$ gibt es zu einem beliebigen $\varepsilon>0$ n Einheitsvektoren $y_1,\ldots, y_n$ aus (L^2) von der Eigenschaft, daß

$$|a y_1\ldots y_n|>1-\varepsilon \tag{3}$$

ist. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} y_k&=(\eta_1^k, \eta_2^k,\ldots\ldots),\\ y_k^m&=(\eta_1^k,\ldots\ldots \eta_m^k),\\ \bar{y}_k^m&=(\eta_1^k,\ldots\ldots, \eta_m^k, 0, 0,\ldots);\end{aligned}\right. \qquad (k=1,\ldots, n)$$

dann ist $\lim\limits_{m\to\infty} \bar{y}_k^m = y_k$ $(k=1,\ldots,n)$, also nach (1), (3)

$$\lim_{m\to\infty} |a_m y_1^m \ldots y_n^m| = \lim_{m\to\infty} |a \bar{y}_1^m \ldots \bar{y}_n^m| = |a y_1 \ldots y_n| > 1-\varepsilon.$$

Wegen $|y_k^m| \leqslant 1$ ist $|a_m y_1^m \ldots y_n^m| \leqslant \|a_m\|$, also, da $\|a_m\| \leqslant 1$ und ε beliebig ist, $\lim\limits_{m\to\infty} \|a_m\| = 1$.

Aus (2) ergibt sich jetzt $\lim\limits_{m\to\infty} |a \bar{x}_m^n| = 1$; da $\|\bar{x}_m\| = 1$ $(m=1,2,\ldots)$, so ist

$$\underset{\|x\|\leq 1}{\text{ob. Gr.}} |a x^n| = 1 = \|a\|.$$

§ 5.

Satz I. *Ist $a x_1 \ldots x_n$ eine symmetrische n-lineare Operation in (L^2), so gilt*

$$\underset{\|x_1\|\leq 1,\ldots,\|x_n\|\leq 1}{\text{ob. Gr.}} \|a x_1 \ldots x_n\| = \underset{\|x\|\leq 1}{\text{ob. Gr.}} \|a x^n\|.$$

Beweis. Wir nehmen $\|a\| = 1$ an und bezeichnen mit ε eine positive Zahl. Es gibt n Elemente $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, so daß

$$\|a \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\| > 1-\varepsilon, \ \|\bar{x}_1\| = 1, \ldots, \|\bar{x}_n\| = 1.$$

Setzt man

$$y = a x_1 \ldots \ldots x_n,$$
$$\bar{y} = a \bar{x}_1 \ldots \ldots \bar{x}_n$$

so ist $\|\bar{y}\| > 1-\varepsilon$.

Sei Y ein lineares Funktional, welches für alle y, d. h. in der Wertmenge der Operation a erklärt ist und der Bedingung

(1) $$\|Y\| = 1, \quad Y(\bar{y}) = \|\bar{y}\|$$

genügt. Dann ist

$$\bar{a} x_1 \ldots x_n = Y(a x_1 \ldots x_n)$$

ein symmetrisches n-lineares Funktional in (L^2). Man hat ferner

$$\bar{a} \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n = Y(a \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n) = Y(\bar{y}) = \|\bar{y}\| > 1-\varepsilon,$$

also $\|\bar{a}\| > 1-\varepsilon$. Nach Hilfssatz 3 gibt es daher in (L^2) ein $\bar{x}$, für welches

(2) $$|\bar{a} \bar{x}^n| > 1-\varepsilon, \quad \|\bar{x}\| = 1$$

gilt. Wegen

$$|\bar{a} \bar{x}^n| = |Y(a \bar{x}^n)| \leqslant \|Y\| . \|a \bar{x}^n\|$$

ist nach (1), (2) $\|a \bar{x}^n\| > 1-\varepsilon$. Da $\|\bar{x}\| = 1$ und ε beliebig ist, folgt

$$\underset{\|x\|\leq 1}{\text{ob. Gr.}} \|a x^n\| = 1 = \|a\|.$$

§ 6.

Satz II. *Ist $a x^n$ ein symmetrisches homogenes Polynom n-ten Grades in (L^2), so gibt es eine Folge $\{x_i\}$ und eine Zahl λ $(\|x_i\| = 1$ für $i = 1, 2, \ldots$; $|\lambda| = 1/\|a\|)$, derart daß*

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - \lambda a x_i^n\| = 0.$$

Beweis. Setzt man

(1) $$\bar{a} x_1 \ldots x_n x_{n+1} = \int_0^1 (a x_1 \ldots x_n) x_{n+1}\, dt,$$

so ist

$$\|\bar{a}\| \leqslant \|a\| . \|x_1\| \ldots . \|x_n\| . \|x_{n+1}\|,$$

also $\|\bar{a}\| \leqslant \|a\|$.

Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ gibt es n Elemente $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ $(\|\bar{x}_1\| = 1, \ldots, \|\bar{x}_n\| = 1)$ für welche

(2) $$\|a \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\| > \|a\| - \varepsilon;$$

wir setzen

$$x_{n+1} = a \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n, \quad \bar{x}_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{\|x_{n+1}\|};$$

dann ist nach (1)

$$\bar{a} \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n+1} = \int_0^1 x_{n+1} \bar{x}_{n+1}\, dt = \|x_{n+1}\| = \|a \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n\|,$$

also wegen (2)

$$\bar{a} \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n+1} > \|a\| - \varepsilon.$$

Hieraus folgt $\|\bar{a}\| \geqslant \|a\|$, also schließlich

(3) $$\|\bar{a}\| = \|a\|.$$

Nach Satz I gibt es nun ein $\bar{x}$, wofür

$$|\bar{a} \bar{x}^{n+1}| > \|\bar{a}\| - \varepsilon, \quad \|\bar{x}\| = 1,$$

d. h., mit Rücksicht auf (1), (3),

$$\left|\int_0^1 (a\bar{x}^n)\,\bar{x}\,dt\right| > \|a\| - \varepsilon$$

gilt. Setzt man

$$\eta = \operatorname{sign}\int_0^1 (a\bar{x}^n)\bar{x}\,dt,$$

so ergibt sich

$$\int_0^1 \left[\bar{x} - \frac{\eta}{\|a\|}a\bar{x}^n\right]^2 dt = 1 + \frac{1}{\|a\|^2}\int_0^1 (a\bar{x}^n)^2 dt - 2\frac{1}{\|a\|}\left|\int_0^1 (a\bar{x}^n)\bar{x}\,dt\right|$$

$$\leqslant 1 + 1 - 2\left[1 - \frac{\varepsilon}{\|a\|}\right] = \frac{2\varepsilon}{\|a\|}.$$

Für $\lambda = \frac{\eta}{\|a\|}$ ist also

$$\int_0^1 [\bar{x} - \lambda a\bar{x}^n]^2 dt = \|\bar{x} - \lambda a\bar{x}^n\|^2 < \frac{2\varepsilon}{\|a\|}.$$

Satz III. *Ist ax^n ein vollstetiges symmetrisches homogenes Polynom n-ten Grades in (L^2), so gibt es ein Element x und eine Zahl λ ($\|x\| = 1$, $|\lambda| = \frac{1}{\|a\|}$), so daß*

$$x - \lambda a x^n = 0.$$

Beweis. Nach Satz II existiert eine Folge $\{x_i\}$, für welche

$$\|x_i\| = 1 \quad (i = 1, 2\ldots), \quad \lim_{i\to\infty}\|x_i - \lambda a x_i^n\| = 0$$

ist. Da das Polynom a vollstetig ist, gibt es eine Teilfolge $\{x_{i_k}\}$, so daß die Folge $\{a x_{i_k}^n\}$ konvergiert. Für $x = \lim_{k\to\infty} a x_{i_k}^n$ ist offenbar

$$x = \lambda a x^n.$$

(Reçu par la Rédaction le 10. 12. 1936).