Sur les polynomes associés aux fonctions modulaires ϑ

par

Z. ZALCWASSER (Warszawa).

1. Dans le Mémoire „Some problems of Diophantine Approximation“ de 1914 MM. Hardy et Littlewood [1]) ont étudié en détail les polynomes

$$(1)\qquad s_n^2=\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n} e^{(\nu-1/2)^2\pi i x},\quad s_n^3=\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n} e^{\nu^2\pi i x},\quad s_n^4=\sum_{1\leqslant\nu\leqslant n}(-1)^\nu e^{\nu^2\pi i x}\qquad (x \text{ réel})$$

associés aux fonctions modulaires ϑ. Ici nous nous proposons de pousser cette étude un peu plus loin et d'en tirer quelques conséquences relatives aux séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{\nu^2\pi i x}.$$

2. Nous partons d'une formule importante de transformation obtenue par MM. Hardy et Littlewood. Soit x un nombre irrationnel de l'intervalle $(0,1)$ et

$$(2)\qquad x=\frac{1}{a_1}\dotplus\frac{1}{a_2}\dotplus\ldots.$$

son développement en fraction continue; posons

$$(3)\qquad x=\frac{1}{a_1+x_1},\quad x_1=\frac{1}{a_2+x_2},\ldots.$$

$$(4)\qquad x\,x_1\,x_2\ldots x_k=\xi_k\qquad (\xi_0=x).$$

Ceci posé, on a

$$(5)\qquad s_n^\lambda(x)=\frac{\omega}{\sqrt{\xi_{\nu-1}}}\,s^{\lambda_\nu}_{n\xi_{\nu-1}}(\pm x_\nu)+\frac{O(1)}{\sqrt{\xi_{\nu-1}}}\qquad (\nu=1,2,3,\ldots)\ ^{2})$$

[1]) Acta Math. 37 (1914) p. 193—238.

[2]) Loc. cit., formule 2.134, p. 212.

où ω est un nombre complexe de module 1, λ et $\lambda_\nu=2,3,4$ et $O(1)$ est une fonction de x et n dont la valeur absolue est moindre qu'une constante absolue M. Ajoutons qu'il résulte de la démonstration de MM. Hardy et Littlewood que λ_ν *dépend seulement de λ et des quotients partiels $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, mais est indépendant de n.*

3. Nous commençons par simplifier la formule (5).

Lemme [3]). *En désignant par $\frac{P_\nu}{Q_\nu}$ une réduite quelconque de la fraction continue* (2), *on a*

$$(6)\qquad |s_n^\lambda(x)|\leqslant\frac{n}{\sqrt{Q_\nu}}+C\sqrt{Q_\nu}\qquad (\nu=1,2,3,\ldots;\ \lambda=2,3,4),$$

où C est une constante absolue.

Démonstration. Posons

$$\frac{P_\nu}{Q_\nu}=\frac{1}{a_1}\dotplus\frac{1}{a_2}\dotplus\ldots\dotplus\frac{1}{a_\nu}=y;$$

$$y=\frac{1}{a_1+y_1},\quad y_1=\frac{1}{a_2+y_2},\ldots,\quad y_{\nu-1}=\frac{1}{a_\nu},\quad y_\nu=0,$$

$$y\,y_1\,y_2\ldots y_k=\eta_k\qquad (k=0,1,2,\ldots,\nu).$$

On vérifie aisément par récurrence que

$$(7)\qquad \xi_k-\eta_k=(-1)^k Q_k(x-y)\qquad (k\leqslant\nu).$$

Comme le signe de $x-y$ est celui de $(-1)^\nu$ et la valeur absolue est $<\frac{1}{Q_\nu Q_{\nu+1}}$, on en tire

$$(8)\qquad 0<\eta_{\nu-1}-\xi_{\nu-1}<\frac{Q_{\nu-1}}{Q_\nu Q_{\nu+1}}\leqslant\frac{1}{2\,Q_\nu}.$$

Je dis que

$$(9)\qquad \eta_{\nu-1}=\frac{1}{Q_\nu}.$$

[3]) Ce lemme n'est pas nouveau. Il découle de l'inégalité (12) démontrée d'une autre manière par MM. Hardy et Littlewood dans le Mémoire: Some problems of Diophantine approximation: The lattice-points of a right-angled triangle, Abh. math. Semin. Hamburg (1922); Lemma 2. Notre raisonnement nous sera utile plus loin.

En effet, posons $y_k = \frac{l_k}{m_k}$ $(k=0,1,\ldots,\nu-1)$, où l_k et m_k n'ont aucun diviseur commun. $y_{k-1} = \frac{1}{a_k + y_k}$ ou bien $\frac{m_{k-1}}{l_{k-1}} = a_k + \frac{l_k}{m_k}$. Il s'ensuit que $l_{k-1} = m_k$ $(1 \leqslant k < \nu)$, donc

(10) $$\eta_{\nu-1} = y\, y_1 \ldots y_{\nu-1} = \frac{l_0}{m_0}\cdot\frac{l_1}{m_1}\cdots\frac{l_{\nu-1}}{m_{\nu-1}} = \frac{l_{\nu-1}}{m_0}.$$

D'autre part

(11) $$\frac{l_{\nu-1}}{m_{\nu-1}} = y_{\nu-1} = \frac{1}{a_\nu}, \text{ donc } l_{\nu-1}=1\,;\ \frac{l_0}{m_0} = y_0 = \frac{P_\nu}{Q_\nu}, \text{ donc } m_0 = Q_\nu.$$

Les relations (10) et (11) donnent (9). Maintenant des formules (8) et (9) on tire

(12) $$\frac{1}{2\,Q_\nu} \leqslant \xi_{\nu-1} \leqslant \frac{1}{Q_\nu}$$

et de l'inégalité (5) il s'ensuit que

$$|s_n^\lambda(x)| \leqslant n\sqrt{\xi_{\nu-1}} + \frac{M}{\sqrt{\xi_{\nu-1}}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{Q_\nu}} + C\sqrt{Q_\nu}, \quad \text{avec } C = M\sqrt{2}.$$

4. Théorème I. *La mesure de l'ensemble* $E = E_n = \underset{x}{\mathcal{E}}(\underset{n\leqslant N}{\mathrm{Max}}\,|s_n^\lambda(x)| \geqslant A\sqrt{N})$[4] $(A>0,\ N>0;\ 0<x<1;\ \lambda=2,3,4)$ *est* $\leqslant \frac{F}{A^4}$, *F étant une constante absolue.*

Démonstration. Soit $x = \frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \ldots$ un nombre irrationnel de l'intervalle $(0,1)$; supposons d'abord

(13) $$A^2 > 4\,C,$$

où C est la constante dans la formule (6).

Si pour chaque $n \leqslant N$ il existe un dénominateur Q_ν tel que

(14) $$\frac{4\,n^2}{A^2 N} < Q_\nu < \frac{A^2 N}{4\,C^2},$$

on a

$$\frac{n}{\sqrt{Q_\nu}} < \frac{A}{2}\sqrt{N}, \quad C\sqrt{Q_\nu} < \frac{A}{2}\sqrt{N},$$

[4]) Nous désignons généralement par $\underset{x}{\mathcal{E}}(\Phi_x)$ l'ensemble de tous les points x jouissant de la propriété Φ_x.

l'inégalité (6) donne $|s_n^\lambda(x)| < A\sqrt{N}$ pour $n = 1,2,\ldots,N$ et x n'appartient pas à E. Donc, si $x \in E$, il existe certainement un indice $n_0 \leqslant N$ tel que pour chaque Q_ν on a

(15) $$Q_\nu \leqslant \frac{4\,n_0^2}{A^2 N}$$

ou bien

(16) $$Q_\nu \geqslant \frac{A^2 N}{4\,C^2}.$$

Si $Q_1 \geqslant \frac{A^2 N}{4\,C^2}$, alors $x < \frac{1}{a_1} = \frac{1}{Q_1} \leqslant \frac{4\,C^2}{A^2 N}$, c'est-à-dire x appartient à l'intervalle $(0, \frac{4\,C^2}{A^2 N}) = I_0$. Dans le cas contraire, il existe un indice μ tel que

$$Q_\mu \leqslant \frac{4\,n_0^2}{A^2 N}, \quad \text{mais } Q_{\mu+1} \geqslant \frac{A^2 N}{4\,C^2}.$$

Alors $\left|x - \frac{P_\mu}{Q_\mu}\right| \leqslant \frac{1}{Q_\mu\,Q_{\mu+1}} \leqslant \frac{1}{Q_\mu}\cdot\frac{4\,C^2}{A^2 N}$, c'est-à-dire x appartient à un intervalle

$$I(r,s) = \left(\frac{r}{s} - \frac{1}{s}\cdot\frac{4\,C^2}{A^2 N},\ \frac{r}{s} + \frac{1}{s}\cdot\frac{4\,C^2}{A^2 N}\right),$$

où $0 < \frac{r}{s} \leqslant 1$, $(r,s) = 1$[5]) et $s = Q_\mu \leqslant \frac{4\,n_0^2}{A^2 N} \leqslant \frac{4N}{A^2}$.

Ainsi tout x irrationnel de l'ensemble E est contenu dans $I_0 + \sum_{r,s} I(r,s)$ et [6])

(17) $$|E| \leqslant |I_0| + \sum_{s,r} |I(r,s)| \leqslant \frac{4\,C^2}{A^2 N} + \sum_{s \leqslant \frac{4N}{A^2}} \left(\sum_{r=1}^{s} \frac{8\,C^2}{s\,A^2 N}\right)$$
$$= \frac{4\,C^2}{A^2 N} + \frac{8\,C^2}{A^2 N} \sum_{s \leqslant \frac{4N}{A^2}} 1 \leqslant \frac{4\,C^2}{A^2 N} + \frac{32\,C^2}{A^4}.$$

[5]) C'est-à-dire que r et s n'ont aucun diviseur commun.
[6]) Nous désignons par $|E|$ la mesure de l'ensemble E.

Si $A^2 \leqslant N$, on en tire

(18) $$|E| \leqslant \frac{36\,C^2}{A^4} = \frac{F}{A^4} \quad \text{avec } F = 36\,C^2,$$

c. q. f. d.

Nous avons prouvé cette inégalité sous les conditions $A^2 > 4\,C$ et $A^2 \leqslant N$, mais elle est aussi vraie dans le cas $A^2 \leqslant 4\,C$ (car alors $\frac{F}{A^4} > 1$) et dans le cas $A^2 > N$ (car alors l'ensemble E est vide). Le théorème est donc général.

5. On peut généraliser le théorème I, en remplaçant l'intervalle $(0,1) = \varDelta_0$ par un sous-intervalle quelconque $(a, b) = \varDelta$ $(0 \leqslant a < b \leqslant 1)$.

Théorème I'. *Il existe une constante absolue $C' > 0$ telle que $|E_N . \varDelta| \leqslant \frac{F|\varDelta|}{A^4}$ à condition que $A \leqslant |\varDelta| \frac{\sqrt{N}}{C'}$, quel que soit l'intervalle $\varDelta$ contenu dans* $(0,1)$ [7]).

Démonstration. On raisonne comme plus haut, mais on n'envisage que ces intervalles $I(r,s)$ qui ont des points communs avec $\varDelta$. Il faut donc que l'on ait

$$a - \frac{1}{s} \cdot \frac{4\,C^2}{A^2 N} \leqslant \frac{r}{s} \leqslant b + \frac{1}{s} \cdot \frac{4\,C^2}{A^2 N}\,;$$

$s \leqslant \frac{4N}{A^2}$ étant donné, le nombre de différents r remplissant cette inégalité est au plus égal à

$$|\varDelta|\,s + \frac{8\,C^2}{A^2 N} + 1 \leqslant |\varDelta|\,s + 2,$$

si

(19)$_1$ $$A^2 N \geqslant 8\,C^2.$$

Donc

$$\sum_r |I(r,s) . \varDelta| \leqslant \frac{1}{s} \cdot \frac{8\,C^2}{A^2 N} \{|\varDelta|\,s + 2\}$$

et, en sommant par rapport à s, il vient

[7]) $E_N . \varDelta$ désigne l'ensemble des points communs à E_N et $\varDelta$.

(20) $$\sum_{s \leqslant \frac{4N}{A^2}} \Big(\sum_r |I(r,s) . \varDelta|\Big) \leqslant \frac{8\,C^2}{A^2 N} |\varDelta| \frac{4N}{A^2} + \frac{16\,C^2}{A^2 N} \sum_{s \leqslant \frac{4N}{A^2}} \frac{1}{s}$$
$$\leqslant \frac{32\,C^2 |\varDelta|}{A^4} + \frac{16\,C^2}{A^2 N} 2 \sqrt{\frac{4N}{A^2}} \leqslant \frac{34\,C^2 |\varDelta|}{A^4} \quad {}^{8}),$$

pourvu que

$$\frac{64\,C^2}{A^3 \sqrt{N}} \leqslant \frac{2\,C^2 |\varDelta|}{A^4},$$

c'est-à-dire

(19)$_2$ $$\frac{\sqrt{N}}{A} \geqslant \frac{32}{|\varDelta|}.$$

Aux intervalles $I(r,s)$ il faut peut-être ajouter $I_0 = (0, \frac{4\,C^2}{A^2 N})$, mais

(21) $$|I_0| = \frac{4\,C^2}{A^2 N} \leqslant \frac{2\,C^2 |\varDelta|}{A^4},$$

si

(19)$_3$ $$\frac{N}{A^2} \geqslant \frac{2}{|\varDelta|}.$$

Ainsi (20) et (21) donnent

(22) $$|E_N . \varDelta| \leqslant \sum_{s,r} |I(r,s) . \varDelta| + |I_0| \leqslant \frac{36\,C^2 |\varDelta|}{A^4} = \frac{F|\varDelta|}{A^4}.$$

Nous avons démontré cette inégalité sous les conditions (13) et (19)$_{1,2,3}$. Or (19)$_3$ est une conséquence de (19)$_2$; (13) et (19)$_2$ entraînent (19)$_1$ de sorte qu'il ne reste qu'à tenir compte des conditions (13) et (19)$_2$. Enfin pour $A^2 \leqslant 4\,C$ l'inégalité (22) est certainement vraie (car $\frac{F}{A^4} > 1$) et ainsi notre théorème se trouve démontré à la seule condition

(23) $$A \leqslant \frac{|\varDelta| \sqrt{N}}{32}; \quad C' = 32.$$

[8]) On fait ici usage de l'inégalité $\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{s} \leqslant 2\sqrt{k}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Remarque. En se servant des formules

$$|s_n^2(x+1)| = |s_n^2(x)|,$$

$$|s_n^\lambda(-x)| = |s_n^\lambda(x)|, \quad |s_n^\mu(x+2)| = |s_n^\mu(x)| \quad (\lambda = 2,3,4;\ \mu = 3,4),$$

on vérifie aisément que le théorème I′ est aussi valable pour un intervalle arbitraire $\varDelta$ de longueur $\leqslant 1$ non contenu dans $(0,1)$.

6. Maintenant nous allons prouver que les théorèmes I et I′ sont les meilleurs possibles de ce genre, abstraction faite de la valeur exacte de la constante F.

Théorème II. *Soit*

$$D = D_N = \underset{x}{\mathcal{E}}\{|s_N^3(x)| \geqslant A\sqrt{N}\}; \quad \varDelta = (a,b) \subset (0,1).$$

Il existe alors trois constantes absolues positives G, C_1, C_2 *telles que*

$$|D.\varDelta| \geqslant \frac{G|\varDelta|}{A^4} \quad \text{si } C_1 \leqslant A \leqslant |\varDelta|\frac{\sqrt{N}}{C_2},$$

quel que soit l'intervalle $\varDelta \subset (0,1)$.

Pour établir ces inégalités, nous démontrerons d'abord un théorème auxiliaire.

Lemme II. Prémisses: 1° $A^2 > M/8$, *où* M *est la constante dans la formule* (5); 2° r *est un nombre pair,* s — *impair et* $(r,s) = 1$ [5]; 3° $s < N/128A^2$.

Thèse: 1° *L'intervalle* $K(r,s) = \left(\frac{r}{s} - \frac{1}{4N^2},\ \frac{r}{s} + \frac{1}{4N^2}\right)$ *est contenu dans* $D = D_N$; 2° *les différents intervalles* $K(r,s)$ *sont sans points communs deux à deux.*

Démonstration. Le nombre $y = \frac{r}{s}$ admet deux développements en fraction continue:

$$(24) \qquad y = \frac{r}{s} = \frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{a_\nu} \qquad (a_\nu > 1),$$

$$(25) \qquad y = \frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{a_\nu - 1} \dotplus \frac{1}{1}.$$

Considérons d'abord les nombres x de la forme

$$(24') \qquad x = \frac{1}{a_1} \dotplus \frac{1}{a_2} \dotplus \ldots \dotplus \frac{1}{a_\nu + x_\nu} \quad \text{avec } 0 \leqslant x_\nu < 1.$$

En vertu de la formule (5) nous avons (notations de **2** et **3**)

$$(26) \qquad s_N^3(x) = \frac{\omega}{\sqrt{\xi_{\nu-1}}} s^\lambda_{N\xi_{\nu-1}}(\pm x_\nu) + \frac{O(1)}{\sqrt{\xi_{\nu-1}}},$$

$$(26)_1 \qquad s_N^3(y) = \frac{\omega'}{\sqrt{\eta_{\nu-1}}} s^\lambda_{N\eta_{\nu-1}}(\pm y_\nu) + \frac{O(1)}{\sqrt{\eta_{\nu-1}}}.$$

D'après la remarque faite à la fin du № **2**, λ a la même valeur dans ces deux formules et ne dépend pas de N. Je dis que $\lambda = 2$ ou 3.

En effet, posons $N = ks$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. D'après les propriétés des sommes de Gauss [9],

$$(27) \quad s_{ks}^3(y) = \sum_{\nu=1}^{ks} e^{\nu^2\pi i \frac{r}{s}} = k\sum_{\nu=1}^{s} e^{\nu^2\pi i\frac{r}{s}} = \omega' k\sqrt{s}, \text{ où } \omega' = \pm 1 \text{ ou } \pm i.$$

D'autre part, $(26)_1$ peut s'écrire (pour $N = ks$)

$$s_{ks}^3(y) = \omega'\sqrt{s}\,.\,s_k^\lambda(0) + O(\sqrt{s})$$

parce que $y_\nu = 0$ et $\eta_{\nu-1} = \frac{1}{s} = \frac{1}{Q_\nu}$ d'après (9). En supposant $\lambda = 4$, on aurait $|s_k^\lambda(0)| \leqslant 1$ et $s_{ks}^3(y) = O(\sqrt{s})$ quel que soit k, en contradiction avec (27). On a donc nécessairement $\lambda = 2$ ou 3.

Posons

$$(28) \qquad m = [N\xi_{\nu-1}] = \text{le plus grand entier} \leqslant N\xi_{\nu-1}.$$

On a $s^\lambda_{N\xi_{\nu-1}} = s^\lambda_m$ et $s_m^\lambda(0) = m$, car $\lambda = 2$ ou 3; puis

$$(29) \quad |s^\lambda_{N\xi_{\nu-1}}(\pm x_\nu) - m| = |s_m^\lambda(\pm x_\nu) - s_m^\lambda(0)| \leqslant x_\nu m^3 \leqslant \tfrac{1}{2}m,$$

si

$$(30) \qquad x_\nu \leqslant \frac{1}{2m^2}.$$

---

[9]) Voir p. ex. loc. cit. [1]), p. 195.

Je dis que pour $x \in K'(r,s)=\left(\frac{r}{s},\ \frac{r}{s}+\frac{(-1)^\nu}{4N^2}\right)$ l'inégalité (30) est certainement remplie. En effet

$$x-\frac{r}{s}=\frac{(-1)^\nu x_\nu}{Q_\nu Q'_\nu} \text{ où } Q'_\nu=Q_{\nu-1}(a_\nu+x_\nu)+Q_{\nu-2}=Q_\nu+x_\nu Q_{\nu-1} \leqslant 2Q_\nu=2s,$$

donc

1° le signe de $x-\frac{r}{s}$ est celui de $(-1)^\nu$,

(31) 2° $x_\nu=Q_\nu Q'_\nu \left|x-\frac{r}{s}\right| \leqslant 2s^2\frac{1}{4N^2}\leqslant\frac{1}{2m^2}$,

car $m \leqslant N\xi_{\nu-1}\leqslant\frac{N}{s}$ en vertu de (12). L'inégalité (29) est ainsi établie pour $x \in K'(r,s)$. On en déduit

(32) $$|s^\lambda_{N\xi_{\nu-1}}(\pm x_\nu)| \geqslant \frac{1}{2}m \geqslant \frac{1}{4}N\xi_{\nu-1}.$$

Maintenant (26) donne

(33) $$|s^3_N(x)| \geqslant \frac{N\sqrt{\xi_{\nu-1}}}{4}-\frac{M}{\sqrt{\xi_{\nu-1}}} \geqslant \frac{N}{4\sqrt{2s}}-M\sqrt{2s}$$

d'après (12). Or, en vertu des prémisses 3° et 1°, on a

$(34)_1$ $$\frac{N}{4\sqrt{2s}} \geqslant 2A\sqrt{N},$$

$(34)_2$ $$M\sqrt{2s} \leqslant M\sqrt{\frac{2N}{128A^2}}=\frac{M}{8A}\sqrt{N} \leqslant A\sqrt{N}.$$

Les inégalités (33) et $(34)_{1,2}$ entraînent

(35) $$|s^3_N(x)| \geqslant A\sqrt{N} \text{ pour tout } x \in K'(r,s).$$

D'une manière analogue, en considérant x de la forme $\frac{1}{a_1}\dotplus\frac{1}{a_2}\dotplus\dots\dotplus\frac{1}{a_\nu-1}\dotplus\frac{1}{1+x_{\nu+1}}$ $(0 \leqslant x_{\nu+1}<1)$, on vérifie que l'inégalité (35) est aussi valable pour $x \in K''(r,s)=\left(\frac{r}{s},\ \frac{r}{s}-\frac{(-1)^\nu}{4N^2}\right)$ et ainsi (35) a lieu pour tout $x \in K(r,s)=K'+K''$.

Il reste à montrer que les différents intervalles $K(r,s)$ n'empiètent pas les uns sur les autres. Or, si $x \in K(r,s)$, $x' \in K(r',s')$ $\left(\frac{r}{s} \neq \frac{r'}{s'}\right)$, on a

$$|x-x'| \geqslant \left|\frac{r}{s}-\frac{r'}{s'}\right|-\frac{1}{4N^2}-\frac{1}{4N^2} \geqslant \frac{1}{ss'}-\frac{1}{2N^2} \geqslant \frac{1}{N^2}-\frac{1}{2N^2}>0$$

et $x \neq x'$.

Le lemme II est donc démontré.

7. Revenons à la démonstration du théorème II. Il s'agit maintenant d'obtenir une borne inférieure pour le nombre des différents intervalles $K(r,s)$ contenus dans Δ.

Soit $\Delta'=(a',b')$ l'intervalle concentrique avec Δ mais de longueur $|\Delta'|=\frac{1}{2}|\Delta|$. Considérons les fractions $\frac{r}{s}$ jouissant des propriétés suivantes:

r est pair, s — impair et $(r,s)=1$; $s \leqslant \frac{N}{128A^2}$ et $a'<\frac{r}{s}\leqslant b'$, c'est-à-dire

(36) $$\frac{a'}{2}s<r' \leqslant \frac{b'}{2}s, \text{ où } r'=\frac{r}{2}.$$

s étant donné, désignons par $\psi(s)$ le nombre des r' premiers avec s et remplissant (36). On a

(37) $$\psi(s)=\varphi\left(s,\ \frac{b'}{2}s\right)-\varphi\left(s,\ \frac{a'}{2}s\right),$$

où $\varphi(n,x)$ est le nombre des entiers $\leqslant x$ premiers avec n.

Quand $\frac{r}{s}$ remplie les dites conditions, l'intervalle $K(r,s)$ est contenu dans Δ. En effet

$$\frac{r}{s}-\frac{1}{4N^2}>a'-\frac{1}{4N^2}>a, \quad \frac{r}{s}+\frac{1}{4N^2} \leqslant b'+\frac{1}{4N^2}<b,$$

si $\frac{1}{4N^2}<\frac{|\Delta|}{4}$ ou bien

(38) $$N^2>\frac{1}{|\Delta|},$$

ce que nous admettons d'avance. Comme $|K(r,s)|=\frac{1}{2N^2}$, on a

$$(39)\qquad |D_N \,.\, \Delta| \geqslant \sum_{s,\,r} |K(r,s)\,.\,\Delta| \geqslant \frac{1}{2N^2} \dot{\sum_{s\leqslant u}} \psi(s),$$

où le symbole $\dot{\sum\limits_{s\leqslant u}}$ signifie que l'on ne prend que les valeurs impaires de s, $s \leqslant u$ et $u = \dfrac{N}{128\,A^2}$.

Évaluons d'abord les sommes

$$(40)\qquad L(c) = \dot{\sum_{s\leqslant u}} \varphi(s, cs) \qquad (0 < c \leqslant 1).$$

On sait que

$$(41)\qquad \varphi(s,x) = \sum_{d|s} \mu(d)\, \mathcal{E}\left(\frac{x}{d}\right),$$

où $\mu(d)$ est la fonction de Möbius, $\mathcal{E}(\alpha) =$ le plus grand entier $\leqslant \alpha$, et la sommation porte sur les différents diviseurs de s [10]. En particulier

$$\varphi(s, cs) = \sum_{d|s} \mu(d)\, \mathcal{E}(c\delta), \text{ où } \delta = \frac{s}{d} \text{ et}$$

$$(42)\qquad L(c) = \dot{\sum_{d,\delta\,(d\delta\leqslant u)}} \mu(d)\, \mathcal{E}(c\delta) = \dot{\sum_{d\leqslant u}} \mu(d) \dot{\sum_{\delta\leqslant u/d}} \mathcal{E}(c\delta)$$

(car, si s est impair, d et δ le sont aussi).

On a

$$(43)\qquad \dot{\sum_{\delta\leqslant u/d}} \mathcal{E}(c\delta) = \dot{\sum_{\delta\leqslant u/d}} c\delta + R \text{ avec } |R| \leqslant \frac{u}{d};$$

de plus

$$(44)\qquad \dot{\sum_{\delta\leqslant u/d}} \delta = k^2,$$

$2k-1$ étant le plus grand entier impair $\leqslant \dfrac{u}{d}$. Comme

$$\left|k^2 - \frac{u^2}{4d^2}\right| = \left|k - \frac{u}{2d}\right| . \left|k + \frac{u}{2d}\right| \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{u}{d} + 1 + \frac{u}{d}\right) < \frac{u}{d},$$

(44) peut s'écrire sous la forme

$$(44)'\qquad \dot{\sum_{\delta\leqslant u/d}} \delta = \frac{u^2}{4d^2} + \frac{\theta u}{d} \qquad (|\theta| < 1).$$

Les relations (43) et (44') donnent

$$\dot{\sum_{\delta\leqslant u/d}} \mathcal{E}(c\delta) = \frac{cu^2}{4d^2} + \frac{2u\theta'}{d} \qquad (|\theta'| < 1)$$

et, en portant dans (42), on obtient

$$(45)\qquad L(c) = \dot{\sum_{d\leqslant u}} \mu(d) \frac{cu^2}{4d^2} + R',$$

où

$$(46)\qquad |R'| \leqslant \dot{\sum_{d\leqslant u}} \frac{2u}{d} \leqslant 2u(1 + \log u).$$

D'après un théorème de la théorie des nombres on a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\mu(k)}{k^2} = \dfrac{6}{\pi^2}$ [11] et un raisonnement analogue prouve que

$$(47)\qquad \left| \dot{\sum_{d\leqslant u}} \frac{\mu(d)}{d^2} - \frac{8}{\pi^2} \right| < \frac{6(1+\log u)}{u}.$$

On en déduit

$$(48)\qquad \left| \dot{\sum_{d\leqslant u}} \frac{\mu(d)}{d^2} . \frac{cu^2}{4} - \frac{2cu^2}{\pi^2} \right| < \frac{6(1+\log u)}{u} . \frac{cu^2}{4} < 2u(1+\log u).$$

Les inégalités (45), (46), (48) et la formule (42) donnent

$$(49)\qquad \left| \dot{\sum_{s\leqslant u}} \varphi(s, cs) - \frac{2u^2 c}{\pi^2} \right| < 4u(1+\log u).$$

En posant successivement $c = b'/2$, $c = a'/2$ et en tenant compte de (37) on en tire

$$(50)\qquad \left| \dot{\sum_{s\leqslant u}} \psi(s) - \frac{u^2|\Delta|}{\pi^2} \right| < 8u(1+\log u) \leqslant 16\, u^{3/2} \text{ [12]},$$

d'où

$$(51)\qquad \dot{\sum_{s\leqslant u}} \psi(s) \geqslant \frac{u^2|\Delta|}{2\pi^2},$$

si

$$\frac{u^2|\Delta|}{2\pi^2} \geqslant 16\, u^{3/2};\ \sqrt{u} \geqslant \frac{32\pi^2}{|\Delta|}, \text{ c. à. d. } \frac{\sqrt{N}}{8\sqrt{2}\,A} \geqslant \frac{32\pi^2}{|\Delta|}, \text{ ou bien}$$

$$(52)\qquad A \leqslant \frac{|\Delta|\sqrt{N}}{256\sqrt{2}\,\pi^2}.$$

[10]) Voir p. ex. W. Sierpiński, Teorja liczb, Warszawa (1914) (en polonais); p. 93, formule (9). Le cas particulier où x est un nombre entier est cité dans le grand ouvrage de M. L. E. Dickson, History of the theory of numbers; vol. I, p. 115, formule (5).

[11]) Voir p. ex. loc. cit. [10]), p. 373, formule (93). Voir aussi E. Cahen, Éléments de la théorie des nombres, Paris (1900); p. 351.

[12]) $1 + \log u \leqslant 2\sqrt{u}$ pour $u \geqslant 1$.

Enfin, en rapprochant (39) et (51), on voit que

$$(53)\qquad |D.\varDelta| \geqslant \frac{1}{2N^2}\cdot\frac{u^2|\varDelta|}{2\pi^2} = \frac{|\varDelta|\,N^2}{128^2 A^4\, 2\pi^2\, 2N^2} = \frac{G|\varDelta|}{A^4}$$

avec

$$(54)\qquad G=(256\,\pi)^{-2}$$

L'inégalité (53) est démontrée sous les conditions (38), (52) et $A^2 > M/8 \geqslant 1$. Mais (38) est une conséquence de (52) et il ne reste qu'a tenir compte des conditions (52) et $A^2 > M/8$. Le théorème II est demontré; les valeurs des constantes sont

$$C_1=\sqrt{\tfrac{1}{8}M},\quad C_2=256\,\sqrt{2}\pi^2,\quad G=(256\,\pi)^{-2}.$$

Remarques. 1° Le théorème est vrai pour les intervalles $\varDelta$ non situés dans $(0,1)$; 2° on peut remplacer dans son énoncé les sommes s_N^3 par s_N^4, car $s_N^4(x)=s_N^3(x+1)$.

8. Les théorèmes démontrés permettent de déterminer d'une manière précise l'ordre de grandeur des intégrales

$$\int_0^1 |s_N(x)|^\alpha\,dx,\quad \int_a^b |s_N(x)|^\alpha\,dx \qquad (\alpha>0),$$

s_N désignant s_N^3 ou s_N^4.

En posant

$$(55)\qquad \varPhi_N(x)=\max_{\nu\leq N}|s_\nu(x)|,$$

on a

$$(56)_1\quad G_\alpha N^{\alpha/2} \leqslant \int_0^1 |s_N|^\alpha dx \leqslant \int_0^1 |\varPhi_N|^\alpha dx \leqslant F_\alpha N^{\alpha/2}\ (0<\alpha<4;\, N=1,2,3,\dots),$$

$$(56)_2\quad G_4\, N^2\log(N+1) \leqslant \int_0^1 |s_N|^\alpha dx \leqslant \int_0^1 |\varPhi_N|^\alpha dx \leqslant F_4 N^2 \log(N+1),$$

$$(56)_3\quad G_\alpha N^{\alpha-2} \leqslant \int_0^1 |s_N|^\alpha dx \leqslant \int_0^1 |\varPhi_N|^\alpha dx \leqslant F_\alpha N^{\alpha-2} \qquad (\alpha>4),$$

F_α et G_α ne dépendant que de α.

Plus généralement: à chaque nombre $|\varDelta|=b-a>0$ on peut faire correspondre un nombre $N_0=N_0(|\varDelta|,\alpha)$ indépendant de N, tel que pour $N\geqslant N_0$ on ait

$$(57)_1\quad G_\alpha|\varDelta|\,N^{\alpha/2} \leqslant \int_a^b |s_N|^\alpha dx \leqslant \int_a^b |\varPhi_N|^\alpha dx \leqslant F_\alpha|\varDelta|\,N^{\alpha/2} \qquad (0<\alpha<4),$$

$$(57)_2\quad G_4|\varDelta|\,N^2\log N \leqslant \int_a^b |s_N|^4 dx \leqslant \int_a^b |\varPhi_N|^4 dx \leqslant F_4|\varDelta|\,N^2\log N.$$

Pour $\alpha>4$ on obtient des inégalités moins précises:

$$(57)_3\quad G_\alpha|\varDelta|^{\alpha-3} N^{\alpha-2} \leqslant \int_a^b |s_N|^\alpha dx \leqslant \int_a^b |\varPhi_N|^\alpha dx \leqslant \frac{F_\alpha}{|\varDelta|^3} N^{\alpha-2} \qquad (\alpha>4,\ |\varDelta|\leqslant 1).$$

Il suffit de démontrer les formules (57).

Les inégalités à droite ne sont que des conséquences simples du théorème I'. Décomposons l'intervalle $\varDelta$ de la manière suivante: $\varDelta=E_1+E_2+E_3$, où

$$(58)\qquad \begin{gathered} E_1=\varDelta.\underset{x}{\mathcal{E}}(\varPhi_N\leqslant\sqrt{N}),\quad E_2=\varDelta.\underset{x}{\mathcal{E}}\Big(\sqrt{N}<\varPhi_N\leqslant\frac{N|\varDelta|}{C'}\Big),\\ E_3=\varDelta.\underset{x}{\mathcal{E}}\Big(\varPhi_N>\frac{N|\varDelta|}{C'}\Big),\end{gathered}$$

ce qui exige qu'on ait $\dfrac{N|\varDelta|}{C'}>\sqrt{N}$ ou bien $N>\dfrac{C'^2}{|\varDelta|^2}$. Ceci posé, on a

$$(59)\qquad \int_{E_1}\varPhi_N^\alpha\,dx \leqslant N^{\alpha/2}|E_1| \leqslant \varDelta\, N^{\alpha/2}\ ^{13)},$$

$$(60)\qquad \int_{E_3}\varPhi_N^\alpha\,dx \leqslant N^\alpha|E_3| \leqslant N^\alpha\frac{F\varDelta\, C'^4}{N^2\varDelta^4},$$

en vertu du théorème I' ($A=\dfrac{\sqrt{N}\varDelta}{C'}$).

Désignons par $g(B)$ la mesure de l'ensemble $E_2.\underset{x}{\mathcal{E}}(\varPhi_N>B)$; on a

[13]) Nous écrivons, pour abréger, $\varDelta$ au lieu de $|\varDelta|$ jusqu'à la fin de ce N°.

$$
(61)\qquad
\begin{aligned}
&g(B)=|E_2| \text{ pour } B\leqslant\sqrt{N}, \quad g(B)=0 \text{ pour } B\geqslant\frac{N\Delta}{C'},\\
&g(B)\leqslant\frac{F\Delta N^2}{B^4} \text{ pour } B\leqslant\frac{N\Delta}{C'},
\end{aligned}
$$

d'après le théorème I' ($B=A\sqrt{N}$). On aura donc

$$
(62)\qquad
\begin{aligned}
\int_{E_2}\Phi_N^\alpha\,dx &= -\int_{\sqrt{N}}^{N\Delta/C'} B^\alpha\,dg(B)=N^{\alpha/2}|E_2|+\alpha\int_{\sqrt{N}}^{N\Delta/C'} B^{\alpha-1}g(B)\,dB\\
&\leqslant N^{\alpha/2}\Delta+\alpha F\Delta N^2\int_{\sqrt{N}}^{N\Delta/C'} B^{\alpha-5}\,dB.
\end{aligned}
$$

Des inégalités (59), (60) et (62) on déduit:

1° pour $\alpha<4$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \Phi_N^\alpha\,dx=\int_{E_1}+\int_{E_2}+\int_{E_3} &\leqslant \Delta N^{\alpha/2}+\Delta N^{\alpha/2}+\frac{\alpha F\Delta N^2}{4-\alpha}N^{\alpha/2-2}\\
&+\Delta N^{\alpha/2}=F_\alpha\Delta N^{\alpha/2},
\end{aligned}
$$

à condition que

$$
\frac{FC'^4}{\Delta^3}N^{\alpha-2}\leqslant\Delta N^{\alpha/2}, \text{ c.-à-d. } N^{2-\alpha/2}\geqslant\frac{FC'^4}{\Delta^4};
$$

2° pour $\alpha=4$

$$
\int_a^b \Phi_N^4\,dx\leqslant\Delta N^2+\Delta N^2+2F\Delta N^2\log N+\Delta N^2\log N\leqslant F_4\Delta N^2\log N,
$$

à condition que

$$
\frac{FC'^4}{\Delta^3}N^2\leqslant\Delta N^2\log N, \text{ c.-à-d. } \log N\geqslant\frac{FC'^4}{\Delta^4};
$$

3° pour $\alpha>4$

$$
\int_a^b \Phi_N^\alpha\,dx\leqslant\Delta N^{\alpha/2}+\Delta N^{\alpha/2}+\frac{\alpha F\Delta N^2}{\alpha-4}\left(\frac{N\Delta}{C'}\right)^{\alpha-4}+\frac{FC'^4}{\Delta^3}N^{\alpha-2}\leqslant\frac{F_\alpha}{\Delta^3}N^{\alpha-2}.
$$

D'une manière analogue on vérifie à l'aide du théorème II les inégalités à gauche des formules (57).

En désignant par $h(B)$ la mesure de l'ensemble $\Delta.\underset{x}{\mathcal{E}}(|s_N|>B)$, on a

$$
(63)\qquad
\begin{aligned}
\int_a^b|s_N|^\alpha\,dx &=\alpha\int_0^N B^{\alpha-1}h(B)\,dB\geqslant\alpha\int_{C_1\sqrt{N}}^{N\Delta/C_2}B^{\alpha-1}\frac{G\Delta N^2}{B^4}\,dB\\
&=\alpha G\Delta N^2\int_{C_1\sqrt{N}}^{N\Delta/C_2}B^{\alpha-5}\,dB.
\end{aligned}
$$

On en déduit:

1° pour $\alpha<4$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b|s_N|^\alpha\,dx &\geqslant\frac{\alpha G\Delta N^2}{4-\alpha}\left\{C_1^{\alpha-4}N^{\alpha/2-2}-\frac{N^{\alpha-4}\Delta^{\alpha-4}}{C_2^{\alpha-4}}\right\}\\
&\geqslant\frac{\alpha G\Delta N^2}{2(4-\alpha)}C_1^{\alpha-4}N^{\alpha/2-2}=G_\alpha\Delta N^{\alpha/2},
\end{aligned}
$$

à condition que

$$
C_1^{\alpha-4}N^{\alpha/2-2}\geqslant2\left(\frac{N\Delta}{C_2}\right)^{\alpha-4}, \text{ c.-à-d. } N^{2-\alpha/2}\geqslant2\left(\frac{C_1C_2}{\Delta}\right)^{4-\alpha};
$$

2° pour $\alpha=4$

$$
\int_a^b|s_N|^4\,dx\geqslant\alpha G\Delta N^2\log\left(\frac{\sqrt{N}\Delta}{C_1C_2}\right)\geqslant G\Delta N^2\log N,
$$

si

$$
\frac{1}{4}\log N\geqslant\log\frac{C_1C_2}{\Delta}, \text{ ou bien } N\geqslant\left(\frac{C_1C_2}{\Delta}\right)^4;
$$

3° pour $\alpha>4$

$$
\begin{aligned}
\int_a^b|s_N|^\alpha\,dx &\geqslant\frac{\alpha G\Delta N^2}{\alpha-4}\left\{N^{\alpha-4}\left(\frac{\Delta}{C_2}\right)^{\alpha-4}-C_1^{\alpha-4}N^{\alpha/2-2}\right\}\\
&\geqslant\frac{\alpha G\Delta N^2}{2(\alpha-4)}N^{\alpha-4}\left(\frac{\Delta}{C_2}\right)^{\alpha-4}=G_\alpha\Delta^{\alpha-3}N^{\alpha-2},
\end{aligned}
$$

à condition que

$$
N^{\alpha-4}\left(\frac{\Delta}{C_2}\right)^{\alpha-4}\geqslant2C_1^{\alpha-4}N^{\alpha/2-2}, \text{ c.-à-d. } N^{\alpha/2-2}\geqslant2\left(\frac{C_1C_2}{\Delta}\right)^{\alpha-4}.
$$

Les inégalités (57) sont ainsi démontrées. Il en résulte que les formules (56) sont vraies pour $N\geqslant N_0(\alpha)$, $N_0(\alpha)$ ne dépendant que de α. En augmentant au besoin F_α et en diminuant G_α, on peut les rendre vraies pour $N=1,2,3,\ldots..$

9. Théorème III. *$\varphi(t)$ $(t>0)$ étant une fonction positive, croissante et telle que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\varphi^{-4}(k)$ est convergente, on a presque partout*

$$s_n^\lambda(x)=O(n^{1/2}\varphi(\log n))\text{ [14]}\qquad(\lambda=2,3,4).$$

Démonstration. Désignons

$$P_N=\mathop{\mathcal{E}}_x\left\{\max_{N\le\nu<3N}\frac{|s_\nu^\lambda(x)|}{\nu^{1/2}\varphi(\log\nu)}\geqslant 1\right\}.$$

Cet ensemble est contenu dans

$$Q_N=\mathop{\mathcal{E}}_x\left\{\max_{\nu\le 3N}|s_\nu^\lambda(x)|\geqslant\varphi(\log N).N^{1/2}\right\},$$

donc

$$|P_N|\leqslant|Q_N|\leqslant\frac{9F}{\varphi^4(\log N)},$$

d'après le théorème I $(A=3^{-1/2}\varphi(\log N))$. En particulier, pour $N=3^k$ $(k=1,2,3,\ldots.)$, on obtient

$$|P_{3^k}|\leqslant\frac{9F}{\varphi^4(k\log 3)}\leqslant\frac{9F}{\varphi^4(k)}.$$

La série $\Sigma|P_{3^k}|$ étant convergente, l'ensemble

$$\Pi=\limsup_{k\to\infty}P_{3^k}$$

est de mesure nulle. Si $x\in C\Pi$ (c.-à-d. si x n'appartient pas à Π), on a

$$x\in CP_{3^k}\ \text{ pour }\ k\geqslant k_0$$

et

$$|s_\nu^\lambda(x)|\leqslant\nu^{1/2}\varphi(\log\nu)\ \text{ pour }\ \nu\geqslant 3^{k_0},$$

donc

$$|s_\nu^\lambda(x)|=O(\nu^{1/2}\varphi(\log\nu)),$$

c. q. f. d.

[14]) Ce théorème n'est pas nouveau; les cas particuliers le plus intéressants

$$\varphi(t)=t^{1/4+\varepsilon},\quad\varphi(t)=t^{1/4}\log^{1/4+\varepsilon}t\ \text{ etc.}\qquad(\varepsilon>0)$$

ont été démontrés par M. A. Walfisz dans le Mémoire: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Dritte Abhandlung, Math. Zeitschr. 27 (1927) p. 245–268, Hilfssatz 2.

10. Théorème IV. *Si*

1° $a_n\geqslant a_{n+1}>0$ pour $n=1,2,3,\ldots.$ et

2° $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2<\infty$,

la série $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{n^2\pi ix}$ converge presque partout.

Démonstration. Posons

$$T_N(x)=\sum_{\nu=1}^{N}a_\nu e^{\nu^2\pi ix}.$$

D'après un théorème connu de M. A. Kolmogoroff [15]) la suite $T_{2^k}(x)$ converge presque partout. Il suffit donc de prouver que les fonctions

$$\Psi_k(x)=\max_{2^k\le j<2^{k+1}}\left|\sum_{\nu=2^k}^{j}a_\nu e^{\nu^2\pi ix}\right|\tag{64}$$

tendent presque partout vers zéro quand $k\to\infty$. A cet effet il suffit de démontrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k^2(x)$ converge presque partout. Ce fait est à son tour une conséquence de l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1\Psi_k^2(x)\,dx<\infty.\tag{65}$$

De la formule (64) on tire, en tenant compte de l'hypothèse 1° et de la formule (55),

$$\Psi_k(x)\leqslant a_{2^k}.\max_{2^k\le j<2^{k+1}}\left|\sum_{\nu=2^k}^{j}e^{\nu^2\pi ix}\right|\leqslant 2\,a_{2^k}.\max_{j\le 2^{k+1}}\left|s_j^3(x)\right|=2\,a_{2^k}\,\Phi_{2^{k+1}}(x),$$

et les inégalités (56) du № **8** donnent (pour $\alpha=2$)

$$\int_0^1\Psi_k^2(x)\,dx\leqslant 4\,a_{2^k}^2.F_2.2^{k+1}=8F_2.2^k a_{2^k}^2.\tag{66}$$

D'autre part

$$\sum_{k=1}^{\infty}2^k a_{2^k}^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}2\left(\sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k}a_\nu^2\right)=2\sum_{n=2}^{\infty}a_n^2<\infty,\tag{67}$$

[15]) A. Kolmogoroff, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, Fund. Math. 5 (1924) p. 96–97.

en vertu des hypothèses 1° et 2°. Les relations (66) et (67) entraînent (65) et le théorème est démontré.

Remarque. Dans les mêmes conditions, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n e^{n^2\pi i x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{n^2\pi i(x+1)}$$

converge aussi presque partout.

Théorème V. *Si*

$$1^\circ \quad a_n \geqslant a_{n+1} > 0, \qquad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}} < \infty,$$

la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{n^2\pi i x} \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{68}$$

appartient à la classe L^α *quel que soit* $\alpha < 4$ [16]*)*.

Démonstration. Les deux hypothèses 1° et 2° entraînent $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, parce que

$$\left\{\sum_{\nu=2^k}^{2^{k+1}-1} a_\nu^2\right\}^{1/2} \leqslant 2^{k/2} a_{2^k} \leqslant 2\sum_{\nu=2^{k-1}+1}^{2^k}\frac{a_\nu}{\sqrt{\nu}},$$

la série (68) converge donc presque partout et $f \in L^2$.

On a

$$T_N(x) = \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu e^{\nu^2\pi i x} = \sum_{\nu=1}^{N-1} s_\nu^3(x)\,(a_\nu - a_{\nu+1}) + a_N s_N^3(x). \tag{69}$$

L'inégalité bien connue de Minkowski donne pour $\alpha > 1$

$$\left\{\int_0^1 |T_N|^\alpha dx\right\}^{1/\alpha} \leqslant \sum_{\nu=1}^{N-1}(a_\nu - a_{\nu+1})\left\{\int_0^1 |s_\nu^3|^\alpha dx\right\}^{1/\alpha} + a_N\left\{\int_0^1 |s_N^3|^\alpha dx\right\}^{1/\alpha}.$$

En tenant compte des inégalités $(56)_1$ on conclut que

$$\left\{\int_0^1 |T_N|^\alpha dx\right\}^{1/\alpha} \leqslant \sum_{\nu=1}^{N-1}(a_\nu - a_{\nu+1}) F_\alpha^{1/\alpha}\nu^{1/2} + a_N F_\alpha^{1/\alpha} N^{1/2}$$

$$= F_\alpha^{1/\alpha}\sum_{\nu=1}^{N} a_\nu(\sqrt{\nu} - \sqrt{\nu-1}) \leqslant F_\alpha^{1/\alpha}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{a_\nu}{\sqrt{\nu}},$$

[16]) C.-à-d. $\int_0^1 |f(x)|^\alpha dx < \infty$ pour $0 < \alpha < 4$.

donc

$$\int_0^1 |T_N|^\alpha dx = O(1) \text{ pour } N \to \infty \qquad (\alpha < 4). \tag{70}$$

Comme $\lim_{N\to\infty} T_N(x) = f(x)$ presque partout, un lemme connu de Fatou donne

$$\int_0^1 |f|^\alpha dx < \infty \text{ pour } \alpha < 4,$$

c. q. f. d.

D'une manière analogue on démontre le

Théorème VI. *Si*

$$1^\circ \quad a_n \geqslant a_{n+1} > 0 \quad et \quad 2^\circ \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n \log^{1/4} n}{\sqrt{n}} < \infty,$$

la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{n^2\pi i x}$$

appartient à la classe L^4.

(Reçu par la Rédaction le 5. 10. 1936).