Eine Bemerkung über die Räume vom Typus (F)

von

M. EIDELHEIT und S. MAZUR (Lwów).

In dieser Note zeigen wir vorerst [1]):

1. *In jedem Raume E vom Typus (F) kann man eine mit der ursprünglichen Metrik (x, y) äquivalente Metrik $(x, y)^*$ einführen, so daß stets $(x, y)^* = (x - y, 0)^*$ gilt und daß $(tx, 0)^*$ für $x \neq 0$ als Funktion der reellen Veränderlichen $t \geqslant 0$ monoton wachsend ist.*

Mit Benutzung dieser Bemerkung ergibt sich alsdann leicht der folgende von Herrn S. BANACH ohne Beweis angegebene Satz [2]):

2. *Damit ein Raum E vom Typus (F) endlichdimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in ihm eine offene kompakte Menge gebe.*

Zum Beweis von **1** setzen wir

$$(x, y)_w = \sup_{0 \leqq s \leqq w} (sx, sy) \tag{1}$$

für $x, y \in E$ und rationale $w > 0$. Bei festem w bildet ersichtlich $(x, y)_w$ eine mit (x, y) äquivalente [3]) Metrik in E; ferner ist $(x, y)_w = (x - y, 0)_w$ und

$$(t_1 x, 0)_w \leqslant (t_2 x, 0)_w \text{ für } 0 \leqslant t_1 < t_2. \tag{2}$$

---

[1]) Wegen der hier benutzten Terminologie vgl.: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.

[2]) L. c. [1]), p. 236; für den Fall der Räume vom Typus (B) wurde dieser Satz von Herrn F. Riesz bewiesen: F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, Acta math. 41 (1918) p. 71—98.

[3]) Hier, wie auch im Folgenden, wird die Tatsache benutzt, daß die Multiplikation der Zahlen mit Elementen stetig ist; vgl.: S. Mazur und W. Orlicz, Über Folgen linearer Operationen, Studia Math. 4 (1933) p. 152—157.

Wir ordnen nun alle positiven rationalen Zahlen w in eine Folge $\{w_n\}$ und setzen

$$(x, y)^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{(x, y)_{w_n}}{1 + (x, y)_{w_n}}$$

für $x, y \in E$; da $(x, y)_{w_n}$ eine mit (x, y) äquivalente Metrik in E bildet, so gilt dasselbe bekanntlich auch für $(x, y)^*$. Außerdem ist $(x, y)^* = (x - y, 0)^*$ und mit Rücksicht auf (2)

$$(3) \qquad (t_1 x, 0)^* \leqslant (t_2 x, 0)^* \text{ für } 0 \leqslant t_1 < t_2.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß in (3) die Gleichheit nur für $x = 0$ stattfindet; wir können uns dabei offenbar auf rationale t_1, t_2 beschränken. Aus $(t_1 x, 0)^* = (t_2 x, 0)^*$ ergibt sich, indem man wieder (2) anwendet, $(t_1 x, 0)_{w_n} = (t_2 x, 0)_{w_n}$, d. h. $(t_1 x, 0)_w = (t_2 x, 0)_w$ für rationale $w > 0$; setzen wir hier der Reihe nach $w = 1, t_1^1 t_2^{-1}, \ldots, t_1^n t_2^{-n}, \ldots$, so kommt sofort wegen (1)

$$\sup_{0 \leqq s \leqq t_2} (s x, 0) = \sup_{0 \leqq s \leqq t_1^n t_2^{-n+1}} (s x, 0) ;$$

daraus folgt aber $\sup\limits_{0 \leqq s \leqq t_2} (s x, 0) = 0$, da $t_1^n t_2^{-n+1} \to 0$, und mithin auch $x = 0$, wie behauptet.

Wir kommen nun zu dem Beweis von **2**. Die Notwendigkeit kann in derselben Weise, wie im speziellen Falle der Räume vom Typus (B) gefolgert werden; bilden die Elemente $e_1, e_2, \ldots, e_m$ eine Basis in E und ordnen wir jedem $x = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \ldots + t_m e_m$ mit reellen t_k das m-tupel $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ zu, so ist dadurch eine isomorphe Abbildung von E auf den m-dimensionalen euklidischen Raum gegeben. Um die Hinlänglichkeit zu erkennen, beachten wir, daß es nach **1** keine Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, wenn wir voraussetzen, daß $(tx, 0)$ für $x \neq 0$ als Funktion der reellen Veränderlichen $t \geqslant 0$ monoton wachsend ist. Bei passendem $r > 0$ ist die Menge aller $x \in E$ mit $(x, 0) < 3r$ kompakt; bezeichnen wir nun mit K die Kugel $(x, 0) \leqslant r$, so gilt der Hilfssatz: *Ist A eine lineare, abgeschlossene und echte Teilmenge von E, so gibt es ein $x_0 \in K$ mit $(x_0, a) \geqslant r$ für $a \in A$.* Zum Beweise setzen wir $(x, A) = \inf\limits_{x \in A} (x, a)$ für $x \in E$, $\varrho = \sup\limits_{x \in K} (x, A)$. Ist $x_n \in K$, $(x_n, A) \to \varrho$ und die Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ gegen $x_0 \in E$ konvergent, so ist $x_0 \in K$ und $(x_0, A) = \varrho$, da einerseits trivialerweise $(x_0, A) \leqslant \varrho$, andererseits wegen $(x_{n_k}, a) \geqslant (x_{n_k}, A)$ auch $(x_0, a) \geqslant \varrho$ für $a \in A$, d. h. $(x_0, A) \geqslant \varrho$ gilt; weil außerdem $(x_0, A) \leqslant (x_0, 0)$ und folglich $\varrho \leqslant r$ gilt, so kommt es nur darauf an, die Ungleichung $\varrho < r$ auszuschließen. Wir bemerken zunächst, daß es für jedes $\bar{x} \in K$ ein $\bar{a} \in A$ mit $(\bar{x}, \bar{a}) = (\bar{x}, A)$ gibt; denn ist $a_n \in A$, $(\bar{x}, a_n) \to (\bar{x}, A)$, so gilt sicherlich $(a_n, 0) < 3r$ für alle hinreichend großen Indizes n, in Anbetracht dessen, daß $(a^n, 0) \leqslant (\bar{x}, a_n) + (\bar{x}, 0)$; ist die Teilfolge $\{a_{n_k}\}$ gegen $\bar{a} \in E$ konvergent, so leistet $\bar{a}$ das Verlangte. Insbesondere also gibt es ein $a_0 \in A$ mit $(x_0, a_0) = \varrho$; wäre $\varrho < r$, so wäre noch $x_1 = s(x_0 - a_0) \in K$ bei passendem $s > 1$ und es gäbe wieder ein $a_1 \in A$ mit $(x_1, a_1) = (x_1, A)$; da offenbar $\varrho > 0$ und mithin $x_0 - a_0 - \frac{1}{s} a_1 \neq 0$, so erhielte man dann

$$(x_1, a_1) = (s(x_0 - a_0 - \frac{1}{s} a_1), 0) > (x_0 - a_0 - \frac{1}{s} a_1, 0)$$

$$= (x_0, a_0 + \frac{1}{s} a_1) \geqslant (x_0, A), \text{ d. h. } (x_1, A) > \varrho,$$

was gegen die Definition von ϱ verstößt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen und von hier aus kann man schon ähnlich wie im Falle der Räume vom Typus (B) vorgehen. Angenommen, der Raum E sei unendlichdimensional. Wir erklären mittels Induktion die Elemente $e_n \in E$ folgenderweise: 1° Sei $e_1 \in K$; 2° sind $e_1, e_2, \ldots, e_m$ bereits erklärt, so bilden alle Elemente $a = t_1 e_1 + t_2 e_2 + \ldots + t_m e_m$ mit reellen t_k eine lineare, abgeschlossene (sogar mit einem euklidischen Raume isomorphe) und echte Teilmenge A von E; es gibt also ein $e_{m+1} \in K$ mit $(e_{m+1}, a) \geqslant r$ für $a \in A$. Wegen $(e_p, e_q) \geqslant r$ für $p \neq q$ enthält die Folge $\{e_n\}$ keine konvergente Teilfolge und dies steht mit $e_n \in K$ im Widerspruch.

(Reçu par la Rédaction le 2. 12. 1937).