Eine Eigenschaft abstrakter Mengen

von

J. SCHREIER (Drohobycz).

Das Ziel dieser Note ist eine Eigenschaft unendlicher Mengen anzugeben, die von Herrn S. BANACH als Vermutung ausgesprochen wurde.

Es sei E eine beliebige, unendliche Menge. Eine Teilmenge E_1 von E nennt man *Hälfte* von E, wenn die Mächtigkeiten der Mengen E, E_1, $E-E_1$, gleich sind.

Satz. *Ist eine Menge E gegeben, so kann man jeder Hälfte A von E eine Untermenge $\varphi(A) \subset A$ zuschreiben, so daß $\varphi(A)$ immer Hälfte von A ist und so daß für jede Folge von Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots,$ die die Bedingung $E_{n+1} \subset \varphi(E_n) \subset E$ erfüllt, die Relation*

$$E_1 . \varphi(E_1) . E_2 . \varphi(E_2) \ldots = 0$$

besteht.

Beweis. Die Menge E sei zunächst unabzählbar. Sie sei in der Wohlordnung als transfinite Folge

$$\{e_\xi\} \qquad (\xi < \alpha) \tag{1}$$

gegeben. Ist A eine beliebige Teilmenge von E, so kann A als Teilfolge von (1)

$$\{e_{\eta(\xi)}\} \qquad (\xi < \beta \leqslant \alpha)$$

angesehen werden. Dabei ist $\eta(\xi)$ wachsend (d. h. $\eta(\xi') > \eta(\xi)$ für $\xi' > \xi$) und $\eta(\xi) \geqslant \xi$ für alle ξ.

Wir erklären die Menge $\varphi(A)$ als die Menge derjenigen $e_{\eta(\xi)}$, für die ξ keine Grenzzahl ist (d. h. die Ordinalzahl $\xi - 1$ existiert). Es sei nun, entgegen unserer Behauptung, die Menge

$$E_1 . \varphi(E_1) . E_2 . \varphi(E_2) \ldots = H(E_1, E_2 \ldots)$$

für eine Folge $E_1, E_2, E_3, \ldots$, die die Bedingungen des Satzes erfüllt, nicht leer und e_ν sei das erste Element dieser Menge: $e_{\nu'}$ *non* $\in H$, wenn $\nu' < \nu$ ist und $e_\nu \in H$. Es sei $E_n = \{e_{\eta^{(n)}(\xi)}\}$. Das Element e_ν ist laut Voraussetzung kein Grenzelement in der Menge E_n. Es gibt daher ein ξ_n, so daß das Element $e_{\eta^{(n)}(\xi_n)}$ dem Element e_ν in der Menge E_n unmittelbar vorangeht: $\nu = \eta^{(n)}(\xi_n + 1)$. Setzen wir zur Abkürzung $\eta^{(n)}(\xi_n) = \mu(n)$. Da E_{n+1} Teilmenge von E_n ist, folgt $\mu(n+1) \leqslant \mu(n) < \nu$. Da eine unendliche monoton abnehmende Folge von Ordinalzahlen nicht möglich ist, so haben wir $\mu(n) = \mu(N)$ für $n > N$, für ein gewisses N. Da laut Definition $e_{\mu(n)} \in E_n$ ist, erhalten wir $e_{\mu(N)} \in E_n$ für alle n und daher $e_{\mu(n)} \in H$, was wegen $\mu(n) < \nu$ einen Widerspruch ergibt.

Ist E eine abzählbare Folge $\{e_n\}$ und $A = \{e_{k_n}\}$ eine Teilfolge von E, so setze man $\varphi(A) = \{e_{k_{2n+1}}\}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Der Beweis des Satzes ergibt sich dann fast unmittelbar.

(Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1937).