Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen (II)

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

In Verallgemeinerung einer früheren Arbeit[1]) werden hier Bedingungen angegeben, damit ein System von Gleichungen

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\xi_k = \eta_i \qquad (i=1,2,\ldots)$$

für jede Folge $\{\eta_i\}$ auflösbar sei. Von der Folge $\{\xi_k\}$ setzen wir dabei nur das Nötigste voraus, d. h., daß die Reihen in (1) konvergieren.

1. Satz I[2]). *Damit die Gleichung* (1) *für jede Folge* $\{\eta_i\}$ *eine Lösung* $\{\xi_k\}$ *besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1° *die Zeilen der Matrix* (a_{ik}) *sind linear unabhängig;*

2° *für jedes positive ganze* p *gibt es ein positives ganzes* i_p, *so daß für* $i > i_p$ *und beliebige Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ $(\lambda_i \neq 0)$ *die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \ldots + \lambda_i a_{ik})\,\xi_k$ *von den Reihen*

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_{\nu k}\xi_k \qquad (\nu = 1,2,\ldots,p)$$

konvergenzunabhängig ist.

[1]) M. Eidelheit, Zur Theorie der Systeme linearer Gleichungen, Studia Math. 6 (1936) p. 139–147. Es wird im folgenden die Kenntnis dieser Arbeit vorausgesetzt.

[2]) In dem Fall, daß die Matrix (a_{ik}) zeilenfinit ist, bleibt nur, wie leicht einzusehen, die Bedingung 1° übrig. Vgl.: O. Toeplitz, Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, Rend. Palermo 28 (1908) p. 88–96.

Dabei heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k$ von den Reihen (2) *konvergenzabhängig*, falls Folgendes gilt:

a) *sind die Reihen* (2) *konvergent, so konvergiert auch* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k$;

b) *ist* $a_{\nu k} = 0$ *für* $\nu = 1,2,\ldots,p$, *so verschwindet auch* c_k.

Beweis. Wir dürfen offenbar annehmen, daß es in jeder Kolonne der Matrix (a_{ik}) ein von 0 verschiedenes Element gibt.

Betrachten wir nun die Menge E aller Folgen $\{\xi_k\}$, für welche die Reihen in (1) konvergieren. Bei den gewöhnlichen Definitionen der Verknüpfungen bildet E einen linearen Raum. Setzen wir noch für $x \in E$, $x = \{\xi_k\}$

$$(3) \qquad |x|_i = \sup_{m=1,2,\ldots} \Big|\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\xi_k\Big| \qquad (i=1,2,\ldots),$$

so wird E, wie leicht einzusehen, ein Raum vom Typus (B_0). In diesem Raum bildet die Folge $\{e_n\}$, $e_n = \{\xi_k^{(n)}\}$, $\xi_k^{(n)} = 0$ für $k \neq n$, $\xi_n^{(n)} = 1$ $(n=1,2,\ldots)$, eine Basis. Jedes lineare Funktional $f(x)$ ist daher von der Form

$$(4) \qquad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\xi_k.$$

Wir behaupten nun, daß die Ungleichung $n(f) \leqslant p$ mit der Konvergenzabhängigkeit der Reihe (4) von den Reihen (2) äquivalent ist.

Es sei nämlich

$$(5) \qquad |f(x)| \leqslant M\sum_{\nu=1}^{p}|x|_\nu,$$

wobei $M > 0$ von x unabhängig ist. Wir bezeichnen mit $\{\zeta_k\}$ eine beliebige Folge, welche für $\{\xi_k\}$ eingesetzt die Reihen (2) konvergent macht, und wählen N so, daß für $r > N$, $s > N$

$$(6) \qquad \Big|\sum_{k=r}^{s} a_{\nu k}\zeta_k\Big| < \varepsilon \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

gilt, wo ε eine gegebene positive Zahl ist. Es ist dann, für

$$x_0=\{\xi_k^{(0)}\},\quad \xi_k^{(0)}=\zeta_k \text{ für } r\leqslant k\leqslant s,\quad \text{sonst } \xi_k^{(0)}=0,$$

das Element x_0 in E enthalten, und nach (3), (4), (5)

$$\Big|\sum_{k=r}^{s} c_k\zeta_k\Big|\leqslant M\sum_{\nu=1}^{p}\max_{r\leq m\leq s}\Big|\sum_{k=r}^{m}a_{\nu k}\zeta_k\Big|,$$

also nach (6) $\big|\sum_{k=r}^{s} c_k\zeta_k\big|\leqslant Mp\varepsilon$, womit a) bewiesen ist.

Setzen wir jetzt in (5) der Reihe nach $x=e_k$ ein und berücksichtigen (3), so ergibt sich $|c_k|\leqslant M\sum_{\nu=1}^{p}|a_{\nu k}|\quad (k=1,2,\ldots)$, woraus b) folgt.

Nehmen wir nun an, daß die Bedingungen a), b) erfüllt sind. Es sei $\{k_j\}=\{k_j^{(p)}\}$ eine solche Teilfolge, daß für $k=k_j$ und nur für diese k nicht alle $a_{\nu k}$ $(\nu=1,2,\ldots,p)$ verschwinden. Wir betrachten dann den Raum E^* aller Folgen $\{\zeta_j\}$, für welche die Reihen

$$\sum_{j=1}^{\infty}a_{\nu k_j}\zeta_j \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

konvergieren. Setzen wir für $z\in E^*$, $z=\{\zeta_j\}$

$$|z|=\sum_{\nu=1}^{p}\sup_{m=1,2,\ldots}\Big|\sum_{j=1}^{m}a_{\nu k_j}\zeta_j\Big|, \tag{7}$$

so wird ersichtlich E^* ein Raum vom Typus (B). Da nach a), b), $\sum_{j=1}^{\infty}c_{k_j}\zeta_j$ konvergiert und da $\sum_{j=1}^{m}c_{k_j}\zeta_j$ $(m=1,2,\ldots)$ lineare Funktionale in E^* darstellen, so ist nach einem bekannten Satze auch $\sum_{j=1}^{\infty}c_{k_j}\zeta_j$ ein lineares Funktional in E^*. Es ist daher für ein gewisses $M>0$ und für jedes $z\in E^*$

$$\Big|\sum_{j=1}^{\infty}c_{k_j}\zeta_j\Big|\leqslant M|z|. \tag{8}$$

Ist nun $x\in E$, $x=\{\xi_k\}$, so hat man $\{\zeta_j\}=\{\xi_{k_j}\}\in E^*$ und nach a), b), (7) und (8)

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}c_k\xi_k\Big|=\Big|\sum_{j=1}^{\infty}c_{k_j}\xi_{k_j}\Big|\leqslant M\sum_{\nu=1}^{p}\sup_{m=1,2,\ldots}\Big|\sum_{j=1}^{m}a_{\nu k_j}\xi_{k_j}\Big|=M\sum_{\nu=1}^{p}|x|,$$

also gilt (5) und die Äquivalenz ist bewiesen. Nun sind $f_i(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k$ lineare Funktionale in E und der Satz folgt aus dem Satze 2 der unter [1]) zitierten Arbeit.

Die dortigen Bemerkungen 2 und 3 ergeben hier:

II. *Es sei das System (1) für jede Folge $\{\eta_i\}$ auflösbar. Es gibt dann für jedes positive ganze p ein positives ganzes i_p, so daß aus $i>i_p$, $a_{ik}=0$ $(k\neq k_j^{(p)},\ j=1,2,\ldots)$ die Existenz einer Folge $\{\xi_k\}$ resultiert, für welche die Reihen (2) konvergieren und $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}\xi_k$ divergiert.*

III. *Gibt es für jedes positive ganze i eine Folge $\{\xi_k\}$, so daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}a_{\nu k}\xi_k$ für $\nu=1,2,\ldots,i$ konvergiert und für $\nu=i+1$ divergiert, so hat das System (1) für jede Folge $\{\eta_i\}$ eine Lösung* [3]).

2. Wir wollen nun gewisse Relationen für die Folge $\{c_k\}$ ableiten, welche mit den Bedingungen a), b) äquivalent sind.

Aus (5) folgt zunächst für $K=pM$

$$\Big|\sum_{k=1}^{\infty}c_k\xi_k\Big|\leqslant K\max_{\nu=1,2,\ldots,p}\ \sup_{m=1,2,\ldots}\Big|\sum_{k=1}^{m}a_{\nu k}\xi_k\Big|,$$

sobald die Reihen (2) konvergieren. Folglich hat man, wenn $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ beliebige Zahlen sind,

$$\Big|\sum_{k=1}^{n}c_k\xi_k\Big|\leqslant K\max_{\substack{\nu=1,2,\ldots,p\\ m=1,2,\ldots,n}}\Big|\sum_{k=1}^{m}a_{\nu k}\xi_k\Big|. \tag{9}$$

Wir betrachten nun die Menge Z der Punkte $(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ des n-dimensionalen euklidischen Raumes, für welche es Zahlen $\beta_{\nu m}$ $(\nu=1,2,\ldots,p;\ m=1,2,\ldots,n)$ gibt, so daß

---

[3]) In gleicher Formulierung lassen sich auch der Satz 3 und die Bemerkungen 4, 5 der unter [1]) zitierten Arbeit aussprechen (die Bemerkung 5 wird verschärft); es ist nur überall in den Sätzen I, II, III „konvergent" durch „absolut konvergent" zu ersetzen. Wir benutzen noch diese Gelegenheit, um auf ein Versehen in der dortigen Bemerkung 4 aufmerksam zu machen. Es soll dort nämlich

$$\inf_{k=1,2,\ldots}\frac{|a_{1k}|+|a_{2k}|+\ldots+|a_{pk}|}{|a_{ik}|}\ \text{statt}\ \lim_{k\to\infty}\frac{|a_{1k}|+|a_{2k}|+\ldots+|a_{pk}|}{|a_{ik}|}$$

stehen.

$$\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{m=1}^{n}|\beta_{\nu m}|\leqslant 1 \text{ und } \sum_{k=1}^{n} t_k \xi_k = \sum_{\nu=1}^{p}\sum_{m=1}^{n}\beta_{\nu m}(a_{\nu 1}\xi_1+\ldots+a_{\nu m}\xi_m)$$

ist. Wir behaupten, daß der Punkt $(c_1/K, c_2/K, \ldots, c_n/K)$ zu Z gehört. Andernfalls gäbe es, da Z ein konvexer Körper mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt ist, eine Ebene $\xi_1 t_1+\xi_2 t_2+\ldots+\xi_n t_n=1$, die den Punkt $(c_1/K, c_2/K, \ldots, c_n/K)$ von Z trennt. Es wäre dann

$$\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k > 1 \text{ und } \Big|\sum_{k=1}^{n} t_k \xi_k\Big| < 1 \text{ für } (t_1, t_2, \ldots, t_n)\in Z,$$

also insbesondere $\big|\sum_{k=1}^{m} a_{\nu k}\xi_k\big| < 1 \quad (m=1,2,\ldots,n;\ \nu=1,2,\ldots,p).$

Das widerspricht aber der Ungleichung (9). Wir haben also das folgende Resultat:

Wenn a) *und* b) *erfüllt ist, so gibt es für jedes n Zahlen* $\gamma_{\nu m}^{(n)}$ $(\nu=1,2,\ldots,p;\ \ m=1,2,\ldots,n)$, *so daß*

$$\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{m=1}^{n}|\gamma_{\nu m}^{(n)}| < K$$

und

$$c_k=\sum_{\nu=1}^{p} a_{\nu k}(\gamma_{\nu k}^{(n)}+\gamma_{\nu, k+1}^{(n)}+\ldots+\gamma_{\nu n}^{(n)}) \quad (k=1,2,\ldots,n)$$

gilt, wobei $K>0$ *von n unabhängig ist.*

Umgekehrt folgt aus diesen Relationen sofort (9) für beliebiges n und daraus ergeben sich, wie wir früher gesehen haben, die Bedingungen a) und b).

(Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1937).