

**Sur un problème de M. ULAM
concernant l'équilibre des corps flottants¹⁾**

par

H. AUERBACH (Lwów).

Considérons un solide homogène flottant dans l'eau. Pour que ce corps soit en équilibre dans une certaine position, il faut et il suffit que le volume de la partie immergée soit conforme à la loi d'Archimède et que la droite joignant le centre de gravité de cette partie et celui du corps entier soit perpendiculaire à la surface de l'eau²⁾. Dans le cas d'une sphère, toute position satisfaisant à la première condition est une position d'équilibre. Or, Monsieur S. ULAM a posé la question, s'il existe des corps homogènes non sphériques jouissant de cette propriété pour une valeur particulière de la densité³⁾.

Il résulte aisément des théorèmes classiques de BOUGUER et DUPIN que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un corps soit une solution de ce problème est que la surface des centres de carène soit une sphère. De plus, on peut affirmer que dans ce cas l'ellipse centrale d'inertie de la flottaison est un cercle dont le rayon est le même pour toute position d'équilibre.

Dans le Mémoire présent nous étudions un problème plus simple, également posé par M. ULAM, que voici :

Quelle doit être la directrice d'un cylindre droit homogène flottant dans l'eau, afin que celui-ci soit en équilibre dans toute position horizontale compatible avec la loi d'Archimède?

¹⁾ Communiqué à la Société Polonaise de Mathématique, section de Lwów, à la séance du 10 décembre 1934.

²⁾ Pour tout ce qui regarde la théorie des corps flottants voir P. Appel, *Traité de Mécanique Rationnelle*, t. 3, Chap. 31, section 4.

³⁾ Il est aisé de voir qu'un corps homogène jouissant de cette propriété pour toute valeur de la densité est nécessairement sphérique.

Les courbes cherchées peuvent être caractérisées de la manière suivante. Considérons une corde variable détachant une aire déterminée de la courbe; il faut et il suffit que la courbe décrite par le centre de gravité de cette aire soit un cercle. Cette condition est générale; cependant, si l'on veut arriver à des résultats simples, il paraît nécessaire de supposer que la courbe soit convexe ou, du moins, que tout point intérieur de la corde considérée soit situé à l'intérieur de la courbe; dans le second cas il faudrait encore faire certaines hypothèses de régularité. Il s'ensuit alors que la corde est de longueur constante et divise le périmètre en deux arcs de longueur constante.

La réciproque étant aussi vraie, notre problème se ramène au problème géométrique suivant: déterminer les courbes pour lesquelles à toute corde d'une certaine longueur appartient un arc de longueur constante.

Il est clair que le cercle est une solution de ce problème. Nous ne savons pas s'il existe pour toute valeur de la densité d'autres courbes de cette espèce. Mais, dans le cas particulier où la densité du flotteur est supposée égale à $1/2$, c'est-à-dire lorsque la corde de longueur donnée doit diviser à la fois l'aire et le périmètre en deux parties égales, le problème comporte une infinité de solutions. Ces courbes sont étroitement liées aux courbes orbiformes. En effet, les courbes orbiformes peuvent être regardées comme courbes parallèles de certaines courbes doubles⁴⁾, tandis que les courbes en question sont des courbes équitangentes de ces courbes doubles.

Après avoir obtenu la plupart des résultats exposés dans le Mémoire présent, nous avons remarqué que la première découverte de ces courbes est due à M. ZINDLER. Dans un intéressant Mémoire sur la théorie des corps convexes⁵⁾ ce géomètre a, entre autres, démontré l'existence et donné quelques exemples des courbes qui, sans posséder de centre, jouissent de cette propriété que toute corde divisant l'aire en deux parties égales divise le péri-

⁴⁾ A. Hurwitz, Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier, Ann. Éc. Norm. (3) 19 (1902) p. 357-408 (= Mathem. Werke, t. 1, p. 509-554); n° 4.

⁵⁾ K. Zindler, Über konvexe Gebilde II, Monatsh. Math. Phys. 31 (1921) p. 25-57; p. 44-45 et 51-53.

mètre en deux arcs de même longueur. M. ZINDLER démontre, sous certaines hypothèses de régularité, que la corde bissectrice est de longueur constante. Ces courbes satisfont donc aux conditions d'équilibre indifférent. C'est pourquoi nous nous avons permis de désigner les courbes d'équilibre indifférent pour la densité $1/2$ (γ compris les cercles) comme *courbes de Zindler* ou courbes (Z).

Nous devons aussi signaler un intéressant travail de M. SALKOWSKI⁶⁾. En généralisant certains théorèmes de M. HIRAKAWA⁷⁾ ce géomètre a été, lui aussi, conduit à considérer des courbes telles qu'à toute corde d'une longueur déterminée appartient un arc de longueur constante. Notamment, il démontre que, si pour une courbe convexe de cette espèce l'arc constant égale un tiers ou un quart du périmètre, la courbe est nécessairement un cercle. Avant de connaître le Mémoire de M. SALKOWSKI nous l'avons aussi remarqué, toutefois sans pouvoir démontrer son dernier théorème d'après lequel, si l'arc constant est un n -ième du périmètre ($n > 2$), la courbe est un cercle. Malheureusement, nous ne sommes pas parvenus à comprendre la démonstration qu'en donne M. SALKOWSKI.

Dans ce qui va suivre nous nous bornerons, à une seule exception près, à la considération des courbes convexes. Nous ne faisons aucune hypothèse quant à la régularité de ces courbes; au contraire, nous démontrerons par exemple qu'une courbe convexe d'équilibre indifférent admet en tout point une tangente. C'est pour cela que certains raisonnements sont un peu longs. En supposant l'existence et continuité de certaines dérivées il serait aisé d'étendre les résultats aux courbes non convexes et de simplifier les démonstrations.

Après avoir établi quelques propriétés générales des courbes convexes, nous étudions les courbes convexes d'équilibre indifférent dans le cas d'une densité quelconque. Les résultats obtenus nous permettent ensuite de caractériser les courbes convexes de Zindler au moyen de quatre conditions. Ces conditions présentent une analogie remarquable avec celles établies par M. RADON

⁶⁾ E. Salkowski, Eine kennzeichnende Eigenschaft des Kreises, Sb. d. Heidelberger Akad. d. Wissensch., Math.-nat. Klasse (1934) p. 57-62.

⁷⁾ J. Hirakawa, On a characteristic property of the circle, Tôh. Math. Journ. 37 (1933) p. 175-178.

pour les courbes à diamètres conjuguées dont la découverte est due à ce géomètre⁸⁾. Nous établissons ensuite des développements en séries de Fourier fournissant une représentation paramétrique de la courbe convexe (Z) la plus générale. Enfin, nous construisons deux exemples de ces courbes dont le premier s'obtient en arrondissant les sommets d'un triangle équilatéral et le second est une courbe non convexe en forme de coeur.

En terminant cette introduction remarquons que plusieurs propositions établies dans ce Mémoire ne sont pas nouvelles, du moins pour des courbes remplissantes certaines conditions de régularité. Cependant, au lieu de renvoyer le lecteur à d'autres travaux, nous avons préféré donner toutes les démonstrations, de manière que la lecture n'exige pas de connaissance spéciale de la théorie des courbes convexes.

Il nous est un devoir agréable de remercier Monsieur E. OTTO qui a eu l'extrême obligeance de tracer les figures.

§ 1.

Nous démontrerons d'abord un lemme qui nous sera utile dans la suite:

Soient A, B deux points d'une courbe convexe C . Lorsque le point B tend vers A , le rapport de l'arc \widehat{AB} à la corde \overline{AB} tend vers l'unité⁹⁾.

Supposons par exemple que le sens AB soit positif. Prenons à l'intérieur de C un point fixe O . Soit B' le point d'intersection de la demi-droite OB avec la demi-tangente positive AT . On a, en vertu de la convexité,

$$\overline{AB} < \widehat{AB} < \overline{AB'} + \overline{B'B},$$

donc

$$1 < \frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}} < \frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{B'B}}{\overline{AB}}.$$

⁸⁾ J. Radon, Über eine besondere Art ebener konvexer Kurven, Leipz. Ber. 68 (1916) p. 123-128.

⁹⁾ M. S. Gol'ab m'a bien voulu communiquer que ce lemme n'est pas nouveau.

Or

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \widehat{B'BA}}{\sin \widehat{OB'A}} \rightarrow 1 \text{ et } \frac{\overline{B'B}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \widehat{BAB'}}{\sin \widehat{OB'A}} \rightarrow 0,$$

puisque $\widehat{B'BA} \rightarrow \widehat{OAT}$, $\widehat{OB'A} \rightarrow \pi - \widehat{OAT}$, l'angle \widehat{OAT} étant compris entre 0 et π , et l'angle $\widehat{BAB'}$ tend vers zéro. Par conséquent $\frac{\widehat{AB}}{\overline{AB}} \rightarrow 1$.

Supposons que l'on ait choisi comme paramètre la longueur d'arc comptée dans le sens positif. Soient $s, s+h$ les valeurs d'arc correspondant aux points A, B . Alors on a

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{x(s+h) - x(s)}{\overline{AB}} = \cos \varphi, \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{y(s+h) - y(s)}{\overline{AB}} = \sin \varphi,$$

où φ désigne l'angle de la demi-tangente positive avec l'axe x . Par ce qui précède, on peut remplacer dans ces relations \overline{AB} par h . Par conséquent, chacune des fonctions $x(s), y(s)$ admet pour toute valeur de s une dérivée à droite et, de même, une dérivée à gauche. Ces dérivées ne diffèrent qu'aux points angulaires de la courbe dont l'ensemble est au plus dénombrable. Si la courbe ne possède pas de points angulaires, les dérivées

$$\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$

existent pour toute valeur de s et sont continues, à cause de la convexité; de plus, l'angle φ étant une fonction non décroissante de s , la dérivée $\frac{d\varphi}{ds}$, c'est-à-dire la courbure, existe pour presque tout s .

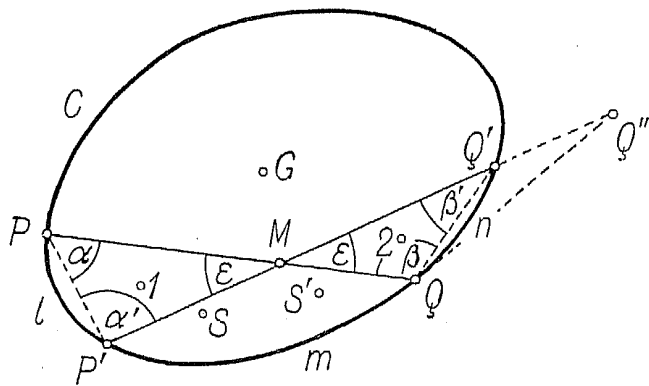
§ 2.

Soit C une courbe convexe. Désignons par PQ une corde de cette courbe détachant une aire déterminée. Lorsqu'une corde variable $P'Q'$, détachant la même aire, tend vers PQ , le point d'intersection M de ces deux cordes tend sur chacune d'elles vers le milieu. En effet, si l'on écrit que les aires PMP' et QMQ'

sont égales, en se servant de l'intégrale $\frac{1}{2} \int r^2 d\varphi$, on voit sans peine qu'il existe une corde intermédiaire passant par M telle que ce point est son milieu. Les deux segments de cette corde diffèrent infiniment peu des segments correspondants de PQ et $P'Q'$ et tendent vers $\overline{PQ}/2$.

Réciproquement, supposons qu'une corde, faisant avec l'axe x l'angle u , varie d'une façon continue avec u de manière que le point d'intersection des cordes (u) , $(u + \varepsilon)$ tende vers le milieu de la corde (u) pour $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors l'aire détachée par la corde variable est une fonction continue de l'angle u et on vérifie à l'aide de la même formule que la dérivée de cette fonction existe et est toujours nulle. L'aire détachée est donc constante.

Désignons par PQ une corde déterminée et par $P'Q'$ une corde voisine détachant la même aire.



Soient

- $S(\xi, \eta)$ le centre de gravité de l'aire $PlmQ$
- $S'(\xi', \eta')$ " " " " " " $P'mnQ'$
- $1(\xi_1, \eta_1)$ " " " " " " $PlP'M$
- $2(\xi_2, \eta_2)$ " " " " " " $MQnQ'$

Désignons encore par A l'aire $PlmQ = P'mnQ'$ et par a l'aire $PlP'M = MQnQ'$.

On peut calculer les coordonnées du centre de gravité de l'aire $PlmnQ'MP$ en considérant cette aire comme composée, soit de $PlmQ$ et $MQnQ'$, soit de $P'mnQ'$ et $PlP'M$. On a donc

$$\frac{A\xi + a\xi_2}{A+a} = \frac{A\xi' + a\xi_1}{A+a},$$

$$\frac{A\eta + a\eta_2}{A+a} = \frac{A\eta' + a\eta_1}{A+a},$$

$$A(\xi' - \xi) = a(\xi_2 - \xi_1),$$

$$A(\eta' - \eta) = a(\eta_2 - \eta_1),$$

$$\frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\xi_2 - \xi_1},$$

ce qui montre que les droites SS' et 12 sont parallèles.

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ le point 2 tend vers une position limite. En effet, il est le centre de gravité de l'aire $MQnQ'$ qui se compose du triangle MQQ' et du segment QnQ' . Soient p, q les aires et $(\xi'_2, \eta'_2), (\xi''_2, \eta''_2)$ les centres de gravité de ces deux figures. Alors

$$\xi_2 = \frac{\xi'_2 + \frac{q}{p} \xi''_2}{1 + \frac{q}{p}}, \quad \eta_2 = \frac{\eta'_2 + \frac{q}{p} \eta''_2}{1 + \frac{q}{p}}.$$

Le quotient $\frac{q}{p}$ tend vers zéro avec l'angle ε , car q ne surpasse pas l'aire du triangle $QQ'Q''$ dont le côté QQ' est commun avec le triangle MQQ' , tandis que l'hauteur correspondante tend vers zéro (QQ'' est la demi-tangente positive en Q). Il suffit donc de trouver la position limite du point (ξ'_2, η'_2) . Or, en se servant des formules pour les coordonnées du centre de gravité d'un triangle, on démontre sans peine que cette position existe et que c'est le point situé sur PQ à distance $\overline{PQ}/6$ de Q . Le point 1 tend de même vers le point situé sur PQ à distance $\overline{PQ}/6$ de P . Par conséquent, la droite 12 tend vers la position limite PQ , donc la droite SS' vers une position limite parallèle à PQ . La courbe des centres de gravité admet donc une tangente continue qui est toujours parallèle à la corde correspondante. Cette courbe est donc convexe. Nous allons maintenant montrer qu'elle admet une courbure continue positive.

Le rayon de courbure est par définition la limite du rapport de l'arc $\widehat{SS'}$ à l'angle ε . En vertu du lemme démontré dans le § 1, on peut remplacer dans ce rapport l'arc $\widehat{SS'}$ par la corde $\overline{SS'}$ $= \frac{a}{A} \overline{12}$. Or $a = \frac{1}{2} \int_0^\varepsilon r^2 d\varphi$, où r, φ désignent les coordonnées polaires d'un point variable sur l'arc QnQ' , par rapport à l'origine M . On a donc $\frac{a}{\varepsilon} = \frac{1}{2} \overline{r^2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\overline{PQ}}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \overline{PQ}^2$ et, comme $\overline{12} \rightarrow \frac{2}{3} \overline{PQ}$, il en résulte que le rapport $\frac{\widehat{SS'}}{\varepsilon}$ a bien une limite

$$(1) \quad \varrho = \frac{\overline{PQ}^3}{12 A}.$$

Le rayon de courbure ϱ varie d'une façon continue avec la corde PQ .

§ 3.

Nous supposons dorénavant que la courbe convexe C possède la propriété d'équilibre indifférent, c'est-à-dire que la droite joignant le centre de gravité S au centre de gravité G de la courbe C est toujours perpendiculaire à la corde PQ . Elle est donc toujours perpendiculaire à la tangente de la courbe des centres de gravité, ce qui montre que cette courbe est un cercle au centre G . Le rayon de ce cercle étant donné par la formule (1), il s'ensuit que le segment PQ est de longueur constante. Cette longueur sera désignée par d .

Nous prouverons maintenant que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\overline{PP'}}{\overline{QQ'}} = 1$. On a

$$\overline{PP'}^2 = (\overline{PM} - \overline{P'M})^2 + 2 \overline{PM} \cdot \overline{P'M} (1 - \cos \varepsilon),$$

$$\overline{QQ'}^2 = (\overline{QM} - \overline{Q'M})^2 + 2 \overline{QM} \cdot \overline{Q'M} (1 - \cos \varepsilon),$$

$$\overline{PM} + \overline{MQ} = \overline{P'M} + \overline{MQ'}, \text{ donc } \overline{PM} - \overline{P'M} = \overline{MQ'} - \overline{MQ};$$

par conséquent

$$(2) \quad \frac{\overline{PP'}^2}{\overline{QQ'}^2} - 1 = \frac{2(\overline{PM} \cdot \overline{P'M} - \overline{QM} \cdot \overline{Q'M})}{\frac{(\overline{QM} - \overline{Q'M})^2}{1 - \cos \varepsilon} + 2 \overline{QM} \cdot \overline{Q'M}}.$$

Par ce qui précède, le numérateur du second membre de (2) tend vers zéro. Le dénominateur reste supérieur à $2 \overline{QM} \cdot \overline{Q'M} \rightarrow d^2/2$. Par conséquent $\overline{PP'}/\overline{QQ'} \rightarrow 1$. En vertu du lemme du § 1 on a aussi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{PP'}/\overline{QQ'} = 1$. Si l'on introduit la longueur d'arc comme paramètre et si l'on désigne par s, σ les valeurs d'arc correspondant aux points P, Q , il vient $\frac{ds}{d\sigma} = 1$; l'arc \widehat{PQ} est donc de longueur constante. Nous désignerons cette longueur par l .

Réciproquement, supposons qu'une courbe convexe jouisse de la propriété qu'à toute corde de longueur fixe d appartient un arc de longueur constante. Le premier membre de l'équation (2) tend alors vers zéro. Le numérateur du second membre tend donc aussi vers zéro, car le dénominateur reste borné. En effet, on a

$$\frac{\overline{QM} - \overline{Q'M}}{\overline{QM} + \overline{Q'M}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta' - \beta}{2}}{\operatorname{ctg} \frac{\varepsilon}{2}},$$

donc

$$\frac{(\overline{QM} - \overline{Q'M})^2}{1 - \cos \varepsilon} = \frac{(\overline{QM} + \overline{Q'M})^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\beta' - \beta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$ l'angle β tend vers l'angle $\bar{\beta}$ compris entre QP et la demi-tangente positive en Q , donc

$$\beta' \rightarrow \pi - \bar{\beta}, \quad \frac{\beta' - \beta}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2} - \bar{\beta}, \quad \operatorname{tg} \frac{\beta' - \beta}{2} \rightarrow \operatorname{ctg} \bar{\beta};$$

$\operatorname{tg} \frac{\beta' - \beta}{2}$ est donc borné.

En remplaçant dans la relation

$$\overline{PM} \cdot \overline{P'M} - \overline{QM} \cdot \overline{Q'M} \rightarrow 0$$

$$\overline{QM} \text{ par } d - \overline{PM}, \overline{Q'M} \text{ par } d - \overline{P'M}$$

on obtient $d(\overline{PM} + \overline{P'M} - d) \rightarrow 0$ ou $\overline{PM} + \overline{P'M} \rightarrow d$;

il en résulte que $\overline{PM} \rightarrow \frac{d}{2}$, $\overline{P'M} \rightarrow \frac{d}{2}$, puisque

$$|\overline{PM} - \overline{P'M}| < \overline{PP'} \rightarrow 0.$$

En vertu d'une propriété établie dans le § 2 nous pouvons donc affirmer:

Lorsqu'une courbe convexe (ou un arc convexe) jouit de la propriété qu'à toute corde d'une longueur déterminée appartient un arc de longueur constante, alors l'aire détachée par cette corde reste aussi constante.

$$\text{On a } \frac{\overline{PP'}}{\overline{P'M}} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \alpha}, \quad \frac{\overline{QQ'}}{\overline{Q'M}} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta}, \quad \text{donc}$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{Q'Q'}} \cdot \frac{\overline{Q'M}}{\overline{P'M}} \rightarrow 1. \text{ En désignant par } \bar{\alpha} \text{ l'angle de la}$$

demi-tangente positive en P avec PQ et par $\bar{\beta}$ l'angle de la demi-tangente positive en Q avec QP , on a donc $\sin \bar{\alpha} = \sin \bar{\beta}$ et par suite $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$ ou $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \pi$. Il est aisé de voir que c'est toujours la seconde relation qui se présente. Si par exemple l'angle $\bar{\alpha}$ est aigu, on aura pour ε suffisamment petit $\overline{P'M} < \overline{PM}$, donc $\overline{Q'M} > \overline{QM}$ et $\beta > \beta'$. Comme $\beta + \beta' \rightarrow \pi$, l'angle $\bar{\beta}$ sera $\geq \frac{\pi}{2}$, donc $\neq \bar{\alpha}$. Pareillement, si $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ sont les angles faits par les demi-tangentes négatives en P, Q avec la corde PQ , on a $\bar{\alpha} + \bar{\beta} = \pi$. En ajoutant les deux relations on obtient

$$(\bar{\alpha} + \bar{\alpha}') + (\bar{\beta} + \bar{\beta}') = 2\pi.$$

Mais, en vertu de la convexité, $\bar{\alpha} + \bar{\alpha}' \leq \pi$, $\bar{\beta} + \bar{\beta}' \leq \pi$. Il faut donc que $\bar{\alpha} + \bar{\alpha}' = \pi$, $\bar{\beta} + \bar{\beta}' = \pi$. Cela montre que la courbe C admet une tangente continue. De plus, les angles intérieurs formés par les tangentes en P, Q avec la corde, situés sur le même côté de celle-ci, sont égaux.

§ 4.

Soient φ, ψ les angles formés par les tangentes aux points P, Q avec l'axe x , ϑ l'angle de la corde PQ avec la tangente positive en P et $u = \varphi + \vartheta$ l'angle de la corde PQ avec l'axe x .

Lorsque le point P décrit la courbe C dans le sens positif, l'angle u croît d'une façon continue et subit un accroissement total de 2π . On peut donc considérer les angles φ, ψ, ϑ comme fonctions continues de u de période 2π .

En vertu de l'égalité d'angles constatée dans le paragraphe précédent, on a

$$(3) \quad \psi - \varphi = 2\vartheta,$$

donc $\vartheta = u - \varphi = \psi - u$. Si donc u_1, u_2 sont deux valeurs arbitraires du paramètre u , il vient

$$\begin{aligned} \vartheta(u_2) - \vartheta(u_1) &= (u_2 - u_1) - [\varphi(u_2) - \varphi(u_1)] \\ &= [\psi(u_2) - \psi(u_1)] - (u_2 - u_1). \end{aligned}$$

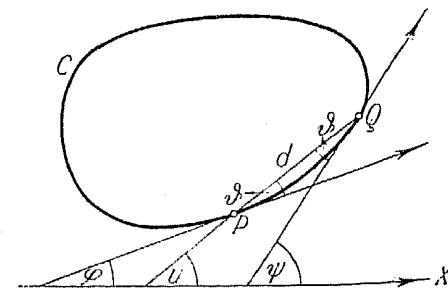
Les fonctions $\varphi(u), \psi(u)$ étant non décroissantes on voit que la fonction $\vartheta(u)$ satisfait à la condition de Lipschitz:

$$|\vartheta(u_2) - \vartheta(u_1)| \leq |u_2 - u_1|.$$

Elle admet donc presque partout une dérivée $\frac{d\vartheta}{du}$ dont le module est ≤ 1 .

On peut aussi regarder les angles $\varphi, \psi, \vartheta, u$ comme fonctions continues de l'arc s . En passant dans la relation $\frac{\sin \varepsilon}{\overline{PP'}} = \frac{\sin \alpha}{\overline{P'M}}$ (p. 130) à la limite, on obtient

$$(4) \quad \frac{du}{ds} = \frac{2}{d} \sin \vartheta.$$



Il en résulte que les angles u, ϑ , considérés comme fonctions de s , satisfont aussi à une condition de Lipschitz. L'angle $\varphi = u - \vartheta$ jouit donc de la même propriété. Sa dérivée $\frac{d\varphi}{ds}$ existe pour presque tout s , c'est la courbure de la courbe C . En remplaçant dans la relation (4) l'angle u par $\varphi + \vartheta$, on obtient l'équation différentielle

$$(4^*) \quad \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{2}{d} \sin \vartheta + \frac{1}{\varrho} = 0$$

remplie pour presque tout s ¹⁰).

Réciproquement, supposons qu'une corde de longueur constante d , issue du point (s) , se déplace de manière que l'angle u qu'elle fait avec l'axe x satisfait à l'équation (4). Les coordonnées de l'autre extrémité de la corde sont alors

$$x_1 = x + d \cos u, \quad y_1 = y + d \sin u$$

et on a

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos \varphi - d \sin u \frac{du}{ds} = \cos \varphi - 2 \sin (\varphi + \vartheta) \sin \vartheta,$$

$$\frac{dy_1}{ds} = \sin \varphi + d \cos u \frac{du}{ds} = \sin \varphi + 2 \cos (\varphi + \vartheta) \sin \vartheta,$$

ou

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos (\varphi + 2\vartheta), \quad \frac{dy_1}{ds} = \sin (\varphi + 2\vartheta).$$

Par conséquent la longueur d'arc détaché par la corde est constante. Il en est de même de l'aire (voir p. 130).

Lorsque la courbure est continue pour tout s , l'équation (4) est équivalente à (4*). Si donc l'angle ϑ compris entre la corde et la tangente positive satisfait à cette dernière équation, les conditions d'équilibre indifférent seront remplies. Il est aisé de voir que cette conclusion subsiste dans le cas où la courbure admet un nombre fini de discontinuités de première espèce.

¹⁰ Cette équation a été rencontrée par Bianchi. Si l'on pose $z = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$, elle devient une équation de Riccati. Voir R. v. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie, t. 1 (Leipzig, Teubner 1908) p. 290-91.

Désignons par L le périmètre de la courbe C . En intégrant les deux membres de l'équation (4*) entre 0 et L , on obtient la relation

$$(5) \quad \int_0^L \sin \vartheta ds = d\pi.$$

De même, l'intégration entre s et $s+l$ donne

$$\vartheta(s+l) - \vartheta(s) + \psi - \varphi = \frac{2}{d} \int_s^{s+l} \sin \vartheta ds$$

ou, en vertu de (3),

$$(6) \quad \vartheta(s+l) + \vartheta(s) = \frac{2}{d} \int_s^{s+l} \sin \vartheta ds.$$

En intégrant les deux membres de cette équation entre 0 et L on obtient

$$2 \int_0^L \vartheta ds = \frac{2}{d} \int_0^L ds \int_0^l \sin \vartheta(s+t) dt$$

ou, en tenant compte de (5),

$$(7) \quad \int_0^L \vartheta ds = l\pi.$$

La formule (3) donne

$$(8) \quad \frac{1}{\varrho_Q} - \frac{1}{\varrho_P} = 2 \frac{d\vartheta}{ds}.$$

En portant dans (4*), on obtient encore

$$(9) \quad \frac{1}{\varrho_Q} + \frac{1}{\varrho_P} = \frac{4}{d} \sin \vartheta.$$

Les deux dernières formules sont valables pour presque tout s .

§ 5.

Avant d'aller plus loin, nous résumons les propriétés établies des courbes convexes satisfaisant aux conditions d'équilibre indifférent:

1°. La courbe C admet en tout point une tangente.

2°. La corde PQ est de longueur constante d .

3°. L'arc \widehat{PQ} est de longueur constante l .

4°. La tangente positive en P fait avec la corde PQ le même angle ϑ que la tangente négative en Q .

5°. Cet angle, considéré comme fonction du paramètre u , jouit des propriétés suivantes :

$$(I) \quad 0 < \vartheta(u) < \pi,$$

$$(II) \quad \vartheta(u + 2\pi) = \vartheta(u),$$

$$(III) \quad |\vartheta(u_2) - \vartheta(u_1)| \leq |u_2 - u_1|,$$

$$(IV) \quad \int_0^{2\pi} \text{ctg } \vartheta(u) \begin{cases} \cos u \\ \sin u \end{cases} du = 0 \quad (11).$$

6°. L'angle ϑ , considéré comme fonction de l'arc s , satisfait à une condition de Lipschitz et remplit pour presque tout s l'équation différentielle

$$(4^*) \quad \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{2}{d} \sin \vartheta + \frac{1}{\rho} = 0.$$

§ 6.

Nous supposons dès maintenant que la courbe C possède la propriété d'équilibre indifférent pour la densité $1/2$. Cela vaut dire que la corde PQ divise l'aire de la courbe en deux parties égales. Il en est évidemment de même du périmètre. Nous sommes ainsi amenés à considérer la classe des courbes convexes de Zindler définie dans l'introduction. Dans ce cas particulier, les valeurs du paramètre u relatives aux points P, Q diffèrent évidemment de π . En outre, en vertu des 1°, 4° (§ 5), on peut remplacer la propriété (II) de l'angle ϑ par

$$(II^*) \quad \vartheta(u) + \vartheta(u + \pi) = \pi.$$

D'après le § 1, les coordonnées x, y admettent pour toute valeur de s des dérivées continues $\frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \frac{dy}{ds} = \sin \varphi,$

¹¹⁾ Les relations (IV) se démontrent de la même façon que dans le cas particulier étudié dans le paragraphe suivant.

donc, en vertu de (4), aussi des dérivées continues $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}$.

On a

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{d}{2} \frac{\cos(u - \vartheta)}{\sin \vartheta} = \frac{d}{2} (\cos u \text{ctg } \vartheta + \sin u) \\ \frac{dy}{du} &= \frac{d}{2} \frac{\sin(u - \vartheta)}{\sin \vartheta} = \frac{d}{2} (\sin u \text{ctg } \vartheta - \cos u). \end{aligned}$$

La courbe C étant fermée, il s'ensuit, en tenant compte de (II*), que

$$(IV^*) \quad \int_0^\pi \text{ctg } \vartheta(u) \begin{cases} \cos u \\ \sin u \end{cases} du = 0.$$

D'après les propriétés (I), (III) de l'angle ϑ (§ 5), la fonction $\frac{d}{2} \text{ctg } \vartheta(u)$ satisfait à une condition de Lipschitz. Son développement en série de Fourier est donc absolument et uniformément convergent¹²⁾. En vertu de (II*) et (IV*), ce développement aura la forme

$$(11) \quad \frac{d}{2} \text{ctg } \vartheta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_{2k+1} \cos(2k+1)u + a'_{2k+1} \sin(2k+1)u].$$

En portant cette expression dans les formules (10) et en posant $a_1 = a'_1 = 0$, on obtient

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \frac{d}{2} \sin u + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_{2k+1} + a_{2k-1}}{2} \cos 2ku \right. \\ &\quad \left. + \frac{a'_{2k+1} + a'_{2k-1}}{2} \sin 2ku \right], \\ \frac{dy}{du} &= -\frac{d}{2} \cos u + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a'_{2k+1} - a'_{2k-1}}{2} \cos 2ku \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{2k+1} - a_{2k-1}}{2} \sin 2ku \right]. \end{aligned}$$

¹²⁾ Voir par exemple A. Zygmund, Trigonometrical series (Warszawa—Lwów, Monografie Matematyczne 1935) p. 135.

On a donc

$$(13) \quad \begin{aligned} x &= x_0 - \frac{d}{2} \cos u + \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{a'_{2k+1} + a'_{2k-1}}{4k} \cos 2ku \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_{2k+1} + a_{2k-1}}{4k} \sin 2ku \right], \\ y &= y_0 - \frac{d}{2} \sin u + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{a_{2k+1} - a_{2k-1}}{4k} \cos 2ku \right. \\ &\quad \left. + \frac{a'_{2k+1} - a'_{2k-1}}{4k} \sin 2ku \right] \end{aligned}$$

x_0, y_0 désignant des constantes d'intégration. Nous avons ainsi obtenu une représentation paramétrique de la courbe C .

Réciproquement, supposons qu'on se donne la série trigonométrique au second membre de (11), représentant une fonction qui satisfait à une condition de Lipschitz, d'ailleurs quelconque. La fonction $\vartheta(u)$ définie par l'équation (11) et l'inégalité $0 < \vartheta(u) < \pi$ satisfaira à la condition $|\vartheta(u_2) - \vartheta(u_1)| \leq |u_2 - u_1|$ pourvu que la constante d soit suffisamment grande. En dérivant les formules (13) on retrouve les formules (12) et (10). Les dernières formules donnent successivement

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 = \frac{d^2}{4 \sin^2 \vartheta},$$

$$\frac{ds}{du} = \pm \frac{d}{2 \sin \vartheta},$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{du} \frac{du}{ds} = \pm \cos(u - \vartheta), \quad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{du} \frac{du}{ds} = \pm \sin(u - \vartheta),$$

$$\varphi = u - \vartheta \text{ ou } \varphi = u - \vartheta + \pi.$$

En vertu des propriétés de la fonction $\vartheta(u)$, l'angle φ est une fonction continue non décroissante du paramètre u et augmente de 2π en même temps que u . Par conséquent, la courbe représentée par les équations (13) est convexe.

On a d'après ces équations

$$x(u + \pi) - x(u) = d \cos u, \quad y(u + \pi) - y(u) = d \sin u.$$

La corde joignant les points $(u), (u + \pi)$ est donc de longueur constante d et fait avec l'axe x l'angle u . On en conclut que le paramètre u croît dans le sens positif et que l'arc s sera

compté dans ce sens si l'on choisit le signe $+$ dans les formules précédentes. Comme la dérivée $\frac{ds}{du}$ prend la même valeur pour u et $u + \pi$, la corde en question partage le périmètre en deux arcs de longueur constante, nécessairement égaux. Il en résulte (voir p. 130) qu'elle divise aussi l'aire de la courbe en deux parties égales. Les équations (13) représentent donc une courbe (Z).

Nous avons ainsi démontré:

Si d désigne une constante positive et $\vartheta(u)$ une fonction de période 2π jouissant des propriétés:

$$(I) \quad 0 < \vartheta(u) < \pi,$$

$$(II^*) \quad \vartheta(u) + \vartheta(u + \pi) = \pi,$$

$$(III) \quad |\vartheta(u_2) - \vartheta(u_1)| \leq |u_2 - u_1|,$$

$$(IV^*) \quad \int_0^\pi \text{ctg } \vartheta(u) \begin{Bmatrix} \cos u \\ \sin u \end{Bmatrix} du = 0,$$

alors les équations (13), où les coefficients a, a' sont définis par le développement (11), représentent la courbe convexe (Z) la plus générale.

En vertu de (4), (II*), le périmètre de la courbe est

$$(14) \quad L = d \int_0^\pi \frac{du}{\sin \vartheta}.$$

Son aire se calcule à l'aide de la formule

$$F = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{du} - y \frac{dx}{du} \right) du.$$

En se servant de la formule de Parseval, on trouve

$$(15) \quad F = \frac{d^2}{4} \pi - \frac{\pi}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} (a_{2k+1}^2 + a'_{2k+1}^2).$$

On peut aussi remplacer les dérivées $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}$ par les expressions (10) et les fonctions x, y par les intégrales de ces expres-

sions. En tenant compte des propriétés (II*) et (IV) de l'angle ϑ , on arrive après un calcul facile à la formule

$$(15^*) F = \frac{d^2}{4} \left[\pi + \iint \operatorname{ctg} \vartheta(u) \operatorname{ctg} \vartheta(v) \sin(u-v) du dv \right],$$

où l'intégration s'étend sur le triangle limité par les droites $v = 0$, $u = \pi$, $u = v$.

Il résulte immédiatement des formules (14), (15) que, parmi toutes les courbes convexes (Z) dont la corde bissectrice est de longueur d , le cercle de diamètre d atteint le plus petit périmètre et la plus grande aire. Il serait intéressant de déterminer les courbes de périmètre maximé et celles d'aire minimée. Probablement, la courbe triangulaire (§ 8) fournit la solution d'au moins un de ces problèmes. Nous espérons de revenir sur cette question¹³⁾.

D'après un théorème de HURWITZ⁴⁾, la fonction $\operatorname{ctg} \vartheta(u)$ s'annule pour au moins six valeurs différentes (mod 2π). En tenant compte de la propriété (II*) on peut affirmer qu'il existe au moins trois cordes bissectrices perpendiculaires aux tangentes en P , Q . Ce nombre est atteint dans le cas de la courbe triangulaire.

§ 7.

Lorsque le point P décrit la courbe C , les cordes PQ enveloppent une courbe C' qui est le lieu géométrique de leurs milieux (voir p. 125—126); c'est la courbe double de HURWITZ. Les équations de cette courbe sont

$$(16) \quad \begin{aligned} X(u) &= \frac{x(u) + x(u + \pi)}{2} = x(u) + \frac{d}{2} \cos u \\ Y(u) &= \frac{y(u) + y(u + \pi)}{2} = y(u) + \frac{d}{2} \sin u. \end{aligned}$$

Les fonctions $X(u)$, $Y(u)$ admettent des dérivées continues. On obtient à l'aide des formules (10)

¹³⁾ Un problème analogue relatif à l'aire des courbes à diamètres conjugués de M. Radon⁵⁾, proposé récemment par M. K. Reinhardt (Abh. Math. Sem. Hamburg 10 (1934) p. 230), a été l'objet de ma Thèse de doctorat (1930) qui sera publiée dans ce Journal. La solution est conforme aux prévisions de M. Reinhardt.

$$(17) \quad \frac{dX}{du} = \frac{d}{2} \operatorname{ctg} \vartheta \cos u, \quad \frac{dY}{du} = \frac{d}{2} \operatorname{ctg} \vartheta \sin u.$$

D'après ces formules, la courbe C' est régulière en tout point où $\operatorname{ctg} \vartheta \neq 0$ et y admet un rayon de courbure égal à $\frac{d}{2} \operatorname{ctg} \vartheta$, représenté par la série (11).

Les formules (16), (17) montrent qu'on obtient la courbe C en portant sur les tangentes de C' le segment $\frac{d}{2}$ (dans l'une ou l'autre direction), elle est donc une courbe équitangentielle de la courbe C' . Le fait que le rayon de courbure de C' est égal à $\frac{d}{2} \operatorname{ctg} \vartheta$ est en accord avec une propriété bien connue des courbes équitangentielles¹⁴⁾.

Les courbes parallèles de la courbe C' sont données par les équations

$$(18) \quad \bar{x}(u) = X(u) + \frac{a_0}{2} \sin u, \quad \bar{y}(u) = Y(u) - \frac{a_0}{2} \cos u,$$

$$(19) \quad \frac{d\bar{x}}{du} = \frac{1}{2}(a_0 + d \operatorname{ctg} \vartheta) \cos u, \quad \frac{d\bar{y}}{du} = \frac{1}{2}(a_0 + d \operatorname{ctg} \vartheta) \sin u,$$

où a_0 désigne une constante.

En vertu des propriétés (I)-(III) de l'angle ϑ , l'expression $a_0 + d \operatorname{ctg} \vartheta$ est positive pour a_0 suffisamment grand et tout u et alors les équations (18) représentent une courbe convexe dont le rayon de courbure est $(a_0 + d \operatorname{ctg} \vartheta)/2$. C'est une courbe orbiforme, parce que ses tangentes aux points (u) , $(u + \pi)$ sont parallèles et de distance constante a_0 .

Il suffit que a_0 soit $\geq d$. En effet, considérons le triangle isocèle formé par les tangentes de la courbe C aux points P , Q et la corde PQ . La courbe C étant convexe, il s'ensuit que la longueur de l'arc contenu dans ce triangle, c'est-à-dire le demi-périmètre, est moindre que la somme des côtés égaux:

$$\frac{L}{2} < \frac{d}{|\cos \vartheta|} \quad \text{ou} \quad |\cos \vartheta| < \frac{2d}{L}.$$

¹⁴⁾ Voir G. Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, t. 2 (Leipzig, Teubner 1911) p. 194.

Or $L \geq \pi d$ (voir p. 138), donc $|\cos \vartheta| < \frac{2}{\pi}$, $|\operatorname{ctg} \vartheta| < \frac{2}{\sqrt{\pi^2 - 4}} < 1$ et $1 + \operatorname{ctg} \vartheta > 0$ ¹⁶⁾.

En prenant $a_0 = d$ on obtient une courbe orbiforme convexe dont l'aire s'exprime par la formule (15). On peut donc dire:

Lorsqu'un carré rigide se déplace dans son plan de manière qu'une de ses diagonales demeure la corde bissectrice d'une courbe convexe (Z), l'autre diagonale coïncide avec la binormale d'une courbe orbiforme convexe de la même aire.

§ 8.

Les formules (13) permettent de former une infinité d'exemples des courbes convexes (Z). Si les nombres a_n, a'_n tendent assez rapidement vers zéro, on obtiendra une courbe analytique; lorsqu'ils sont nuls à partir d'un certain n , la courbe sera rationnelle.

Nous allons maintenant construire deux exemples en nous servant de l'équation différentielle (4*) avec $d = 2$ et $\frac{1}{q} = 0$:

$$(20) \quad \frac{d\vartheta}{ds} - \sin \vartheta = 0.$$

L'intégrale de cette équation est donnée par la formule

$$(21) \quad \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = e^s \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2},$$

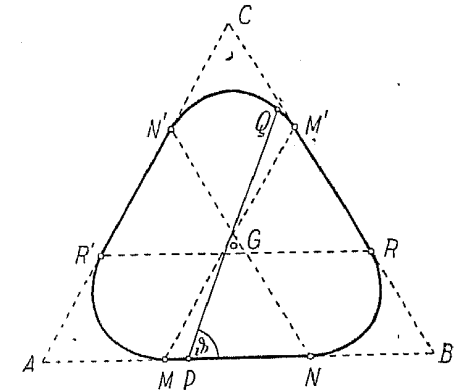
où ϑ_0 désigne la valeur de l'angle ϑ pour $s = 0$. Si donc une courbe (Z) contient un segment, la formule (21) permet de déterminer l'angle ϑ le long de ce segment et, par suite, l'arc de la courbe décrit par l'autre extrémité de la corde bissectrice.

a) Soit MN un segment de longueur $2a$. Considérons un point mobile P parcourant ce segment dans la direction MN ; soit $s = \overline{MP}$. Déterminons l'angle ϑ le long de MN par la valeur initiale $\vartheta_0 = \pi/3$. On aura donc $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^s$. Nous de-

¹⁶⁾ D'après cette évaluation, l'angle ϑ est toujours compris entre 50° et 130° . On peut démontrer que les limites exactes sont 60° et 120° ; elles ne sont atteintes que dans le cas de la courbe triangulaire.

mandons encore que la valeur de ϑ correspondant au milieu de MN soit égale à $\pi/2$, c'est-à-dire que $\frac{1}{\sqrt{3}} e^a = 1$ ou $a = \frac{1}{2} \lg 3$.

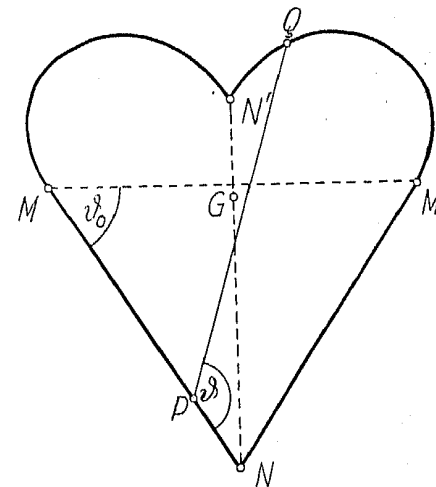
Lorsque le point P décrit le segment MN , l'autre extrémité du segment de longueur $d = 2$, issu de P sous l'angle ϑ , décrit un arc $\widehat{M'N'}$ symétrique par rapport à la bissectrice du segment MN . La valeur finale de l'angle ϑ en N est $2\pi/3$. Les droites passant par M', N' , parallèles à NN' respectivement MM' , sont les tangentes de l'arc $\widehat{M'N'}$ en ces points comme on peut



vérifier directement, c'est aussi une conséquence des propriétés de l'angle ϑ (p. 132 et p. 130 en bas). On obtient ainsi un triangle équilatéral ABC . Déterminons les points R, R' de manière que $BR = M'C = MA$ et $AR' = N'C = NB$. Les segments $RM', R'N'$ sont de longueur $2a$ et la construction précédente leur fait correspondre deux arcs: $\widehat{R'M}$ et $\widehat{R'N}$. La courbe $MNRM'N'R'M$ ainsi obtenue est une courbe convexe (Z). Elle possède trois axes de symétrie, son périmètre est $12a = 6 \lg 3 = 6 \cdot 59167$, son aire

$$2\sqrt{3} \left[\lg 9 - \left(\frac{\lg 3}{2} \right)^2 - 1 \right] = 3 \cdot 10206.$$

b) Soient P un point mobile décrivant le segment MN et PQ le segment de longueur $d = 2$, issu sous l'angle ϑ déterminé par l'équation (20), où $s = \overline{MP}$. La position initiale de ce seg-



ment étant MM' , nous demandons que sa position finale NN' soit située sur la bissectrice de MM' . Il faut alors que la valeur finale de l'angle ϑ soit

$$\vartheta' = \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}, \text{ donc } \operatorname{tg} \frac{\vartheta'}{2} = \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}}.$$

Cette valeur correspondant à $s = \overline{MN} = \frac{1}{\cos \vartheta_0}$, on doit avoir

$$\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}} = e^{\frac{1}{\cos \vartheta_0}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2}$$

ou, en posant $\operatorname{tg} \frac{\vartheta_0}{2} = t$,

$$e^{\frac{1+t^2}{1-t^2}} = \frac{1+t}{t(1-t)}.$$

Il est aisé de voir que cette équation admet dans $(0, 1)$ une seule racine; on trouve $t = 0.540370$ ou $\vartheta_0 = 56^\circ 46' 15''$.

L'angle ϑ_0 étant ainsi choisi, le point Q décrira un arc $\widehat{M'N'}$. Cet arc et l'arc symétrique par rapport à la droite NN' composent avec les segments MN, NM' une courbe (Z) non convexe en forme de coeur. L'aire de cette courbe est $2 \operatorname{tg} \vartheta_0 = 3.05293$, son périmètre $\frac{4}{\cos \vartheta_0} = 7.29942$.

(Reçu par la Rédaction le 27. 8. 1937).

Addition faite pendant la correction des épreuves: Nous avons omis d'ajouter à la condition nécessaire et suffisante de la page 121 et celle de la page 122 (en haut) que le centre de la sphère, respectivement du cercle, doit se confondre avec le centre de gravité. Nous ne savons pas, en effet, si cela résulte de la condition du texte. On voit sans peine qu'il en est ainsi dans le cas où la densité $= 1/2$.

A la note ⁶⁾ de la page 123 ajouter: voir aussi H. Gericke, Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises, Math. Zeitschr. 40 (1936) p. 417—420.