Verallgemeinerung eines reihentheoretischen Satzes

von

S. SIDON (Budapest).

Sind die Partialsummen der numerischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht beschränkt, so gibt es monotone Nullfolgen $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ für welche selbst die arithmetischen Mittel der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n q_n$ nicht beschränkt sind [1]).

Die loc. cit. [1]) angewandte Beweismethode ergibt auch die folgende Verallgemeinerung des soeben reproduzierten Satzes:

S a t z I. *Ist die Funktionenfolge* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ *von der Beschaffenheit, daß für sämtliche der Menge* E *angehörigen — reellen oder komplexen —* x*-Werte*

$$\left| \frac{s_{n_{k+1}}(x)}{s_{n_k}(x)} \right| > 2$$

von einem gewissen $k = k(x)$ *an gilt, wo* $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$, *die Indices* $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ *fest sind,* $k(x)$ *aber von* x *abhängt, so gibt es monotone Nullfolgen* $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, *für welche die* (C, l)*-Mittel* ($l > 0$ *und fest*) *der Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} q_n f_n(x)$ *in* E *nirgends beschränkt sind.*

Ist $\varphi(n)$ eine für $n > 0$ konvexe Funktion von n, und ist $\lim n\varphi(n) = \infty$, so erfüllt die Funktionenfolge $\varphi(1)z, \ldots, \varphi(k)kz^k, \ldots$ für $|z| = 1$ die Bedingung des Satzes I wegen

[1]) Siehe meine Arbeit: Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourier-Reihen, Math. Zeitschr. 10 (1921) p. 121—127. Der Satz gilt auch, wenn die a_n lineare Funktionale sind. (Dies steht dem Wesen nach schon in meiner Arbeit). Herr S. K a c z m a r z bewies, daß in dem in Rede stehenden Satze die arithmetischen Mittel durch nach einem beliebigen T-Verfahren gebildete Mittel ersetzt werden können: Une remarque sur les séries, Stud. Math. 3 (1931) p. 95—100.

$$|\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)\,k z^k| = |\sum_{k=1}^{n-1} k\,\Delta^2\varphi(k)\,.\,\tau_k(z) + (n-1)\,\Delta\varphi(n-1)\,\tau_{n-1}(z)$$
$$+\varphi(n)\,\sigma_n(z)| \sim |\varphi(n)\,\sigma_n(z)|,$$

wo $\sigma_k(z)$ die k-te Partialsumme, $\tau_k(z)$ das k-te arithmetische Mittel von $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$ bedeutet. Daraus folgt die Existenz von monotonen Nullfolgen $q_1, \ldots, q_n, \ldots$, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n q_n \varphi(n) e^{inx}$ für kein reelles x $(C, 3)$ summierbar ist. Die der Klasse L angehörige Funktion $f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \varphi(n)}{n} e^{inx}$ hat also an keiner Stelle des Intervalles $0 < x < 2\pi$ einen zweiten Differentialquotienten, d. h. $F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} q_n \varphi(n) e^{inx}$ ist dort nirgends differentiierbar. Die Funktion $F(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{n} e^{inx}$ ist aber im Intervalle $0 < x < 2\pi$ überall differentiierbar, wenn q_n monoton gegen 0 konvergiert. Wir haben also den zusammenfassenden

Satz A. *Die durch $\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx}$ dargestellte Funktion ist im Intervalle $0 < x < 2\pi$ überall differentiierbar, wenn $p_1, 2p_2, \ldots, np_n, \ldots$ eine monotone Nullfolge ist; ist hingegen $\varphi(n)$ konvex für $n > 0$ und $\lim n\varphi(n) = \infty$, so gibt es Folgen $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, für welche $p_n/\varphi(n)$ monoton nach 0 konvergiert und $\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx}$ im Intervalle $0 < x < 2\pi$ nirgends differentiierbar ist*[2]).

Es gilt auch die folgende Verallgemeinerung des Satzes I:

[2]) Im Spezialfalle $\varphi(n) = 1$ wurde Satz A von den Herren P. Erdös und P. Turán bewiesen, indem sie, eine Fragestellung des Herrn L. Fejér beantwortend, sogar eine durch eine trigonometrische Reihe, deren Koeffizienten eine monotone Nullfolge bilden, dargestellte nirgends differentiierbare Funktion angaben. Dieselbe lautet:

$$f(x) = \frac{g\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}, \text{ wo } g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n \sin(b^n x \pi),$$

$|a| < 1$, b eine ungerade ganze Zahl, $|ab| > 1$ ist. Auf diese Weise ergibt sich zwar die Richtigkeit des Satzes A auch für $\varphi(n) = n^{-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$; in voller Allgemeinheit scheint sich derselbe so doch nicht beweisen zu lassen und dies gilt noch mehr von dem am Schluß der vorliegenden Note ausgesprochenen Satze B.

Satz II. *Ist die Funktionenfolge $f_1(x) \ldots f_n(x) \ldots$ von der Beschaffenheit, daß für sämtliche einer E-Menge angehörigen x-Werte*

$$\left| \frac{S^{(j)}_{n_{k+1}}(x)}{S^{(j)}_{n_k}(x)} \right| > 2$$

für $k > k(x)$ gilt, wo $S^{(j)}_n(x)$ das n-te (C, j)-Mittel (j positiv und ganz) der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_k(x)$ bedeutet, so gibt es j-fach monotone Nullfolgen $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, für welche die (C, l)-Mittel (l fest und $> j$) der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} q_n f_n(x)$ in E nirgends beschränkt sind. (Die Indices $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ sind wieder fest).

Ein Korollar des Satzes II ist

Satz B. *Die durch $\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx}$ definierte Funktion ist im Intervalle $0 < x < 2\pi$ überall j-mal differentiierbar, wenn $p_1, 2p_2, \ldots np_n, \ldots$ eine j-fach monotone Nullfolge ist; ist hingegen $\lim n\varphi_n = \infty$ und $\varphi(n)$ eine für $n > 0$ $(j+1)$-fach monotone Funktion von n, so gibt es Folgen $\{p_n\}$ für welche $p_n/\varphi(n)$ j-fach monoton, $\lim p_n/\varphi(n) = 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx}$ im Intervalle $0 < x < 2\pi$ nirgends j-mal differentiierbar ist*[3]).

[3]) $\sum_{n=1}^{\infty} p_n e^{inx}$ ist aber im Intervalle $0 < x < 2\pi$ überall j-mal differentiierbar, wenn die Folge der p_n $(j+1)$-fach monoton und $\lim p_n = 0$ ist. (Für $j = 1$ bei A. Zygmund, Trigonometrical series, Warszawa 1935).

(Reçu par la Rédaction le 17. 7. 1937).