Sur les fonctions indépendantes (IV)

(Intervalle infini)

par

M. KAC et H. STEINHAUS (Lwów).

Les notions introduites dans nos Communications précédentes[1]) sont à modifier quand on passe à l'intervalle infini.

Nous aurons à parler de fonctions d'une variable réelle, définies dans $(-\infty, +\infty)$; on les suppose mesurables L dans tout intervalle fini. Or, on aura à considérer une propriété plus restrictive:

Définition 1. On appelle *mesure relative* de E et on désigne par $|E|_R$ la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} |E \times \langle -T, T \rangle|,$$

si cette limite existe.

Cette notion, utilisée dans la théorie des fonctions presque périodiques, conduit à la mesurabilité relative de fonctions:

Définition 2. Une fonction $f(t)$ est dite *mesurable R* (= *relativement mesurable*), si les ensembles

$$E\{f(t) < a\}, \quad E\{f(t) > a\}$$

---

[1]) a) Studia Math. 6 (1936) p. 46—58, p. 59—66, p. 89—97. La première de ces communications est due à M. Kac seul. La remarque qui précède le th. 1 est à supprimer. À la p. 52, 6-me et 8-me ligne d'en bas il faut lire $a_k \xi$ au lieu de ξ; dans les intégrales simples qui suivent à la meme page, le dénominateur de la fonction à intégrer est $a_1 a_2 \dots a_n \xi^{n+1}$.

b) H. Steinhaus, La courbe de Peano et les fonctions indépendantes, Comptes Rendus 202 (1936) p. 1961—1963; M. Kac, Quelques remarques sur les fonctions indépendantes, Comptes Rendus 202 (1936) p. 1963—1965. À la dernière page de la note de M. Kac il faut diviser $f_k^2(t)$ par b_k et remplacer dans la dernière limite asymptotique l'exposant -2 par -1.

sont relativement mesurables, c. à. d. possèdent une mesure relative au sens de la définition 1, quel que soit a.

Cette définition implique aussi la mesurabilité relative des ensembles $E\{a \lesseqgtr f(t) \lesseqgtr b\}$.

Définition 3. On appelle *moyenne R* (*moyenne relative*) et on désigne par $M_R\{f\}$ la limite des sommes

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \bar{l}_k |E\{l_k \leqslant f(t) < l_{k+1}\}|_R \qquad (l_k \leqslant \bar{l}_k \leqslant l_{k+1});$$

on suppose que $\{l_k\}$ est une suite infinie à différence constante $l_{k+1} - l_k = \Delta$ et on exige que la limite en question existe quelle que soit la succession de suites $\{l_k\}$, pourvu que Δ tende vers 0. Alors cette limite est unique.

Lemme 1. Toute fonction bornée et mesurable R possède une moyenne relative.

Démonstration. Quand on désigne par $h(x)$ la mesure relative de l'ensemble $E\{f(t) < x\}$ et par a un nombre qui dépasse la borne supérieure de $|f(t)|$, $h(x)$ sera une fonction monotone dans $\langle -a, a\rangle$, on aura $h(-a)=0$, $h(a)=1$ et l'algorithme qui sert a calculer $M_R\{f\}$ devient identique à celui qui fournit l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} x\, dh(x)$$

de Riemann-Stieltjes; or, on sait que cette intégrale existe et que sa valeur ne dépend pas du choix des subdivisions $\{l_k\}$ de l'intervalle $\langle -a, a\rangle$.

Nous aurons dans la suite à employer aussi une autre moyenne que celle de la définition 3, à savoir la moyenne classique $M_B\{f\}$:

Définition 4. Nous désignons par $M_B\{f\}$ la valeur commune de

$$\overline{M}_B\{f\} = \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt, \quad \underline{M}_B\{f\} = \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt,$$

donc la limite

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(t)\,dt,$$

si elle existe[2]). L'intégrale est prise au sens de Lebesgue.

Lemme 2. Pour une fonction $f(t)$ mesurable R et bornée, la moyenne $M_B\{f\}$ existe et est égale a $M_R\{f\}$ (qui existe suivant le lemme 1).

Démonstration. Soient $\{l_k\}$ la suite de la Df. 3, a le nombre de la démonstration du lemme 1, K si grand que l'on ait $l_K < -a$, $a < l_K$; en écrivant

$$m_k(T) = |E\{l_k \leqslant f(t) < l_{k-1}\} \times \langle -T, T\rangle|,$$

$$S_T = \sum_{k=-K}^{K} l_{k+1}\, m_k(T), \quad s_T = \sum_{k=-K}^{K} l_k\, m_k(T),$$

on aura évidemment

$$\frac{s_T}{2T} \leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)\,dt \leqslant \frac{S_T}{2T},$$

donc

$$\sum_{k=-K}^{K} l_k \frac{m_k(T)}{2T} \leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=-K}^{K} l_{k+1} \frac{m_k(T)}{2T},$$

$$\sum_{k=-K}^{K} l_k |E\{l_k \leqslant f(t) < l_{k+1}\}|_R \leqslant \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)\,dt$$

$$\leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=-K}^{K} l_{k+1} |E\{l_k \leqslant f(t) < l_{k+1}\}|_R.$$

En vertu du lemme 1, les deux sommes tendent vers $M_R\{f\}$ quand $\Delta = l_{k+1} - l_k$ tend vers zéro; les deux limites étant indépendantes de Δ et comprises entre ces sommes, il s'ensuit qu'elles sont égales à $M_R\{f\}$, c. q. f. d.

Définition 5. On dit que la suite (finie ou dénombrable) $\{f_k(t)\}$ constitue un système de *fonctions indépendantes* dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, si l'on a pour tout n naturel

[2]) A. S. Besicovitch, Almost periodic functions, Cambridge 1932. Chapter I, § 3, p. 12.

(1) $$\left|\underset{t}{E}\{f_1 \in I_1,\, f_2 \in I_2, \ldots f_n \in I_n\}\right|_R = \prod_{k=1}^{n} \left|\underset{t}{E}\{f_k \in I_k\}\right|_R$$

quels que soient les intervalles I_k; on considère ici toutes les dix espèces d'intervalles ouverts ou fermés, finis ou infinis et l'on exige que les mesures relatives qui constituent les deux membres de (1) existent.

Définition 6. On appelle *distribuante* de $f(t)$ la fonction $h(x)$ de la démonstration du lemme 1. Il est évident que la mesurabilité relative de $f(t)$ assure l'existence de la distribuante; elle est une fonction non-décroissante.

Lemme 3. Si la fonction $f(t)$ est bornée, mesurable R, à distribuante $h(x)$ absolument continue, si b et B désignent les deux bornes de $f(t)$ et si $g(x)$ est une fonction continue dans $\langle b, B\rangle$, alors $g(f(t))$ est une fonction bornée et mesurable R.

Démonstration. La relation $g(x) \leqslant a$ équivaut à $x \in \sum I_n$, les I_n étant des intervalles fermés, mutuellement exclusifs, situés dans $\langle b, B\rangle$. La relation $f(t) \in I_n$ définit un ensemble E_n des t; selon la remarque terminant la définition 2, cet ensemble est mesurable R. Décomposons maintenant la somme $\sum I_n$ en une somme finie S et un reste Z de mesure plus petite qu'un ε positif, donné d'avance. I_n, donc Z, est fermé; on peut le récouvrir par un système F d'intervalles en nombre fini, de mesure totale moindre que ε. L'ensemble $A = \underset{t}{E}\{g(f(t)) \leqslant a\}$ est donc composé d'une somme finie des ensembles E_n, qui est évidemment mesurable R, et d'un reste qui est un sous-ensemble de l'ensemble $\underset{t}{E}\{f(t) \in F\}$ mesurable R. Or, la mesure relative de cet ensemble ne surpasse pas la variation de $h(x)$ sur F. Cette variation tend vers zéro avec ε. L'ensemble A est donc enfermé entre deux ensembles mesurables R, dont les mesures diffèrent d'un nombre si petit que l'on veut; cela démontre la mesurabilité R de A. Il s'ensuit que $\underset{t}{E}\{g(f(t)) > a\}$ est mesurable R et, de même manière, que $\underset{t}{E}\{g(f(t)) < a\}$ est mesurable R. — Nous ne faisons aucune hypothèse sur la distribuante de $g(x)$; si l'on savait qu'elle est absolument continue, on pourrait démontrer que la distribuante de $g(f(t))$ jouit de la même propriété. Cette remarque ne sera pas utilisée dans la suite.

Lemme 4. Si $\{f_k(t)\}$ est un système de fonctions indépendantes dans $(-\infty, +\infty)$, ces fonctions étant bornées, mesurables R, aux distribuantes absolument continues et si $g_k(x)$ sont des fonctions continues, définies dans $\langle b_k, B_k\rangle$, les nombres b_k, B_k désignant les bornes de $f_k(t)$, aux distribuantes continues, alors $\{g_k(f_k(t))\}$ constitue un système de fonctions indépendantes dans $(-\infty, +\infty)$, bornées, mesurables R, aux distribuantes continues.

Démonstration. Une partie de la thèse résulte immédiatement du lemme 3; il reste à démontrer la continuité des distribuantes et l'indépendance. Supprimons d'abord les indices k. Soient $H(y)$ la distribuante de $g(f(t))$, $d(y)$ celle de $g(x)$ et $h(x)$ celle de $f(t)$. Nous avons à montrer que l'accroissement de $H(y)$ dans un intervalle Y tend vers zéro avec la longueur de Y; or, $g(x) \in Y$ définit un ensemble X des x constitué des intervalles fermés, $X = \sum X_n$; la mesure de X est égale à l'accroissement de $d(y)$ dans Y; la distribuante $d(y)$ étant continue, cet accroissement est petit avec $|Y|$ et on achève la démonstration comme celle du lemme 3, car $h(x)$ est absolument continue. Pour déduire l'indépendance, nous aurons à établir la relation (1) où les $f_k(t)$ sont remplacés par les $g_k(f_k(t))$. Or, une relation $g(f(t)) \in I$ équivaut à $f(t) \in J$, J étant un système dénombrable d'intervalles de toutes sortes, mutuellement exclusifs; les f étant bornées, ces intervalles font partie d'un intervalle fini. On n'aura donc qu'a établir (1) en donnant aux I_k la signification de tels systèmes d'intervalles. Remarquons maintenant que (1), qui est valide pour les $f_k(t)$, subsiste quand on remplace les intervalles I par des systèmes finis d'intervalles mutuellement exclusifs. Pour passer au cas de systèmes dénombrables, on décompose chaque J en une somme finie et un reste Z de mesure (L) très petite et on prouve que les mesures $\left|\underset{t}{E}\{f_k \in Z_k\}\right|_R$ tendent vers zéro avec $|Z_k|$; c'est une conséquence de l'hypothèse que les distribuantes des $f_k(t)$ sont absolument continues.

Théorème 1. *Si les fonctions $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_p(t)$, qui constituent un système de fonctions indépendantes dans $(-\infty, \infty)$, sont bornées, alors on a*

(2) $$M_B\{f_1 f_2 \ldots f_p\} = M_B\{f_1\} M_B\{f_2\} \ldots M_B\{f_p\},$$

l'existence des moyennes faisant partie de la thèse.

Démonstration. Remarquons d'abord que la relation (2) a certainement lieu, si les fonctions indépendantes f ne prennent qu'un nombre fini de valeurs; en ce cas les moyennes M_B s'expriment aisément par ces valeurs et l'égalité à établir est une conséquence presque immédiate de la définition 5. Soit maintenant $|f_i(t)| < a$ $(i=1, 2, \ldots, p)$ et

$$E_{k,i}^{(n)} = \underset{t}{E}\left\{\frac{k-1}{n}a \leqslant f_i(t) < \frac{k}{n}a\right\}.$$

Mettons

$$\bar{f}_i(t) = \frac{k-1}{n}a \text{ pour } t \in E_{k,i}^{(n)} \quad (-n+1 \leqslant k < n-1);$$

nous aurons

$$f_i(t) = \bar{f}_i(t) + \varepsilon_i(t), \quad 0 \leqslant \varepsilon_i(t) < \frac{a}{n} \quad (i=1,2,\ldots,p), \tag{3}$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f_1(t)\ldots f_p(t)\,dt &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\bar{f}_1(t)\ldots\bar{f}_p(t)\,dt \\ &+ \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varepsilon_1(t)\bar{f}_2(t)\ldots\bar{f}_p(t)\,dt \\ + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varepsilon_2(t)\bar{f}_1(t)\bar{f}_3(t)\ldots\bar{f}_p(t)\,dt &+ \ldots + \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varepsilon_1(t)\varepsilon_2(t)\ldots\varepsilon_p(t)\,dt.\end{aligned} \tag{4}$$

La remarque faite au début fournit

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\bar{f}_1(t)\ldots\bar{f}_p(t)\,dt = M_B\{\bar{f}_1\ldots\bar{f}_p\} = M_B\{\bar{f}_1\}\ldots M_B\{\bar{f}_p\},$$

ce qui conduit, en tenant compte de (3) et (4), à

$$\begin{aligned}M_B\{\bar{f}_1\}\ldots M_B\{\bar{f}_p\} - \frac{2^p a^p}{n} \leqslant \underline{M}_B\{f_1\ldots f_p\} &\leqslant \overline{M}_B\{f_1\ldots f_p\} \\ &\leqslant M_B\{\bar{f}_1\}\ldots M_B\{\bar{f}_p\} + \frac{2^p a^p}{n}.\end{aligned} \tag{5}$$

Or, $M_B\{f_i\}$ existe en vertu du lemme 2 et (3) donne

$$|M_B\{f_1\}\ldots M_B\{f_p\} - M_B\{\bar{f}_1\}\ldots M_B\{\bar{f}_p\}| \leqslant \frac{2^p a^p}{n};$$

moyennant (5) on en déduit

$$\begin{aligned}-\frac{2^{p+1}a^p}{n} + \prod_{i=1}^{p} M_B\{f_i\} \leqslant \underline{M}_B\{f_1\ldots f_p\} &\leqslant \overline{M}_B\{f_1\ldots f_p\} \\ &\leqslant \prod_{i=1}^{p} M_B\{f_i\} + \frac{2^{p+1}a^p}{n},\end{aligned}$$

ce qui implique la thèse (2).

Théorème 2. *Afin que les fonction $u(t)$ et $v(t)$, relativement mesurables, bornées, aux distribuantes absolument continues, soient indépendantes, il faut et il suffit que l'on ait*

$$M_B\{u^m v^n\} = M_B\{u^m\}\,M_B\{v^n\} \tag{6}$$

pour tous les nombres naturels m, n.

Un critère analogue relatif aux systèmes de plusieurs (>2) fonctions est facile à formuler.

Démonstration. La nécessité résulte sans peine du théorème 1. Pour montrer que (6) implique l'indépendance, constatons d'abord que, dans le cas qui nous occupe, l'indépendance revient à ce que le premier membre de la formule

$$\left|\underset{t}{E}\left\{\begin{matrix}\alpha < u(t) < \beta \\ \gamma < v(t) < \delta\end{matrix}\right\}\right|_R = |\underset{t}{E}\{\alpha < u(t) < \beta\}|_R \times |\underset{t}{E}\{\gamma < v(t) < \delta\}|_R \tag{7}$$

existe et que cette formule soit valable pour tous les α, β, γ, δ réels et finis; en effet, les ensembles $E\{\alpha \leqslant u < \beta\}$, $E\{\alpha < u \leqslant \beta\}$ employés dans la définition 5 ne diffèrent des ensembles de la formule (7) que par des ensembles de mesure nulle, vu la continuité des distribuantes, et les α, β, γ, δ peuvent être supposés finis, puisque les fonctions u, v sont bornées.

Définissons quatre fonctions auxiliaires $\Phi(x)$, $\varphi(x)$, $\Psi(x)$ et $\psi(x)$; soit $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{\beta-\alpha}{2}$, $\varepsilon < \frac{\delta-\gamma}{2}$ et

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x) &= \begin{cases}1 \text{ pour } \alpha \leqslant x \leqslant \beta \\ 0 \text{ pour } x \leqslant \alpha-\varepsilon,\ x \geqslant \beta+\varepsilon\end{cases}, \quad 0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1 \\ \varphi(x) &= \begin{cases}1 \text{ pour } \alpha+\varepsilon \leqslant x \leqslant \beta-\varepsilon \\ 0 \text{ pour } x \leqslant \alpha,\ x \geqslant \beta\end{cases}, \quad 0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1\end{aligned}\right\} \text{ pour tous les } x;$$

on suppose $\Phi(x)$ ainsi que $\varphi(x)$ à dérivée continue; en remplaçant dans la définition ci-dessus α, β par γ, δ, on obtient $\Psi(x)$ et $\psi(x)$; remarquons que les distribuantes de ces quatre fonctions ne sont pas continues.

On aura évidemment

$$(8)\quad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(u(t))\,dt \leqslant \frac{1}{2T}\left|\underset{t}{E}\left\{\begin{matrix}\alpha < u < \beta\\ -T < t < T\end{matrix}\right\}\right| \leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi(u(t))\,dt \quad (T>0).$$

D'après le lemme 3, $\varphi(u(t))$ et $\Phi(u(t))$ sont mesurables R, donc, d'après le lemme 2, les moyennes M_B existent et (8) conduit à

$$(9)\quad M_B\{\varphi(u(t))\} \leqslant |E\{\alpha < u(t) < \beta\}|_R \leqslant M_B\{\Phi(u(t))\}.$$

On obtient de la même manière

$$(10)\quad M_B\{\psi(u(t))\} \leqslant |E\{\gamma < v(t) < \delta\}|_R \leqslant M_B\{\Psi(v(t))\}.$$

Les inégalités

$$(11)\quad \begin{aligned}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\varphi(u(t))\,\psi(v(t))\,dt &\leqslant \frac{1}{2T}\left|\underset{t}{E}\left\{\begin{matrix}\alpha < u < \beta\\ \gamma < v < \delta\\ -T < t < T\end{matrix}\right\}\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi(u(t))\,\Psi(v(t))\,dt\end{aligned}$$

étant faciles à vérifier, nous passons à l'égalité

$$(12)\quad M_B\{\Phi(u(t))\,\Psi(v(t))\} = M_B\{\Phi(u(t))\}\,M_B\{\Psi(v(t))\},$$

où nous aurons à montrer l'existence du premier membre et l'égalité elle-même; nous ne pouvons pas appliquer immédiatement le lemme 4 et le théorème 1, à cause de la discontinuité des distribuantes, signalée plus haut. Approchons $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$ par des polynomes $p(x)$, $q(x)$,

$$|\Phi(x) - p(x)| < \eta, \quad |\Psi(x) - q(x)| < \eta \quad (0<\eta<1),$$

dans l'intervalle $\langle -a, a\rangle$, a étant une borne supérieure pour $u(t)$ et $v(t)$; nous aurons

$$(13)\quad |\Phi(u(t)) - p(u(t))| < \eta, \quad |\Psi(v(t)) - q(v(t))| < \eta$$

pour tous les t et

$$(14)\quad |p(x)| < 2, \quad |q(x)| < 2,$$

ce qui fournit

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|\Phi(u(t))\,\Psi(v(t)) - p(u(t))\,q(v(t))|\,dt < 3\eta,$$

donc aussi

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}p(u)\,q(v)\,dt - 3\eta < \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\Phi(u)\Psi(v)\,dt < \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}p(u)\,q(v)\,dt + 3\eta.$$

On en tire, en appliquant (6),

$$\begin{aligned}M_B\{p(u)\}\,M_B\{q(v)\} - 3\eta \leqslant \underline{M}_B\{\Phi(u)\,\Psi(v)\} &\leqslant \overline{M}_B\{\Phi(u)\,\Psi(v)\}\\ &\leqslant M_B\{p(u)\}\,M_B\{q(v)\} + 3\eta,\end{aligned}$$

les moyennes étant prises, comme toujours, par rapport à t. D'autre part (13) et (14) impliquent

$$|M_B\{\Phi(u)\}\,M_B\{\Psi(v)\} - M_B\{p(u)\}\,M_B\{q(v)\}| < 3\eta,$$

donc, finalement,

$$\begin{aligned}M_B\{\Phi(u)\}\,M_B\{\Psi(v)\} - 6\eta < \underline{M}_B\{\Phi(u)\,\Psi(v)\} &\leqslant \overline{M}_B\{\Phi(u)\,\Psi(v)\}\\ &< M_B\{\Phi(u)\}\,M_B\{\Psi(v)\} + 6\eta,\end{aligned}$$

ce qui établit l'existence de $M_B\{\Phi\Psi\}$ et l'égalité (12). De la même manière on obtient

$$(15)\quad M_B\{\varphi(u(t))\,\psi(v(t))\} = M_B\{\varphi(u(t))\}\,M_B\{\psi(v(t))\}.$$

Les relations (11), (12) et (15) conduisent immédiatement à

$$(16)\quad \begin{aligned}M_B\{\varphi(u)\}\,M_B\{\psi(v)\} \leqslant \left|\underline{\underset{t}{E}\left\{\begin{matrix}\alpha < u < \beta\\ \gamma < v < \delta\end{matrix}\right\}}\right|_R &\leqslant \left|\overline{\underset{t}{E}\left\{\begin{matrix}\alpha < u < \beta\\ \gamma < v < \delta\end{matrix}\right\}}\right|_R\\ &\leqslant M_B\{\Phi(u)\}\,M_B\{\Psi(v)\},\end{aligned}$$

quand on désigne par $|\underline{E}|_R$, $|\overline{E}|_R$ la limite inférieure et supérieure de

$$\frac{1}{2T}\,|E \times \langle -T, T\rangle|$$

pour $T \to \infty$. Les formules (9), (10) et (16) contiennent tout ce qu'il faut pour affirmer l'existence du membre gauche de (7) et la validité de cette relation, pourvu que l'on montre que les différences

$$M_B\{\Phi(u(t))\} - M_B\{\varphi(u(t))\}, \quad M_B\{\Psi(v(t))\} - M_B\{\psi(v(t))\}$$

sont petites avec ε. Or, la première différence est la limite pour $T \to \infty$ de

$$(17)\quad \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\Phi(u(t)) - \varphi(u(t))]\,dt,$$

et la fonction à intégrer est nulle, sauf pour les t appartenant à la somme

$$S = \underset{t}{E}\{\alpha - \varepsilon < u(t) < \alpha + \varepsilon\} + \underset{t}{E}\{\beta - \varepsilon < u(t) < \beta + \varepsilon\};$$

pour $t \in S$, la fonction à intégrer est contenue entre 0 et 1; il s'ensuit que la limite de (17) ne surpasse pas la mesure relative de S; or, cette mesure est petite avec ε à cause de la continuité de la distribuante de $u(t)$. Ainsi la première et de même la deuxième différence est petite avec ε, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Théorème 3. *Si les nombres réels λ_k sont linéairement indépendants, alors les fonctions $\cos \lambda_k t$ constituent un systeme de fonctions indépendantes dans $(-\infty, \infty)$* [5]).

Démonstration. La distribuante de $\cos \lambda t$ pour $(-\infty, \infty)$ est la même que pour $\langle -\pi/\lambda, \pi/\lambda \rangle$, elle est donc absolument continue. Nous pouvons donc appliquer le théorème 2 et réduire la question à la vérification de l'égalité

$$M_B\{(\cos \lambda_1 t)^{p_1} (\cos \lambda_2 t)^{p_2} \ldots (\cos \lambda_n t)^{p_n}\} = M_B\{(\cos \lambda_1 t)^{p_1}\} \ldots M_B\{(\cos \lambda_n t)^{p_n}\}$$

pour tous les systèmes $p_1, p_2, \ldots, p_n$ d'entiers positifs. Or, on a

$$M_B\left\{\left(\frac{e^{i\lambda_1 t} + e^{-i\lambda_1 t}}{2}\right)^{p_1} \ldots \left(\frac{e^{i\lambda_n t} + e^{-i\lambda_n t}}{2}\right)^{p_n}\right\}$$

$$= M_B\left\{\frac{1}{2^{p_1 + \ldots + p_n}} \sum_{k_1 = 0, \ldots k_n = 0}^{p_1, \ldots p_n} \binom{p_1}{k_1} \ldots \binom{p_n}{k_n} e^{i\omega t}\right\} = \frac{1}{2^{p_1 + \ldots + p_n}} \binom{p_1}{p_1/2} \binom{p_2}{p_1/2} \ldots \binom{p_n}{p_n/2}$$

$$= M_B\{(\cos \lambda_1 t)^{p_1}\} \ldots M_B\{(\cos \lambda_n t)^{p_n}\}$$

quand on écrit i pour $\sqrt{-1}$ et ω pour

$$(2k_1 - p_1)\lambda_1 + (2k_2 - p_2)\lambda_2 + \ldots + (2k_n - p_n)\lambda_n.$$

En effet, l'exposant $i\omega t$ ne disparaît que pour $k_1 = p_1/2, \ldots k_n = p_n/2$ et les autres termes de la somme ont une moyenne nulle, car la

[5]) À comparer avec A. Wintner, Über die statistische Unabhängigkeit der asymptotischen Verteilungsfunktionen inkommensurabler Partialschwingungen, Math. Zeitschrift 36 (1933) p. 618–629, 36 (1933) p. 479–480).

moyenne de $\cos \omega t + i \sin \omega t$ est zéro; si un de nombres p_k serait impair, on écrirait zéro au lieu du troisième membre de l'égalité qui subsisterait encore, la moyenne de $(\cos \lambda t)^p$ étant évidemment nulle pour p impair.

Théorème 4. *Le théorème 1 subsiste pour $p = \infty$, si le produit $\prod_{k=1}^{\infty} f_k(t)$ est uniformément convergent.*

Démonstration. A cause de 2, tout ce qu'on a à prouver, est la relation

$$\lim_{n \to \infty} M_B\left\{\prod_{k=1}^{n} f_k(t)\right\} = M_B\left\{\prod_{k=1}^{\infty} f_k(t)\right\}. \tag{18}$$

Or, la différence $\prod_{k=1}^{\infty} - \prod_{k=1}^{n}$ tend uniformément vers zéro; pour n assez grand, on aura donc

$$\left|\underline{M}_B\left\{\prod_{k=1}^{\infty} f_k\right\} - M_B\left\{\prod_{k=1}^{n} f_k\right\}\right| < \varepsilon, \left|\overline{M}_B\left\{\prod_{k=1}^{\infty} f_k\right\} - M_B\left\{\prod_{k=1}^{n} f_k\right\}\right| < \varepsilon, \tag{19}$$

ce qui implique

$$\left|\overline{M}_B\left\{\prod_{k=1}^{\infty} f_k\right\} - \underline{M}_B\left\{\prod_{k=1}^{\infty} f_k\right\}\right| < 2\varepsilon;$$

cette inégalité montre l'existence de $M_B\left\{\prod_1^{\infty}\right\}$; en remplaçant dans (19) $\underline{M}_B$ par M_B on obtient (18).

Théorème 5. *Si les λ_k sont linéairement indépendants, alors on a*

$$\lim_{n \to \infty} \left|\underset{t}{E}\left(\alpha < \frac{\cos \lambda_1 t + \cos \lambda_2 t + \ldots + \cos \lambda_n t}{\sqrt{n}} < \beta\right)\right|_R = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Démonstration. Le théorème 3 permet d'appliquer ici le même raisonnement qui nous a conduit au théorème 1 de la Communication II [4]) dans le cas d'un intervalle fini; ce raisonnement repose sur l'indépendance des fonctions, qui est vérifiée ici; le coefficient 2 au dénominateur à gauche disparaît à cause de $M_B\{\cos^2 \lambda t\} = 1/2$.

[4]) Loc. cit. [1a]), p. 59–60.

La fonction $\zeta(s)$[5]). Cette fonction classique est un exemple intéressant sur lequel on peut voir comment notre théorie simplifie certains raisonnements. En effet, les fonctions $|\zeta(s)|$ et $1/|\zeta(s)|$ considérées pour $s=\sigma_0+i\tau$, $\sigma_0>1$ comme fonctions de τ sont des produits uniformément convergents de fonctions indépendantes et bornées. Pour s'en convaincre, écrivons

$$|\zeta(s)|=\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\right|=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left|1-\frac{1}{p_k^s}\right|}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|1-e^{-(\sigma_0+i\tau)\log p_k}|},$$

p_k étant le k-ième nombre premier. Posons

$$r_k=e^{-\sigma_0\log p_k},\quad \lambda_k=\log p_k;$$

les λ_k seront linéairement indépendants, car une relation $\sum_{k=1}^{m}c_k\lambda_k=0$ avec des c_k entiers non tous nuls conduit à une contradiction avec l'unicité de la décomposition des entiers en facteurs premiers. On aura donc

$$|\zeta(s)|=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2r_k\cos\lambda_k\tau+r_k^2}},\quad \frac{1}{|\zeta(s)|}=\prod_{k=1}^{\infty}\sqrt{1-2r_k\cos\lambda_k\tau+r_k^2},$$

les produits étant uniformément convergents à cause de

$$\sqrt{1-2r_k\cos\lambda_k\tau+r_k^2}\geqslant 1-r_k,\quad \sum_{k=1}^{\infty}r_k<\infty.$$

Pour obtenir notre assertion, il suffit maintenant de rappeler le théorème 3, la première phrase de sa démonstration et le lemme 4.

[5]) E. C. Titchmarsh, The Zeta-function of Riemann, Cambridge 1930; H. Bohr und B. Jessen, Über die Werteverteilung der Riemannschen Zetafunktion, Acta Math. 54 (1930) p. 1—35; B. Jessen, Eine Integrationstheorie für Funktionen unendlich vieler Veränderlichen, mit Anwendung auf das Werteverteilungsproblem für fastperiodische Funktionen, insbesondere für die Riemann'sche Zetafunktion, Internationaler Mathematikerkongress in Zürich 1932, p. 59—65; A. Wintner, Über die asymptotische Verteilung von fastperiodischen Funktionen mit linear unabhängigen Exponenten, Prace Mat.-Fiz. 53 (1936) p. 55—62; nos résultats ne s'appuyent pas sur les travaux que nous citons ici, mais notre chemin se rapproche en plusieurs points à celui de leurs auteurs; B. Jessen and A. Wintner, Distribution functions and the Riemann Zeta function, Trans. Am. Math. Soc. 38 (1935) p. 48—88, donnent une bibliographie de 60 travaux; voir aussi B. Jessen, Some analytical problems relating to probability, Journ. of Math. and Phys. 14 (1935) p. 24—27.

Nous sommes donc en état d'appliquer le théorème 4, ce qui donne pour $\sigma_0>1$

$$M_B\{|\zeta(\sigma_0+i\tau)|\}=\prod_{k=1}^{\infty}M_B\left\{\frac{1}{\sqrt{1-2r_k\cos\lambda_k\tau+r_k^2}}\right\}$$
$$=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{\sqrt{1-2r_k\cos\gamma+r_k^2}},$$

et de même, pour tout l réel,

$$M_B\{|\zeta(\sigma_0+i\tau)|^{2l}\}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{(1-2r_k\cos\gamma+r_k^2)^l}\quad(=\zeta(2\sigma_0)\text{ pour }l=1)\tag{20}$$

Lemme 5.

$$\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2}\right)^l d\gamma=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2}{1-\varrho^2}\right)^{l-1}d\gamma\quad(0\leqslant\varrho<1)\tag{21}$$

On vérifie ce lemme en faisant le changement de variables

$$t=\frac{1-\varrho^2}{1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2},\quad t'=\frac{1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2}{1-\varrho^2}.$$

Théorème 6.

$$M_B\{|\zeta(\sigma_0+i\tau)|^{2l}\}=\zeta^{2l-1}(2\sigma_0)\,M_B\left\{\left|\frac{1}{\zeta(\sigma_0+i\tau)}\right|^{2l-2}\right\}\qquad(\sigma_0>1)$$

pour tout l réel.

Ce théorème résulte de (20) quand on y substitue successivement $l=l'$, $l=-l'+1$ en tenant compte de (21).

On tire aussi de (20)

$$\left(M_B\{|\zeta(\sigma_0+i\tau)|^{2l}\}\right)^{1/2l}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2\pi)^{1/2l}}\left(\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{(1-2r_k\cos\gamma+r_k^2)^l}\right)^{1/2l}$$

et, en passant à la limite pour $l\to\infty$, on obtient la *relation connue*

$$\overline{\overline{M}}|\zeta(\sigma_0+i\tau)|\left(=\prod_{k=1}^{\infty}\max_{0\leqslant\gamma\leqslant 2\pi}\frac{1}{\sqrt{1-2r_k\cos\gamma+r_k^2}}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1-r_k}\right)=\zeta(\sigma_0),$$

en désignant par $\overline{\overline{M}}|\zeta|$ la limite supérieure essentielle; on entend par là un nombre tel que $\overline{\overline{M}}-\varepsilon$ est dépassé pour un ensemble des τ de mesure relative positive, tandis que $\overline{\overline{M}}+\varepsilon$ n'est dépassé que dans un ensemble de mesure relative nulle, quel que soit $\varepsilon > 0$ [6]).

Montrons encore, comment on obtient la *formule classique*

$$M_B\left\{|\zeta(\sigma_0+i\tau)|^{2l}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_l^2(n)}{n^{2\sigma_0}} \qquad (\sigma_0>1,\ l>1). \tag{22}$$

En écrivant $z=\varrho e^{i\gamma}$, $\bar{z}=\varrho e^{-i\gamma}$, il vient successivement $(0\leqslant\varrho<1)$

$$(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^{-l}=(1-z)^{-l}(1-\bar{z})^{-l},$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{(1-2\varrho\cos\gamma+\varrho^2)^l}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[1+lz+\frac{l(l+1)}{1.2}z^2+..\right]\left[1+l\bar{z}+\left(\frac{l(l+1)}{1.2}\right)\bar{z}^2+..\right]d\gamma$$

$$=1+l^2\varrho^2+\left(\frac{l(l+1)}{1.2}\right)^2\varrho^4+\dots,$$

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\gamma}{(1-2r_k\cos\gamma+r_k^2)^l}\right)$$

$$=\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1+\left(\frac{l}{1}\right)^2\frac{1}{p_k^{2\sigma_0}}+\left(\frac{l(l+1)}{1.2}\right)^2\frac{1}{p_k^{4\sigma_0}}+\dots\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathcal{A}_l^2(n)}{n^{2\sigma_0}},$$

$\mathcal{A}_l(n)$ signifiant le nombre de décompositions de n en l facteurs, si l est un entier positif, et en général

$$\mathcal{A}_l(n)=\prod_{j=1}^{m}\frac{l(l+1)\dots(l+\alpha_j-1)}{1.2\dots\alpha_j},\quad \text{si } n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}.$$

Il est à remarquer que la formule (22) a été démontré par M. A. E. Ingham en 1933 pour $\sigma_0>(\max 1/2, 1-1/l)$ [7]). Un objet des recherches spéciales de la théorie de la fonction $\zeta(s)$ est la validité des formules, quand on supprime la condition $\sigma_0>1$; nous n'avons voulu que mettre au jour le lien entre la théorie de la fonction $\zeta(s)$ (et d'autres fonctions analogues) et la théorie des fonctions indépendantes.

(Reçu par la Rédaction le 29. 10. 1936).

[6]) Titchmarsh, loc. cit. [5]), p. 6—11. Notre méthode fournit aussi la limite inférieure essentielle.

[7]) A. E. Ingham, Mean-value theorems and the Riemann Zeta-function, Quarterly Journal of Mathematics, Oxford series 4 (1933) p. 278—290. La valeur moyenne résulte d'un théorème classique de M. Hadamard; le développement en série a été démontré pour tous les l réels par M. E. C. Titchmarsh: Mean value theorems in the theory of the Riemann Zeta-function, Messenger of Math. 58 (1928) p. 125—129.