[3] A. Jonsson and H. Wallin, *A trace theorem for generalized Besov spaces with three indexes.* in: Colloq. Math. Soc. J. Bolyai 19. Fourier Analysis and Approximation Theory, Budapest 1976, pp. 429-449.
[4] J.-P. Kahane et R. Salem, *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*, Hermann, Paris 1963.
[5] P. I. Lizorkin, *Operators connected with fractional differentiation and classes of differentiable functions*, Trudy Mat. Inst. Steklov 117 (1972), pp. 251–286.
[6] S. M. Nikol'skii, *Approximation of functions of several variables and imbedding theorems*, Springer-Verlag, Berlin 1975.
[7] T. Sjölin, *Bessel potentials and extension of continuous functions on compact sets*, Ark. Mat. 13 (1975), pp. 263–271.
[8] — *Capacities of compact sets in linear supspaces of* $\boldsymbol{R}^n$, Pacific J. Math. 78 (1978), pp. 261–266.
[9] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, Princeton 1970.
[10] H. Treibel, *Remarks on multiple Fourier series*, Anal. Math. 2 (1976), pp. 305–317.
[11] H. Wallin, *Continuous functions and potential theory*, Art. Mat. 5 (1963), pp. 55–84.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
UNIVERSITY OF UMEÅ, UMEÅ, SWEDEN

Received September 26, 1977 (1352)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVIII. (1980)

Sur le minimum des fonctionnelles dans les espaces de Banach

par

T. LEŻAŃSKI (Lublin)

Résumé. Soit Φ une fonctionnelle continue sur l'espace de Banach, remplissant l'inégalité; $\Phi(tx+(1-t)y) \leqslant t\Phi(x)+(1-t)\Phi(y)-\Gamma(t, \|x-y\|)$ où $\Gamma(t, s)$ satisfait aux certaines conditions spéciales. On montre l'existence d'un seul point minimal de Φ: $\Phi(\bar{x}) = \inf \Phi(x)$: $x \in X$ et on établie une limitation pour la distance $\|x-\bar{x}\|$ pour x arbitraire.

Soit Ψ une autre fonctionnelle, continue, convexe et non-négative; à tout $\lambda \geqslant 0$ on fait correspondre un élément x_λ tel que $\Phi(x_\lambda)+\lambda(x_\lambda) = \inf(\Phi(x)+\lambda\Psi(x))$: $x \in X$. La fonction x_λ possède la limite $\bar{z}$ (si $\lambda \to \infty$) et on a: $\Phi(\bar{z}) = \inf \Phi(x)$: $\Psi(x) = 0$.

Enfin, on présente une application de la théorie exposée ci-dessus à la calculation numérique d'un point minimal absolu et relatif, en se servant d'ainsi dits espaces des suite concordantes [2].

Ce travail comprend trois parties; dans la premiére, nous considérons le problème du minimum "absolu"

$$(*) \qquad \inf \Phi(x):\ x \in X,$$

X étant un espace de Banach (non réflexif), Φ une fonctionnelle définie sur X. Nous montrons l'existence d'une solution $\bar{x}$ unique de $(*)$ et déduisons quelques limitations pour $\|x-\bar{x}\|$, $x \in X$ — arbitraire. La deuxième partie contient la solution du problème du minimum "relatif", c.-à-d. du problème consistant à trouver $\bar{z} \in Z$ tel que

$$**) \qquad \inf \Phi(z):\ z \in Z = \Phi(\bar{z}),$$

Z étant un sous-ensemble fermé convexe de X. Enfin, dans la troisième partie, nous appliquons les résultats des parties 1° et 2° aux problèmes $(*)$ et $(**)$ dans des espaces spéciaux, appelés "espaces de suites concordantes" ou bien espaces du type $\{X_n\}$. Expliquons-le plus en détail: soit $\{X_n\}$ une suite d'espaces de Banach et considérons les suites $\{x_n\}$: $x_n \in X_n$. Certaines d'elles sont distinguées comme "concordantes" (corrélatif des suites de Cauchy); les suites concordantes forment un espace de Banach, appelé espace du type $\{X_n\}$. Voici l'ordre des idées de la troisiéme partie: on représente l'espace donné X comme un espace du type $\{X_n\}$ (ce qui est possible dans plusieurs cas), on met la fonctionnelle Φ et le sous-ensemble Z sous la forme $\{\Phi_n\}$ et Z resp., Φ_n étant définie sur X_n et $Z_n \subset X_n$, enfin on remplace le problème (**) par une suite de problèmes du même type, mais, chacun d'eux, dans l'espace X_n:

$$(\ast\ast_\ast) \qquad \inf \Phi_n(z):\ z \in Z_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soit $\bar{z}_n$ la solution de $(\ast\ast_\ast)$. Nous déduisons dans la troisième partie les conditions suffisantes pour que la suite $(\bar{z}_n)$ soit concordante et que $\Phi_n(\bar{z}_n) \to \Phi(\bar{z})$, où $\bar{z}$ est la solution (supposée unique) de (**). Alors $\bar{z}$ est, dans un certain sens, approché par les "$\bar{z}_n$"; si les X_n sont de dimension finie, les $\bar{z}_n$ peuvent être calculés numériquement, de sorte que la troisième partie constitue une justification théorique de la solution numérique du problème (**).

Il existe un grand nombre de travaux concernant les problèmes (*) et (**), en particulier leur solution numérique; nous en citons quelques uns. Les idées qui se rapprochent le plus de celles qui sont exposées dans ce travail sont contenues dans [3] et [4], mais les hypothèses sont plus fortes (l'espace X est réflexif, Φ admet une dérivée de Fréchet). M. M. Vaïnberg [7] démontre l'existence d'une solution du problème (*), cependant sans déduire des limitations pour la solution $\bar{x}$. D. Morrison [6] présente une méthode récurrente pour calculer $\inf \Phi$. La plupart des auteurs se bornent à ramener le problème (*) à un problème du type (**), avec une autre fonctionnelle, le plus souvent dans l'espace euclidien.

1. Le minimum absolu des fonctionnelles.

1.1. *Notations, definitions et hypotheses.* Soient: X un espace de Banach, X^* son adjoint. Les éléments de X (resp. de X^*) seront désignés par x, y, z, h, a (resp. f, g). Si $f \in X^*$ et $x \in X$, on écrira souvent (f, x) au lieu de $f(x)$. Certaines fonctions réelles fixées seront désignées par $\gamma, \gamma_1, \psi_0, \psi_1, \varphi, \Gamma$, leurs arguments réels par t, λ, μ, ξ.

Soit $\gamma(t)$ $(t \geqslant 0)$ une fonction réelle fixée, continue, strictement croissante vers $+\infty$ si $t \to +\infty$, telle que $\gamma(0) = 0$. Posons:

1.1.1. DÉFINITION. $\gamma_1(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \gamma(t)\,dt = \lambda \int\limits_0^1 \gamma(t\lambda)\,dt$.

1.1.2. DÉFINITION. $\psi_0(\lambda, \xi) = \gamma_1(\lambda) - \lambda\xi$ $(\lambda, \xi \geqslant 0)$.

Il résulte des hypothèses faites sur la fonction $\gamma(.)$ que pour tout $\xi > 0$ il existe exactement un nombre $\lambda_\xi > 0$ tel que $\gamma(\lambda_\xi) = \xi$. On en tire:

1.1.3. $\quad \psi_0(\lambda_\xi, \xi) = \inf\limits_{\lambda>0} \psi_0(\lambda, \xi)$ (ξ fixé),

vu que $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\psi_0(\lambda, \xi) = \gamma(\lambda) - \xi$ et que $\psi_0(\lambda, \xi)$ est une fonction convexe par rapport à λ. Posons:

1.1.4. DÉFINITION. $\psi_1(\xi) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi_0(\gamma^{-1}(\xi), \xi) = \psi_0(\lambda_\xi, \xi) = \inf\limits_{\lambda>0} \psi_0(\lambda, \xi)$,

et établissons quelques propriétés de la fonction ψ_1:

1.1.5. $\quad \xi_1 < \xi_2 \Rightarrow \psi_1(\xi_1) > \psi_1(\xi_2)$,

$$\psi_1(0) = 0, \qquad \psi_1(\xi) \to -\infty \qquad (\xi \to +\infty).$$

En effet, $\xi_1 < \xi_2$ implique:

$$\psi_1(\xi_1) = \psi_0(\gamma^{-1}(\xi_1), \xi_1) > \psi_0(\gamma^{-1}(\xi_1), \xi_2) \geqslant \inf_{\lambda>0} \psi_0(\lambda, \xi_2) = \psi_0(\gamma^{-1}(\xi_2), \xi_2) = \psi_1(\xi_2).$$

De plus,

$$\psi_1(\xi) = \inf_{\lambda>0} \psi_0(\lambda, \xi) = \inf_{\lambda>0}[\gamma_1(\lambda) - \lambda\xi] \leqslant \gamma_1(1) - \xi \to -\infty \text{ si } \xi \to +\infty.$$

Enfin,

$$\psi_1(0) = \psi_0(\gamma^{-1}(0), 0) = \psi_0(0, 0) = \gamma_1(0) = 0. \ \blacksquare$$

La fonction $-\psi_1$ admet alors une inverse, que nous désignerons par φ et noterons comme il suit:

1.1.6. DÉFINITION. $\varphi(s) = \xi \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \psi_1(\xi) = -s$, c.-à-d. $\psi_1(\xi) = -\varphi^{-1}(\xi)$, $s, \xi \in \langle 0, +\infty)$.

Il est facile de voir que toutes les fonctions $\gamma, \gamma_1, \psi_0, \psi_1, \varphi$ sont continues. De plus, on a:

1.1.7. $\quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(s) \to +\infty$ si $s \to +\infty$.

Définissons enfin la fonction Γ:

1.1.8. DÉFINITION. $\Gamma(t, s) \overset{\mathrm{df}}{=} t\gamma_1((1-t)s) + (1-t)\gamma_1(t.s)$.

On vérifie immédiatement que

1.1.9. $\quad \Gamma(0, s) = 0, \quad \Gamma(t, s) = \Gamma((1-t), s), \quad \lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \dfrac{1}{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon, s) = \gamma_1(s)$.

Soit Φ une fonctionnelle réelle continue, définie sur l'espace X tout entier, et satisfaisant aux hypothèses:

1.1.10. HYPOTHÈSE. *Il existe une fonction réelle $\beta(r)$ croissante, continue et positive, telle que*

(i) $\quad x_i \in X$, $\|x_i\| \leqslant r$ $(i = 1, 2) \Rightarrow |\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| \leqslant \beta(r)\|x_1 - x_2\|$.

1.1.11. HYPOTHÈSE. $\Phi(x+th) - \Phi(x) \leqslant t[\Phi(x+h) - \Phi(x)] - \Gamma(t, \|h\|)$ *pour* $t \in \langle 0, 1\rangle$, $x, h \in X$.

1.2. *Propriétés de Φ.*

1.2.1. Lemme. *Soient $x \in X$ un élément fixé, M un nombre positif vérifiant* (i):

(i) $$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\left|\frac{1}{t}[\Phi(x+th)-\Phi(x)]\right| \leqslant M\|h\| \quad \textit{pour tout } h \in X.$$

Alors on a (ii):

(ii) $$\bigwedge_{h\in X} \Phi(x+h)-\Phi(x) \geqslant \gamma_1(\|h\|)-M.\|h\| \geqslant \psi_1(M).$$

Démonstration. Soit $t \in (0,1)$; divisons les deux membres de 1.1.11 par t; nous obtenons, tenant compte de 1.1.11:

(a) $$\Phi(x+h)-\Phi(x) \geqslant \frac{1}{t}[\Phi(x+th)-\Phi(x)]+\frac{1}{t}\Gamma(t, \|h\|)$$
$$\geqslant \frac{1}{t}\Gamma(t, \|h\|)-\left|\frac{1}{t}[\Phi(x+th)-\Phi(x)]\right|,$$

d'où l'on tire

(b) $$\Phi(x+h)-\Phi(x) \geqslant \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\Gamma(t, \|h\|)-\overline{\lim}\left|\frac{1}{t}[\Phi(x+th)-\Phi(x)]\right|$$
$$\geqslant \gamma_1(\|h\|)-M.\|h\| \geqslant \inf_{\lambda>0}[\gamma_1(\lambda)-M.\lambda] = \psi_1(M). \ \blacksquare$$

Remarque. Un nombre M satisfaisant à 1.2.1 (i) existe pour tout $x \in X$ en vertu de l'hypothèse 1.1.10.

1.2.2. Lemme. *Soient: $x, h \in X$, $r \in \boldsymbol{R}^1$, $r > \|x\|$. Alors on a:*

(i) $$\Phi(x+h)-\Phi(x) \geqslant \|h\|\left\{\int_0^1 \gamma(t\|h\|)\,dt-\beta(r)\right\} \geqslant \psi_1(\beta(r))$$

(définition de $\beta(r)$ — v. 1.1.10).

Démonstration. Pour $t > 0$ satisfaisant à $|t| < (r-\|x\|)\|h\|^{-1}$ on a aussi: $\|x+th\| < r$, d'où, en vertu de 1.1.10 (en y posant $x_1 = x+th$, $x_2 = x$), on obtient

(a) $$\left|\frac{1}{t}[\Phi(x+th)-\Phi(x)]\right| \leqslant \beta(r).\|h\| \quad (\text{pour } |t| < (r-\|x\|)\|h\|^{-1}).$$

Le lemme 1.2.1 nous donne immédiatement:

(b) $$\Phi(x+h)-\Phi(x) \geqslant \gamma_1(\|h\|)-\beta(r)\|h\| = \|h\|\left\{\int_0^1 \gamma(t\|h\|)\,dt-\beta(r)\right\}$$
$$\geqslant \psi_1(\beta(r)) \quad (\text{voir } 1.1.1). \ \blacksquare$$

1.2.3. Théorème. *La fonctionnelle Φ est bornée inférieurement et tend vers $+\infty$, si $\|x\| \to \infty$; on le note comme il suit:*

(i) $\bigvee_{c>0}\bigwedge_{x\in X} \Phi(x) \geqslant c$; (ii) $\bigwedge_{s>0}\bigvee_{t>0} \|x\| > t \Rightarrow \Phi(x) > s$.

Démonstration. On tire de 1.2.2 (i), en y posant $x = 0$,

$$\Phi(h) \geqslant \Phi(0)+\|h\|\left\{\int_0^1 \gamma(t\|h\|)\,dt-\beta(1)\right\}$$
$$\geqslant \Phi(0)+\psi_1(\beta(1)),$$

d'où (i) et (ii). $\blacksquare$

1.2.4. Lemme. *Posons $d = [\inf \Phi(x)\colon x \in X]$. On a, pour $x_i \in X$,*

(i) $$\|x_1-x_2\| \leqslant \sum_{i=1}^{2} \gamma_1^{-1}(\Phi(x_i)-d).$$

Démonstration. Posons $f(t) = \Phi(x_1+t(x_2-x_1))$. Comme Φ est continue et croissante vers $+\infty$ (si $\|x\| \to \infty$), la fonction réelle f est aussi continue et satisfait à

(a) $$|f(t)| \to +\infty \quad \text{si} \quad |t| \to +\infty.$$

Il existe alors une valeur de l'argument t, soit t_0, telle que

(b) $$f(t_0) = [\inf f(t)\colon t \in \boldsymbol{R}].$$

Posons: $x_0 = x_1+t_0(x_2-x_1)$ et substituons dans l'hypothèse 1.1.11 $h = x_1-x_0$. On obtient, pour $t \in (0,1)$,

(c) $$0 \leqslant \frac{1}{t}[f(t_0-tt_0)-f(t_0)] = \frac{1}{t}[\Phi(x_1+(t_0-tt_0)(x_2-x_1))-\Phi(x_0)]$$
$$= \frac{1}{t}[\Phi(x_0+t(x_1-x_0))]-\Phi(x_0)$$
$$\leqslant \Phi(x_0+(x_1-x_0))-\Phi(x_0)-\frac{1}{t}\Gamma(t, \|x_1-x_0\|),$$

d'où l'on tire, en passant à la limite avec $t\downarrow 0$ et en tenant compte de 1.1.9:

(d) $$0 \leqslant \Phi(x_1)-\Phi(x_0)-\gamma_1(\|x_1-x_0\|).$$

La fonction γ_1 étant croissante (v. 1.1.1), on tire de (d):

(e) $$\|x_1-x_0\| \leqslant \gamma_1^{-1}(\Phi(x_1)-\Phi(x_0)) \leqslant \gamma_1^{-1}(\Phi(x_1)-d).$$

Nous avons utilisé l'identité $x_0+t(x_1-x_0) = x_1+(t_0-tt_0)(x_2-x_1)$; en faisant usage de l'identité pareille: $x_0+t(x_2-x_0) = x_1+(t_0+t-t_0t)\times\times(x_2-x_1)$ et en substituant dans 1.1.11 x_2-x_0 au lieu de h, on obtient, tout comme auparavant:

(f) $$0 \leqslant \frac{1}{t}[f(t_0+t-t_0t)-f(t_0)] = \frac{1}{t}\big[\Phi\big(x_1+(t_0+t-t_0t)(x_2-x_1)\big)\big]-\Phi(x_0)$$
$$= \frac{1}{t}\big[\Phi\big(x_0+t(x_2-x_0)\big)-\Phi(x_0)\big]$$
$$\leqslant \Phi\big(x_0+(x_2-x_0)\big)-\Phi(x_0)-\frac{1}{t}\Gamma(t, \|x_2-x_0\|),$$

d'où, comme plus haut,

(g) $$\|x_2-x_0\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(x_2)-\Phi(x_0)\big) \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(x_2)-d\big).$$

Or, (e) et (g) entraînent la conclusion du lemme. ∎

1.2.5. THÉORÈME. *Il existe exactement un élément $\bar{x} \in X$ tel que $\Phi(\bar{x}) = d = [\inf\Phi(x): x \in X]$. On a, de plus:*

(i) $$\|x-\bar{x}\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(x)-d\big) \quad \textit{pour tout } x \in X.$$

Si le nombre M satisfait à l'hypothèse (i) *de* 1.2.1, *on a*

(ii) $$\Phi(x)-d \leqslant -\psi_1(M),$$

(iii) $$\|x-\bar{x}\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(-\psi_1(M)\big),$$

(iv) $$\|\bar{x}\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(-\psi_1(\beta(r))\big) \quad \textit{pour tout } r > 0.$$

Démonstration. Φ étant bornée inférieurement, il existe une suite d'éléments: $x_1, x_2, \ldots$ telle que $\Phi(x_n)\downarrow \inf\Phi = d$. En vertu de 1.2.4 on a $\|x_n-x_m\| \to 0$ $(n, m \to \infty)$. Il existe alors un $\bar{x} \in X$ tel que $\|x_n-\bar{x}\| \to 0$, d'où $\Phi(\bar{x}) = \lim_n \Phi(x_n) = d$. Si pour un $x' \in X$ on a: $\Phi(x') = d$, il vient, en vertu de 1.2.4, $\|x'-\bar{x}\| = 0$, d'où résulte l'unicité de l'élément minimal. Posons dans 1.2.4 $x_1 = \bar{x}$, $x_2 = x$, nous obtenons ainsi (i). L'inégalité (ii) résulte de 1.2.1 si l'on y pose $h = \bar{x}-x$. (iii) est une conséquence immédiate de (i) et (ii). Pour établir (iv), on pose dans 1.2.2 $x = 0$, $h = \bar{x}$, et on obtient, pour $r > 0$ arbitraire,

(a) $$\Phi(0)-d = \Phi(0)-\Phi(\bar{x}) \leqslant -\psi_1\big(\beta(r)\big),$$

d'où (iv), en tenant compte de (i). ∎

1.2.6. LEMME. *Soient $x, y \in X$; supposons que pour tout $t \in (0,1)$ on ait* (i): $\Phi\big(x+t(y-x)\big)-\Phi(x) \geqslant 0$.

Conclusion: $\|x-y\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(y)-\Phi(x)\big)$.

Démonstration. Posons dans 1.1.11 $h = y-x$ et divisons les deux membres de l'inégalité obtenue par $t > 0$; nous obtenons ainsi

(a) $$0 \leqslant \frac{1}{t}\big[\Phi\big(x+t(y-x)\big)-\Phi(x)\big] \leqslant \Phi(y)-\Phi(x)-\frac{1}{t}\Gamma(t, \|y-x\|),$$

d'où, en passant à la limite avec $t\downarrow 0$,

(b) $$0 \leqslant \Phi(y)-\Phi(x)-\gamma_1(\|y-x\|).$$

On en tire la conclusion demandée, puisque γ_1 est inversible. ∎

1.3. *Cas où le gradient de Φ existe.* Supposons que pour tout couple $x, h \in X$ existe l'expression: $\Phi'(x,h) \stackrel{\text{df}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\Phi(x+th)-\Phi(x)]$ et que $\Phi'(x,h)$ soit une fonctionnelle linéaire bornée par rapport à h, pour tout $x \in X$. Il existe alors un seul élément $F(x) \in X^*$, nommé grad $\Phi(x)$, tel que

1.3.1. $\big(F(x), h\big) = \Phi'(x, h) \quad (x, h \in X)$.

1.3.2. HYPOTHÈSE. *Pour $x, h, f \in X$ la fonction réelle de $t \in \boldsymbol{R}$ $f(t) \stackrel{\text{df}}{=} \big(F(x+th), f\big)$ est continue par rapport à t.*

1.3.3. THÉORÈME. *Chacune des conditions suivantes*: (i), (ii) *équivaut à l'hypothèse* 1.1.11:

(i) $$\Phi(x+h)-\Phi(x) \geqslant \gamma_1(\|h\|)+\big(F(x), h\big),$$

(ii) $$\Phi\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big) \leqslant \lambda\Phi(x_1)+(1-\lambda)\Phi(x_2)-\Gamma(\lambda, \|x_2-x_1\|),$$
$$x_1, x_2 \in X, \ \lambda \in 0,1.$$

Démonstration. 1°. 1.1.11 ⇒ (i). Divisons les deux membres de 1.1.11 par $t > 0$; en passant à la limite avec $t\downarrow 0$ on obtient, en vertu de 1.1.9:

(a) $$\big(F(x), h\big) = \Phi'(x, h) = \lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}[\Phi(x+th)-\Phi(x)]$$
$$\leqslant \Phi(x+h)-\Phi(x)-\gamma_1(\|h\|).$$

2°. (i) ⇒ (ii). Posons, pour $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in (0,1)$,

(a) $$x_0 = \lambda x_1+(1-\lambda)x_2.$$

Remplaçons dans (i) x et h par x_0 et x_i-x_0 $(i = 1, 2)$ respectivement; multiplions les inégalités ainsi obtenues par λ et $1-\lambda$ et ajoutons-les. Il vient

(b) $$\Phi\big(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)-[\lambda\Phi(x_1)+(1-\lambda)\Phi(x_2)]$$
$$\leqslant \lambda\gamma_1(\|x_1-x_0\|)+(1-\lambda)\gamma_1(\|x_2-x_0\|)+\big(F(x_0), \lambda x_1+(1-\lambda)x_2\big)$$
$$= \lambda\gamma_1\big((1-\lambda)\|x_2-x_1\|\big)+(1-\lambda)\gamma_1(\lambda\cdot\|x_2-x_1\|) = \Gamma(\lambda, \|x_2-x_1\|),$$

vu que $x_1-x_0 = -(1-\lambda)(x_2-x_1)$ et $x_2-x_0 = \lambda(x_2-x_1)$.

3°. (ii) $\Rightarrow$ 1.1.11. Substituons dans (ii) x, $x+h$, $1-t$ au lieu de x_1, x_2, λ, resp.; on obtient ainsi 1.1.11, vu que $\Gamma((1-t), s) = \Gamma(t, s)$. ■

1.3.4. Remarque. La condition: $(F(x+h)-F(x), h) \geqslant \gamma(\|h\|)\cdot\|h\|$ ($x, \lambda \in X$) entraîne 1.3.3 (i). En effet, on a:

$$\Phi(x+h)-\Phi(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\Phi(x+th)\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t}\big(F(x+th)-F(x), th\big)\,dt + \big(F(x), h\big)$$

$$\geqslant \int_0^1 \gamma(\|th\|)\,dt + \big(F(x), h\big) = \gamma_1(\|h\|) + \big(F(x), h\big). \ ■$$

1.3.5. Pour l'élément minimal $\bar{x}$ et l'élément arbitraire $x \in X$ la limitation suivante a lieu:

(i) $$\|\bar{x}-x\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(-\psi_1(\|F(x)\|)\big).$$

En effet, le nombre $M \overset{\text{df}}{=} \|\operatorname{grad}\Phi(x)\| = \|F(x)\|$ satisfait à l'hypothèse (i) du lemme 1.2.1, d'où la conclusion, en vertu de 1.2.5 (iii).

2. Le minimum conditionnel des fonctionnelles.

2.1. *Introduction.* Nous maintenons en vigueur toutes les définitions et notations des numéros précédents, aussi bien que les hypothèses des points 1.1, 1.2. Soit $Z \subset X$ un ensemble convexe et fermé et supposons que Φ n'admette pas de minimum absolu dans Z: $\bar{x} \notin Z$. Soit $\Psi(x)$ une autre fonctionnelle, définie sur l'espace X tout entier, satisfaisant aux hypothèses suivantes:

2.1.1. Hypothèse. $\|x_i\| \leqslant r$ $(i = 1, 2) \Rightarrow |\Psi(x_1)-\Psi(x_2)| \leqslant \beta(r)\,\|x_1-x_2\|$ (*$\beta(r)$ étant la fonction du numéro* 1.1.9).

2.1.2. Hypothèse. $\Psi(x) = 0$ *équivaut à*: $x \in Z$, *ailleurs* $\Psi(x) > 0$.

2.1.3. Hypothèse. $\Psi(x+th)-\Psi(x) \leqslant t[\Psi(x+h)-\Psi(x)]$ (*en d'autres termes*: Ψ *est convexe*).

2.1.4. Définition. $\Phi_\lambda(x) \overset{\text{df}}{=} \Phi(x)+\lambda\Psi(x)$ $(\lambda \geqslant 0,\ x \in X)$.

De ce qui a été dit plus haut il s'ensuit que toutes les hypothèses des numéros précédents restent en vigueur si l'on remplace Φ par Φ_λ, $\beta(r)$ par $(1+\lambda)\beta(r)$; les fonctions $\gamma, \gamma_1, \gamma_0$, etc. ne changent pas. À tout $\lambda \geqslant 0$ correspond alors un $X_\lambda \in X$ tel que

2.1.5. $\Phi_\lambda(x_\lambda) = [\inf \Phi_\lambda(x)\colon x \in X]$.

Nous avons ainsi défini une fonction abstraite

$$x_\lambda\colon (0, \infty) \ni \lambda \to x_\lambda \in X.$$

2.2. *Propriétés de x_λ.*

2.2.1. Lemme. $\Psi(x) \leqslant \Psi(x_\lambda) \Rightarrow \Phi(x) \geqslant \Phi(x_\lambda)$ (*en d'autres termes*: $\Phi(x_\lambda) = [\inf\Phi(x)\colon \Psi(x) \leqslant \Psi(x_\lambda)]$).

Démonstration. Multiplions l'inégalité: $\Psi(x_\lambda) \geqslant \Psi(x)$ par $-\lambda$ et ajoutons-la à la suivante:

(a) $$\Phi(x_\lambda)+\lambda\Psi(x_\lambda) \leqslant \Phi(x)+\lambda\Psi(x),$$

qui découle de 2.1.5. Nous obtenons: $\Phi(x) \geqslant \Phi(x_\lambda)$. ■

2.2.2. Lemme. *Pour tout $z \in Z$ l'inégalité suivante a lieu*:

(i) $$\Psi(x_\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}[\Phi(z)-\Phi(x_\lambda)] \leqslant \frac{1}{\lambda}[\Phi(z)-d], \qquad d = \inf\Phi(x) = \Phi(\bar{x}).$$

Démonstration. De la définition 2.1.5 de x_λ on obtient, vu que $\Psi(z) = 0$ (v. 2.1.2):

$$\Phi(x_\lambda)+\lambda\Psi(x_\lambda) = \inf_x[\Phi(x)+\lambda\Psi(x)] \leqslant \Phi(z)+\lambda\Psi(z) = \Phi(z),$$

d'où: $\Psi(x_\lambda) \leqslant \frac{1}{\lambda}[\Phi(z)-\Phi(x_\lambda)] \leqslant \frac{1}{\lambda}[\Phi(z)-d]$. ■

2.2.3. Lemme. *L'inegalité*: $\Psi(x) \leqslant \Psi(x_\lambda)$ *entraîne*

(i) $$\|x-x_\lambda\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(x)-\Phi(x_\lambda)\big).$$

Démonstration. Soit $\Psi(x) \leqslant \Psi(x_\lambda)$; Ψ étant convexe, on a, pour $t \in (0, 1)$

$$\Psi\big(x_\lambda+t(x-x_\lambda)\big) \leqslant \Psi(x_\lambda),$$

donc, en vertu de 2.2.1,

(a) $$\Phi\big(x_\lambda+t(x-x_\lambda)\big)-\Phi(x_\lambda) \geqslant 0 \qquad (t \in (0, 1)).$$

En substituant dans 1.2.6 x_λ, x au lieu de x, y resp., on obtient la conclusion (i). ■

2.2.4. Théorème. *Il existe un seul élément $\bar{z} \in Z$ tel que*

(i) $$\Phi(\bar{z}) = [\inf\Phi(z)\colon z \in Z].$$

On a, de plus,

(ii) $$\Phi(x_\lambda) \to \Phi(\bar{z}) \qquad (\lambda \to \infty),$$

(iii) $$\|x_\lambda-\bar{z}\| \to 0 \qquad (\lambda \to \infty).$$

Démonstration. Comme $\Psi(x_\lambda) \to 0$ (v. 2.2.2 (i)), il existe une suite $\lambda_n \to \infty$ telle que

(a) $$\Psi(x_{\lambda_n}) \downarrow 0 \qquad (n \to \infty).$$

Pour $n > m$ naturels et pour un élément $z_0 \in Z$ quelconque, fixé, on a

(b) $$\Psi(z_0) = 0 \leqslant \Psi(x_{\lambda_n}) \leqslant \Psi(x_{\lambda_m}) \quad (n > m),$$

d'où, en vertu de 2.2.1:

(c) $$\Phi(x_{\lambda_m}) \leqslant \Phi(x_{\lambda_n}) \leqslant \Phi(z_0) \quad (m < n,\ z_0 \in Z).$$

La suite $\Phi(x_{\lambda_n})$ est donc convergente, de sorte que 2.2.3 entraîne

(d) $$\|x_{\lambda_n} - x_{\lambda_m}\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(x_{\lambda_n}) - \Phi(x_{\lambda_m})\big) \to 0 \quad (n > m \to \infty).$$

Posons $\bar{z} = \lim_n x_{\lambda_n}$. On a: $\Psi(\bar{z}) = \lim_n \Psi(x_{\lambda_n}) = 0$ (v. (a)), donc $\bar{z} \in Z$. Soit $z \in Z$ un autre élément; alors $\Psi(z) = 0 \leqslant \Psi(x_{\lambda_n})$, d'où l'on tire, en vertu de 2.2.1, $\Phi(\bar{z}) = \lim_n \Phi(x_{\lambda_n}) \leqslant \Phi(z)$, de sorte que $\Phi(\bar{z}) = [\inf \Phi(z)$: $z \in Z]$. Cet élément $\bar{z}$ est le seul qui jouisse de cette propriété, car Z est convexe et la fonctionnelle Φ est strictement convexe. Démontrons maintenant (ii). Soit $\varepsilon > 0$ et N un nombre naturel assez grand pour que (e) ait lieu:

(e) $$0 \leqslant \Phi(\bar{z}) - \Phi(x_{\lambda_N}) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est possible, puisque $x_{\lambda_n} \to \bar{z}$, $\Phi(x_{\lambda_n}) \to \Phi(\bar{z})$ et $\Phi(\bar{z}) \leqslant \Phi(x_{\lambda_n})$ en vertu de (c). D'autre part, comme $\Psi(x_\lambda) \to 0$ (2.2.2), il existe un $\mu > 0$ tel que

(f) $$\Psi(x_\lambda) \leqslant \Psi(x_{\lambda_N}) \quad (\text{si } \lambda \geqslant \mu).$$

Alors 2.2.1 et (f) entraînent

(g) $$\Phi(x_\lambda) \geqslant \Phi(x_{\lambda_N}) \quad (\text{si } \lambda \geqslant \mu),$$

(e) et (g) entraînent

(h) $$0 \leqslant \Phi(\bar{z}) - \Phi(x_\lambda) \leqslant \Phi(\bar{z}) - \Phi(x_{\lambda_N}) \leqslant \varepsilon \quad (\text{pour } \lambda \geqslant \mu),$$

d'où (ii). La conclusion (iii) découle de (ii) et de 2.2.3, car $\Psi(\bar{z}) = 0 \leqslant \Psi(x_\lambda)$ entraîne

$$\|\bar{z} - x_\lambda\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(\bar{z}) - \Phi(x_\lambda)\big) \to 0. \ \blacksquare$$

2.3. *Limitation de $\|x_\lambda - \bar{z}\|$ sous une hypothèse additionnelle.*

2.3.1. HYPOTHÈSE. *Il existe une fonction réelle $\sigma(t)$, $(t \geqslant 0)$, continue, croissante, remplissant les conditions:*

(i) $$\sigma(0) = 0, \quad \bigwedge_{x \in X} \bigvee_{z \in Z} \|x - z\| \leqslant \sigma\big(\Psi(x)\big).$$

2.3.2. THÉORÈME. *Soient: $a \in Z$ un élément quelconque fixé et $\lambda_0 > 0$. Posons*

$$d = \inf \Phi(x)\colon x \in X,$$

$$r_1 = \gamma_1^{-1}\Big(-\Psi_1\big(\beta(1).(1+\lambda_0)\big)\Big), \quad r_2 = \gamma_1^{-1}\big(\Phi(a) - d\big),$$

$$r_3 = \sigma\left(\frac{1}{\lambda_0}\big(\Phi(a) - d\big)\right),$$

$$r = \sum_{i=1}^{3} r_i.$$

Cela posé, on a la conclusion: $\|x_\lambda - \bar{z}\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(\bar{z}) - \Phi(x_\lambda)\big) \leqslant \gamma_1^{-1}\left(\beta(r) \times \times \sigma\left(\frac{1}{\lambda}\big(\Phi(a) - d\big)\right)\right)$.

Démonstration. En vertu de 1.1.10 et 2.1.1 on a

(a) $$\|\Phi_{\lambda_0}(h) - \Phi_{\lambda_0}(0)\| \leqslant \beta(1)(1+\lambda_0)\|h\| \quad (h \in X),$$

donc, en appliquant les résultats du paragraphe 1.2, en particulier celui de 1.2.5 (iv) (où l'on remplace Φ par Φ_{λ_0} et $\bar{x}$ par x_{λ_0}), on obtient:

(b) $$\|x_{\lambda_0}\| \leqslant \gamma_1^{-1}\Big(-\Psi_1\big(\beta(1).(1+\lambda_0)\big)\Big) = r_1.$$

Comme $\Psi(x_\lambda) \downarrow 0$, on a $\Psi(x_\lambda) \leqslant \Psi(x_{\lambda_0})$ pour λ assez grand, soit pour $\lambda \geqslant \lambda_1$; on peut donc appliquer le lemme 2.2.3 et on obtient ainsi:

(c) $$\|x_\lambda - x_{\lambda_0}\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(|\Phi(x_\lambda) - \Phi(x_{\lambda_0})|\big) \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(a) - d\big) = r_2,$$

puisque $\Psi(x_\lambda) \geqslant \Psi(a) = 0$, donc $\Phi(x_\lambda) \leqslant \Phi(a)$ $(a \in Z!)$. Remplaçons x_λ par x dans l'hypothèse 2.3.1; il existe alors un $z_\lambda \in Z$ tel que

(d) $$\|x_\lambda - Z_\lambda\| \leqslant \sigma\big(\Psi(x_\lambda)\big) \leqslant \sigma\left(\frac{1}{\lambda}\big(\Phi(a) - d\big)\right)$$
$$\leqslant \sigma\left(\frac{1}{\lambda_0}\big(\Phi(a) - d\big)\right) = r_3 \quad (\lambda \geqslant \lambda_2)\ \lambda_2 = \max(\lambda_1, \lambda_0)$$

en vertu de 2.2.2. Les relations (b), (c) et (d) entraînent (e):

(e) $$\|z_\lambda\| \leqslant \sum_1^3 r_i = r \quad \text{et} \quad \|x_\lambda\| \leqslant r_1 + r_2 \leqslant r \quad (\lambda \geqslant \lambda_2).$$

En vertu de 1.1.10 on a donc, vu que $\Phi(\bar{z}) \geqslant \Phi(z_\lambda) \geqslant \Phi(x_\lambda)$:

(f) $$|\Phi(\bar{z}) - \Phi(x_\lambda)| \leqslant |\Phi(z_\lambda) - \Phi(x_\lambda)|$$
$$\leqslant \beta(r)\|z_\lambda - x_\lambda\| \leqslant \beta(r)\,\sigma\left(\frac{1}{\lambda}\big(\Phi(a) - d\big)\right).$$

Appliquant le lemme 2.2.3, en y posant $\bar{z}$ au lieu de x (ce qui est possible, puisque $\Psi(\bar{z}) = 0 \leqslant \Psi(x_\lambda)$), on obtient:

(g) $$\|\bar{z}-x_\lambda\| \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi(\bar{z})-\Phi(x_\lambda)\big) \leqslant \gamma_1^{-1}\left(\beta(r)\,\sigma\left(\frac{1}{\lambda}\,(\Phi(a)-d)\right)\right), \qquad \lambda \geqslant \lambda_2.$$

3. Le minimum des fonctionnelles dans les espaces de suites concordantes.

3.1. *Les espaces de suites concordantes* ([2]). Faisons correspondre à tout nombre naturel un espace réel normé X_n, dont les éléments sont x, y, etc. et la norme est $\|x\|_n$. Admettons qu'à tout couple $n < p$ de nombres naturels il corresponde un homomorphisme linéaire borné $\varphi_{n,p} \in X_n \to X_p$ et que les $\varphi_{n,p}$ soient équibornés:

3.1.1. $\|\varphi_{n,p}(x)\|_p \leqslant c_0\|x\|_n \quad (n < p)$.

3.1.2. Définition. La suite $\{x_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est dite concordante (ce qu'on note: $\{x_n\} \in \{X_n\}$) si

(i) $$\|\varphi_{n,p}(x_n)-x_p\|_p \to 0 \quad (p > n \to \infty).$$

Remarquons que si l'on pose: $X_n = X$, $n = 1, 2, \ldots$, $\varphi_{n,p}(x) = x_i$, on obtient la condition de Cauchy. L'ensemble des suites concordantes devient un espace de Banach si l'on y définit la norme et l'égalité:

3.1.3. $$\{x_n\} = \{y_n\} \overset{\mathrm{df}}{\Leftrightarrow} \|x_n-y_n\|_n \to 0 \quad (n\to\infty),$$
$$\|\{x_n\}\| \overset{\mathrm{df}}{=} \overline{\lim_n}\,\|x_n\|_n \quad \text{(voir [2])}.$$

Nous appellerons cet espace: espace $\{X_n\}$; on dénote souvent $\{x_n\}$ par x.

3.1.4. Lemme. *Si* $\{x_n\} \in \{X_n\}$ *et* $\|y_n-x_n\|_n \to 0$ $(y_n \in X_n,\ n = 1, 2, \ldots)$ *on a aussi*: $\{y_n\} \in \{X_n\}$.

La démonstration est évidente.

3.1.5. Lemme. *Faisons correspondre à tout* $\lambda \geqslant 0$ *une suite* $\{x_{n,\lambda}\} \in X_n$ *de façon que pour tout n naturel fixé* $x_{n,\lambda}$ *tende vers un* $\bar{x}_n$ *(si* $\lambda \to +\infty$*) uniformément par rapport à n, ce que nous notons*:

(i) $$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\mu>0}\{\lambda \geqslant \mu \Rightarrow \|x_{n,\lambda}-\bar{x}_n\|_n \leqslant \varepsilon\}.$$

Conclusion: la suite $\{\bar{x}_n\}$ *est concordante.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, c_0 la borne commune de tous les $\varphi_{n,p}$ (cf. 3.1.1). En vertu de l'hypothèse il existe un nombre $\mu > 0$ tel que

(a) $$\lambda \geqslant \mu \Rightarrow \|x_{n,\lambda}-\bar{x}_n\|_n \leqslant \frac{\varepsilon}{2(1+c_0)} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

De là on tire, en appliquant 3.1.1

(b) $$\|\varphi_{n,p}(x_{n,\lambda})-\varphi_{n,p}(\bar{x}_n)\|_p \leqslant \frac{c_0\varepsilon}{2(1+c_0)} \quad (n, p = 1, 2, \ldots;\ p > n).$$

(a) et (b) entraînent (c):

(c) $$\begin{aligned}\|\varphi_{n,p}(\bar{x}_n)-\bar{x}_p\|_p &\leqslant \|\varphi_{n,p}(\bar{x}_n)-\varphi_{n,p}(x_{n,\lambda})\|_p+\|\varphi_{n,p}(x_{n,\lambda})-x_{p,\lambda}\|_p+\|x_{p,\lambda}-\bar{x}_p\|_p\\ &\leqslant \frac{c_0\varepsilon}{2(1+c_0)}+\|\varphi_{n,p}(x_{n,\lambda})-x_{p,\lambda}\|_p+\frac{\varepsilon}{2(1+c_0)}\\ &= \frac{\varepsilon}{2}+\|\varphi_{n,p}(x_{n,\lambda})-x_{p,\lambda}\|_p \quad (\text{pour } \lambda \geqslant \mu).\end{aligned}$$

La suite $\{x_{n,\mu}\}$ (μ fixé) étant concordante, il existe un N naturel tel que l'on a

(d) $$\|\varphi_{n,p}(x_{n,\mu})-x_{p,\mu}\|_p \leqslant \varepsilon/2 \quad (p > n \geqslant N).$$

(c) et (d) entraînent

$$\|\varphi_{n,p}(\bar{x}_n)-\bar{x}_p\|_p \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad p > n \geqslant N. \blacksquare$$

3.2. *Fonctionnelles et opérations sur les espaces du type* $\{X_n\}$. Soient: Φ une fonctionnelle réelle, définie sur l'espace $X = \{X_n\}$, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ des fonctionnelles définies respectivement sur $X_1, X_2, \ldots$

3.2.1. Définition. La suite $\{\Phi_n\}$ *représente la fonctionnelle* Φ si pour tout $x = \{x_n\} \in \{X_n\}$

(i) $\{x_n\} \in \{X_n\}$ entraîne $\Phi(\{x_n\}) = \Phi(x) = \lim\limits_n \Phi_n(x_n)$,

(ii) $\|x_n-x_n'\|_n \to 0$ entraîne $\Phi(\{x_n\}) = \Phi(\{x_n'\})$ (c'est-à-dire $\Phi_n(x_n)-\Phi_n(x_n') \to 0$).

Soit $Y = Y_n$ un autre espace de suites concordantes, F une opérator définie sur $X = \{X_n\}$, à valeurs dans Y; $F_n \in X_n \to Y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

3.2.2. Définition. La suite d'opérations $\{F_n\}$ *représente l'opération* F si

(i) $\{x_n\} \in \{X_n\}$ et $y_n = F_n(x_n)$ entraînent $\{y_n\} \in \{Y_n\}$,

(ii) $\|x_n-x_n'\|_n \to 0 \Rightarrow \|F_n(x_n)-F_n(x_n')\|_n \to 0$.

3.3. *Le minimum non conditionnel des fonctionnelles dans les espaces du type* $\{X_n\}$. Soient: $X = \{X_n\}$ un espace de suites concordantes, Φ une fonctionnelle définie sur X, satisfaisant à toutes les hypothèses du paragraphe 1. Soit encore $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ une suite de fonctionnelles qui représente Φ. Admettons les hypothèses suivantes:

3.3.1. HYPOTHÈSE. $|\Phi_n(x_n)-\Phi_n(y_n)| \leqslant \beta(r)\|x_n-y_n\|_n$, $n=1,2,\ldots$ *si* $x_n, y_n \in X_n$, $\|x_n\|_n \leqslant r$, $\|y_n\|_n \leqslant r$.

3.3.2. HYPOTHÈSE. *Pour* $x, h \in X_n$ *et* $t \in (0,1)$ *on a*

$$|\Phi_n(x+th)-\Phi_n(x)| \leqslant t[\Phi_n(x+h)-\Phi_n(x)]-\Gamma(t, \|h\|),$$

$\beta(r)$ *et* Γ *étant les fonctions définies aux numéros* 1.1.10 *et* 1.1.11.

En vertu des résultats obtenus dans 1.1 et 1.2 (où l'on remplace X par X_n et Φ par Φ_n), il existe exactement un $\bar{x}_n \in X_n$ $(n=1,2,\ldots)$ tel que

3.3.3. $\quad \Phi_n(\bar{x}_n) = [\inf \Phi_n(x)\colon x \in X_n]$.

Or, la question s'impose si la suite $\{\bar{x}_n\}$ est concordante et si $\bar{x} \overset{\mathrm{df}}{=} \{\bar{x}_n\}$ est un point minimal de Φ. Nous établirons ci-dessous deux groupes d'hypothèses supplémentaires, dont chacun suffit pour que la réponse soit affirmative.

3.3.4. THÉORÈME. *Outre* 3.3.1, 3.3.2 *admettons l'hypothèse suivante: il existe deux suites de fonctions* $\varepsilon_n(t)$, $\vartheta_n(t)$, *définies pour* $t \geqslant 0$ *et satisfaisant aux conditions*;

(i) *pour* n *naturel fixé* $\varepsilon_n(t)$, $\vartheta_n(t)$ *sont croissantes par rapport à* t,

(ii) $\varepsilon_n(0)=\vartheta_n(0)=0$, $\varepsilon_n(t)\to 0$, $\vartheta_n(t)\to 0$ *si* $n\to\infty$, t *étant fixé*,

(iii) $\Phi_n(\bar{x}_n) \leqslant \Phi_p(x_p)+\varepsilon_n(\varrho)$ *pour* $p>n$, $x_p \in X_p$ *si* $\|\bar{x}_p\|_p \leqslant \varrho$; $\bar{x}_n$ *désigne le point minimal de* Φ_n *sur* X_n,

(iv) $|\Phi_p(\varphi_{n,p}(x_n))-\Phi_n(x_n)| \leqslant \vartheta_n(\varrho)$ *pour* $x_n \in X_n$, $\|x_n\|_n \leqslant \varrho$, $p>n$.

Conclusion: La suite $\{\bar{x}_n\}$ *est concordante et* $\bar{x} \overset{\mathrm{df}}{=} \{\bar{x}_n\}$ *remplit la condition*

$$\varphi(\bar{x}) = [\inf \Phi(x)\colon x \in X].$$

Démonstration. Posons $\varrho = \gamma_1^{-1}\big(-\psi_1(\beta(1))\big)$ (cf. 1.1). En vertu de 1.2.5 (iv) on a $\|\bar{x}_n\|_n \leqslant \varrho$ $(n=1,2,\ldots)$, de sorte que l'on peut appliquer (iii) et (iv). On en tire

(a) $$\Phi_p(x_p) = [\inf \Phi_p(x)\colon x \in X_p] \leqslant \Phi_p\big(\varphi_{n,p}(\bar{x}_n)\big) \leqslant \Phi_n(\bar{x}_n)+\vartheta_n(\varrho) \leqslant \Phi_p(\bar{x}_p)+\varepsilon_n(\varrho)+\vartheta_n(\varrho),$$

et, par suite,

(b) $$0 \leqslant \Phi_p\big(\varphi_{n,p}(\bar{x}_n)\big)-\Phi_p(\bar{x}_p) \leqslant \varepsilon_n(\varrho)+\vartheta_n(\varrho)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Posons dans 1.2.5: X_p, Φ_p, $\bar{x}_p$, $\varphi_{n,p}(x_n)$ pour X, Φ, $\bar{x}$ et x, respectivement; comme $\Phi_p(\bar{x}_p) = \inf \Phi_p$, nous obtiendrons de 1.2.5 (i)

(c) $$\|\varphi_{n,p}(\bar{x}_n)-\bar{x}_p\|_p \leqslant \gamma_1^{-1}\big(\Phi_p\big(\varphi_{n,p}(\bar{x}_n)\big)-\Phi_p(\bar{x}_p)\big)\to 0$$

si $p>n\to\infty$; la suite $\{\bar{x}_n\}$ est donc concordante. Posons $\bar{x} \overset{\mathrm{df}}{=} \{\bar{x}_n\}$ et soit $x=\{x_n\}$ une suite arbitraire de $\{X_n\}$; puisque $\Phi_n(\bar{x}_n) \leqslant \Phi_n(x_n)$, on a:

$$\Phi(\bar{x}) = \lim_n \Phi_n(\bar{x}_n) \leqslant \lim_n \Phi_n(x_n) = \Phi(x). \;\blacksquare$$

Établissons maintenant un autre groupe d'hypothèses, suffisant pour que $\{\bar{x}_n\}$ soit concordante et que $\Phi(\{\bar{x}_n\}) = \inf \Phi$.

3.3.5. THÉORÈME. *Outre* 3.3.1 *et* 3.3.2 *admettons les hypothèses suivantes*, (i) *et* (ii):

(i) $F=\operatorname{grad}\Phi$ *et* $F_n=\operatorname{grad}\Phi_n$ $(n=1,2,\ldots)$ *existent (dans* X *ou* X_n, *respectivement); de plus, la suite* $\{F_n\}$ *est la représentation de l'operation* F *au sens de* 3.2.2,

(ii) $\big(F_n(x+h)-F_n(x), h\big) \geqslant \gamma(\|h\|_n)\|h\|_n$ $(x, h \in X_n;\ n=1,2,\ldots)$.

Conclusion. La suite $\{\bar{x}_n\}$ *est concordante et* $\Phi(\{\bar{x}_n\}) = [\inf \Phi(x)\colon x \in X]$.

Démonstration. En vertu des résultats établis dans la partie 1 de ce travail, il existe un seul élément $\bar{x} \in X$ tel que $\Phi(\bar{x}) = [\inf \Phi(x)\colon x \in X]$. On en tire que $F(\bar{x}) = \operatorname{grad}\Phi(\bar{x}) = 0$. Soit x'_n une suite représentant l'élément $\bar{x}$: $\bar{x} = \{x'_n\}$, $x'_n \in X$ $(n=1,2,\ldots)$. On a alors

(a) $$\|\lim_n F_n(x'_n)\|_n = \|F(x)\| = 0.$$

D'autre part, $\bar{x}_n$ étant le point minimal de Φ_n, on a

(b) $$F_n(\bar{x}_n) = \operatorname{grad}\Phi_n(\bar{x}_n) = 0 \quad (n=1,2,\ldots)$$

d'où en vertu de 1.3.5 (i),

(c) $$\|\bar{x}_n-x'_n\|_n \leqslant \gamma_1^{-1}\big(-\psi_1(\|F_n(x'_n)\|_n)\big)\to 0 \quad (n\to\infty).$$

En vertu du lemme 3.1.4 la suite $\{\bar{x}_n\}$ est concordante et $\{x'_n\} = \{\bar{x}_n\}$, d'où

$$\Phi(\{\bar{x}_n\}) = \Phi(\{x'_n\}) = \Phi(\bar{x}) = [\inf \Phi(x)\colon x \in X]. \;\blacksquare$$

3.4. *Le minimum conditionnel des fonctionnelles dans les espaces du type* $\{X_n\}$. Nous maintenons en vigueur toutes les notations, définitions et hypothèses des paragraphes précédents; admettons que les fonctionnelles Φ et Ψ soient représentées par les suites $\{\Phi_n\}$ et $\{\Psi_n\}$, respectivement. Soit, comme plus haut, Z un ensemble convexe fermé de X tel que $\Psi(x)=0$ équivaut à la condition: $x \in Z$. Notre but est de remplacer le problème du minimum conditionnel de Φ sur X:

3.4.1. $\quad \Phi(\bar{z}) = [\inf \Phi(x)\colon x \in Z]$

par une suite de problèmes analogues dans X_n, ce qui peut être plus simple, p.ex. si les X_n sont de dimension finie. Posons:

3.4.2. DÉFINITION. $Z_n = [x \in X_n\colon \Psi_n(x)=0]$ $(n=1,2,\ldots)$ et admettons que pour tout n naturel le problème

3.4.3. $\quad \Phi_n(\bar{z}_n) = [\inf \Phi_n(x)\colon x \in Z_n]$

ait une seule solution $\bar{z}_n$. Tout comme dans 3.3 la question s'impose si la suite $\{\bar{z}_n\}$ est concordante et si l'élément $\bar{z} = \{\bar{z}_n\}$ satisfait à 3.4.1. Admettons les hypothèses:

3.4.4. Hypothèse. $|\Psi_n(x) - \Psi_n(y)| \leqslant \beta(r)\|x-y\|_n$, $x, y \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ *si* $\|x\|_n \leqslant r$, $\|y\|_n \leqslant r$.

3.4.5. Hypothèse. $\Psi_n(x+th) - \Psi_n(x) \leqslant t[\Psi_n(x+h) - \Psi_n(x)]$, $x, y \in X_n$.

3.4.5 veut dire simplement que toutes les Ψ_n sont convexes.

3.4.6. Hypothèse. $\bigwedge\limits_{x \in X_n} \bigvee\limits_{z \in Z_n} \|z-x\|_n \leqslant \sigma(\Psi_n(x))$, *$\beta(r)$ et $\sigma(\ )$ designent les fonctions introduites dans* 2.1 *et* 2.3 *respectivement.*

Posons:

3.4.7. Définition. $\Phi_{n,\lambda} \overset{\mathrm{df}}{=} \Phi_n + \lambda \Psi_n$ $(\lambda \geqslant 0,\ n = 1, 2, \ldots)$.

Il découle des hypothèses faites dans ce paragraphe (3) que, pour tout $\lambda \geqslant 0$ et $n = 1, 2, \ldots$, les résultats établis dans les paragraphes 1 et 2 restent en vigueur si l'on y remplace X, Φ, Ψ, Φ_λ et Z par X_n, Φ_n, Ψ_n, $\Phi_{n\lambda}$ et Z_n respectivement. En particulier, il existe pour tout n naturel et $\lambda \geqslant 0$ un seul élément $x_{n,\lambda} \in X_n$ tel que

3.4.8. $\Phi_n(x_{n,\lambda}) + \lambda \Psi_n(x_{n,\lambda}) \leqslant \Phi_n(x_n) + \lambda \Psi_n(x_n)$

pour tout $x_n \in X_n$, $n = 1, 2, \ldots$

En général, la suite $\{x_{n,\lambda}\}$ (λ fixé) n'est pas nécessairement concordante; on peut l'assurer en ajoutant l'une des deux hypothèses suivantes (A) ou (B):

3.4.9. Hypothèse (A). *Pour tout $\lambda \geqslant 0$ la suite $\{\Phi_{n,\lambda}\}$ satisfait aux conditions que l'on obtient des hypothèses* (i)–(iv) *du théorème* 3.3.3 *en y remplaçant Φ_n par $\Phi_{n,\lambda}$ et $\beta(r)$ par $(1+\lambda)\beta(r)$.*

3.4.10. Hypothèse (B). *Les fonctionnelles Φ et Ψ admettent des gradients: F et V respectivement, qui sont représentés par les suites d'opérations $\{F_n\}$ et $\{V_n\}$ respectivement* (*voir* 3.2.2). *De plus, les opérations $F_{n,\lambda} \overset{\mathrm{df}}{=} F_n + \lambda V_n$ satisfont à*

(i) $(F_{n,\lambda}(x+h) - F_{n,\lambda}(x), h) \geqslant \gamma(\|h\|_n)\|h\|_n$ $(x, h \in X_n,\ n = 1, 2, \ldots)$.

Il découle immédiatement du théorème 3.3.3 (resp. 3.2.4), en y faisant des substitutions évidentes, que dans chacun des cas (A) ou (B) la suite $\{x_{n,\lambda}\}$ est concordante, pour $\lambda \geqslant 0$ fixé. De plus, on déduit du théorème 2.2.4 que, pour n naturel fixé et $\lambda \to \infty$, la fonction $\bar{x}_{n,\lambda}$ tend vers un élément $\bar{z}_n \in Z_n$ tel que

3.4.11. $\Phi_n(\bar{z}_n) = [\inf \Phi_n(z):\ z \in Z_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Cette fois encore, on ne sait pas si la suite est concordante; mais grâce au lemme 3.1.5 il en est certainement ainsi si la convergence $x_{n,\lambda} \to \bar{z}_n$ ($\lambda \to +\infty$) est uniforme par rapport à l'indice n. Nous allons montrer que cela a bien lieu.

3.4.12. Théorème. *Admettons toutes les hypothèses des numéros* 3.3 *et* 3.4, *et, de plus, l'une des hypothèses* (A) *ou* (B).

Conclusion: On a: $\|x_{n,\lambda} - \bar{z}_n\|_n \to 0$ $(\lambda \to +\infty)$ uniformément par rapport à n; par conséquent, la suite $\{\bar{z}_n\}$ est concordante; de plus:

(i) $$\bar{z} = \{\bar{z}_n\} \in Z,$$

(ii) $$\Phi(\bar{z}) = [\inf \Phi(\bar{z}):\ z \in Z].$$

Démonstration. Nous établirons d'abord le lemme (a), assez simple:

(a) Pour tout élément $z \in Z \subset \{X_n\}$ il existe une suite $\{z_n\} \in \{X_n\}$ (c.-à-d. concordante) telle que $\Psi_n(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. En effet, soit $\{z'_n\}$ une des représentations de z; en vertu de 3.4.6 il existe, pour tout n naturel, un $z_n \in Z_n$ tel que $\|z'_n - z_n\|_n \leqslant \sigma(\Psi(z'_n))$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Mais $\{z'_n\} \in Z$, d'où $\lim \Psi_n(z'_n) = \Psi(\{z'_n\}) = \Psi(z) = 0$, ce qui veut dire que $\{z_n\} = \{z'_n\} \in Z$. ■

Appliquons maintenant à l'expression $\|x_{n,\lambda} - \bar{z}_n\|_n$ les limitations du théorème 2.3.2 (ce qui est possible grâce à l'hypothèse 3.4.6). Fixons $\lambda_0 > 0$ et $a \in Z$ $(a = \{a_n\}:\ a_n \in Z_n,\ n = 1, 2, \ldots)$ et posons

$$d_n \overset{\mathrm{df}}{=} [\inf \Phi_n(x):\ x \in X_n],$$

(b) $$r_{1,n} = \gamma_1^{-1}\big(-\psi_1(\beta(1)(1+\lambda_0))\big), \qquad r_{2,n} = \gamma_1^{-1}(\Phi_n(a_n) - d_n),$$
$$r_{3,n} = \sigma\left(\frac{1}{\lambda}(\Phi_n(a_n) - d_n)\right).$$
$$r_n = \sum_{i=1}^{3} r_{i,n}.$$

On obtient de 2.3.2:

(c) $$\|\bar{z}_n - x_{n,\lambda}\|_n \leqslant \gamma_1^{-1}\left(\beta(r_n)\,\sigma\left(\frac{1}{\lambda}(\Phi(a_n) - d_n)\right)\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Φ étant représentée par $\{\Phi_n\}$, on a $\Phi_n(a_n) \to \Phi(a)$, donc la suite $\{\Phi_n(a_n)\}$ reste bornée si $n \to \infty$. En vertu du théorème 1.2.3 on a $d_n = \Phi_n(\bar{x}_n)$. Il découle du théorème 3.3.4 (resp. 3.3.5) et de l'hypothèse (A) (resp. (B) où l'on pose $\lambda = 0$) que la suite $\{\bar{x}_n\}$ est concordante et que, de plus, $\bar{x} \overset{\mathrm{df}}{=} \{\bar{x}_n\}$ est le point minimal de Φ sur X; de là on tire $d_n = \Phi_n(\bar{x}_n) \to \Phi(\bar{x})$, de sorte que la suite $\{d_n\}$ est aussi bornée. Par conséquent la suite $\{r_n\}$ est bornée et on tire de (c), en posant $r = \sup\limits_n r_n$,

(d) $$\|\bar{z}_n - x_{n,\lambda}\|_n \leqslant \gamma_1^{-1}\left(\beta(r)\,\sigma\left(\frac{1}{\lambda}\left(\sup_k (\Phi_k(a_k) - d_k)\right)\right)\right) \to 0, \qquad \lambda \to \infty.$$

Donc $\|\bar{z}_n - x_{n,\lambda}\|_n$ tend vers zéro (si $\lambda \to \infty$) uniformément par rapport à n — naturel, et la suite $\{\bar{z}_n\}$ est bien concordante. De plus, $\Psi_n(\bar{z}_n) = 0$, d'où $\Psi(\bar{z}) = \Psi(\{\bar{z}_n\}) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(\bar{z}_n) = 0$, donc $\bar{z} \in Z$. Soit z un autre élément de Z, $z = \{z_n\}$. On peut admettre, d'après le lemme (a), que $\Psi_n(z_n) = 0$, d'où il résulte, en vertu de 3.4.11, que $\Phi(z) = \lim_n \Phi_n(z_n) \geqslant \lim_n \Phi_n(\bar{z}_n) = \Phi(\bar{z})$. ■

Travaux cités

[1] F. Clarke, *A new approach to Lagrange multipliers*, Math. of Oper. Research 1 (2) (1976).

[2] C. Góźdź, *Suites concordantes d'espaces normés et leurs applications*, Studia Math. 62 (1978), pp. 169–192.

[3] P. Loridan, *Sue la minimisation de fonctionnelles convexes par pénalisation*, R.I.R.O. (1971).

[4] — *Sur un process d'optimisation utilisant simultanement les methode de pénalisation et des variations locales*, SIAM J. Control 11 (1973).

[5] O. Mangasarian, *Unconstrained methods in nonlinear programming*, SIAM Proc. 9 (1976).

[6] D. Morrison, *Optimization by least squares*, SIAM J. Numer. Anal. 5 (1968).

[7] [M. M. Vaĭnberg] М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов*, Москва 1972.

MARIA CURIE-SKŁODOWSKA UNIVERSITY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
Lublin, Poland

Received October 4, 1977
Revised version February 2, 1978 (1353)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVIII. (1980)

Concerning some version of the Lax–Milgram Lemma in normed spaces

by

KRZYSZTOF MOSZYŃSKI (Warszawa)

Abstract. This paper contains a generalization of classical Lax–Milgram Lemma for the case of a complex bilinear form defined on a pair of linear normed spaces.

Theorems concerning existence and (local) unicity of solution for the subsequent variational and operator equations are given, as well as some information concerning the operator defined by the bilinear form (in the simplest case) is joint.

The Lax–Milgram Lemma is an useful and elegant tool in the theory of differential equations of elliptic type. It was discussed by many authors.

The classical version of this lemma tells that if a is a bounded and coercive bilinear form defined on a real Hilbert space V and L is a bounded linear functional over V, then there exists exactly one $v_0 \in V$ such that $a(v_0, v) = L(v)$ for any $v \in V$ ([3], pp. 92–95).

A theorem of similar kind for a pair of Hilbert spaces, especially convenient in applications to the theory of differential equations can be found in Lions' book [2]. The purpose of the present paper is to generalize ideas of [2].

Let X, Y be linear, complex, normed spaces. We denote by X', Y' their strong duals. If not necessary, we shall not distinguish in notation the norms in different spaces. We shall also equivalently use both notations for duality pairing for any $x \in X$ and $f \in Y'$:

$$f(x) = \langle x, f\rangle_X.$$

The following notation will be used in the text:

- $\boldsymbol{R}$ — for real line,
- $\boldsymbol{C}$ — for complex plane,
- $D(A)$ — for the domain of the operator A,
- $R(A)$ — for the range of the operator A,
- I_X — for the identity operator over X;

Primes will be used for duality and stars for adjointness.

Consider a bilinear form

$$a\colon X \times Y \to \boldsymbol{C}$$

which we shall also call shortly the 'form'.