STUDIA MATHEMATICA, T. LXVII. (1980)

La presque-périodicité et les coalgèbres injectives

par

ANDREW TONGE (Cambridge)

Abstract. We continue our study of injective coalgebras. This was begun in [15], where we characterised them as the closed translation invariant subspaces of the continuous functions on compact semigroups. The purpose of this paper is to bring out some connections between injective coalgebras and various notions of almost periodicity. In particular, we identify certain cofree injective coalgebras as the almost periodic functions on appropriate topological semigroups. From this we are able to deduce the existence of the cofree injective coalgebra on an arbitrary Banach space.

1. Introduction et notations. Soient E et F deux espaces de Banach. Nous noterons B_E la boule unité de E, et E' le dual de E. On peut munir le produit tensoriel algébrique $E\otimes F$ de plusieurs normes raisonnables [6a], mais nous nous intéressons surtout à la plus petite, la norme injective ε. Si $\tau\in E\otimes F$, on définit

$$\|\tau\|_\varepsilon = \sup\{|\langle\tau, e'\otimes f'\rangle|:\ e'\in B_{E'}, f'\in B_{F'}\}.$$

Le complété $E\check{\otimes}F$ de $(E\otimes F, \|\cdot\|_\varepsilon)$ s'appelle *produit tensoriel injectif* de E et F. Pour les propriétés de $\check{\otimes}$, on pourra consulter [6].

Cet article est consacré à l'étude des coalgèbres injectives. Une *coalgèbre injective* ([14], [15]) est un espace de Banach C auquel on associe une application linéaire $N\colon C\to C\check{\otimes}C$ de norme $\leqslant 1$ (c'est-à-dire une *contraction*) et $e\in C'$ de norme 1 qui rendent commutatifs les diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "N"] \arrow[d, "N"'] & C\check{\otimes}C \arrow[d, "I\check{\otimes}N"] \\ C\check{\otimes}C \arrow[r, "N\check{\otimes}I"'] & C\check{\otimes}C\check{\otimes}C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dr, "N"] & C\check{\otimes}C \\ C\check{\otimes}C & C\check{\otimes}C \arrow[l, "I\check{\otimes}e"] \arrow[u, "e\check{\otimes}I"'] \end{tikzcd}$$

I désigne l'application identique $C\to C$, et C s'identifie de façon naturelle à $C\check{\otimes}C$ et $C\check{\otimes}C$.

N s'appelle la *comultiplication* de C, et e est sa coidentité.

L'exemple type d'une coalgèbre injective est $C(S)$, l'espace des fonctions continues sur un semigroupe compact S, muni de la norme uniforme. Précisons que pour nous tout semigroupe topologique S sera supposé unitaire, et la multiplication sera supposée une application continue $S\times S\to S$. Grothendieck ([6], p. 90) a démontré que $C(S)\check{\otimes}C(S)$ est isométriquement isomorphe à $C(S\times S)$, et en vertu de ce résultat on peut définir

$$(Nf)(s,t)=f(st)\quad \text{et}\quad e(f)=f(1)\quad (s,t\in S;\ f\in C(S)).$$

Remarquons que l'espace de Banach $C(S)$ devient une algèbre de Banach, et même une C^*-algèbre, lorsqu'il est muni de la multiplication ponctuelle $[(f\cdot g)(s)=f(s)\cdot g(s)]$. Les algèbres de Banach jouissant d'une structure de coalgèbre (de manière cohérente) ont été étudiées par plusieurs auteurs, notamment Hofmann [7], [8] et Sankaran-Selesnick [12]. L'école autrichienne de Cigler, Cooper et Michor a considéré des objets semblables, mais dans un contexte plus général. Voir par exemple [2]. Hofmann a démontré en particulier l'existence d'une dualité entre la catégorie des semigroupes compacts et la catégorie des C^*-bigèbres commutatives [7], généralisant ainsi les théorèmes classiques de Pontriagin et Tannaka. Sankaran et Selesnick ont défini les $(\mathscr{B},\hat{\otimes}_s)$-algèbres de Hopf, et ils ont donné une démonstration simple d'un théorème de dualité pour les C^*-algèbres commutatives qui sont des $(\mathscr{B},\hat{\otimes}_s)$-algèbres de Hopf ([12], th. 3.6). Dans un article précédent [15], nous avons prouvé, à l'aide d'un théorème de Kaijser (voir par exemple [16]) et des méthodes standard de l'analyse harmonique, que toute $(\mathscr{B},\hat{\otimes}_s)$-algèbre de Hopf est une C^*-algèbre commutative. Il en résulte qu'il y a une dualité entre la catégorie des groupes compacts et la catégorie des $(\mathscr{B},\hat{\otimes}_s)$-algèbres de Hopf [14].

Dans la suite nous ne considérons que des *espaces* de Banach munis d'une structure de coalgèbre. Nous devrons parfois imposer comme hypothèse la propriété d'approximation de Banach, mais nous n'utiliserons qu'une seule des plusieurs versions équivalentes énumérées dans [6]. Remarquons d'abord qu'un élément de $E\otimes F$ peut être interprété comme application linéaire $E'\to F$. Nous dirons que F *satisfait à la propriété d'approximation* si, pour tout espace de Banach E, on peut identifier $E\check{\otimes}F$ à $\mathrm{KW}(E',F)$, l'espace des applications linéaires compactes de $(E',\sigma(E',E))$ dans $(F,\sigma(F,F'))$, muni de la norme uniforme. Il est toujours vrai que $E\check{\otimes}F\subseteq \mathrm{KW}(E',F)$.

Moyennant la propriété d'approximation, on peut caractériser les coalgèbres injectives comme les sous-espaces fermés invariants par translation d'un espace $C(S)$, où S est un semigroupe compact [15]. Dans ces conditions on peut également prouver une réciproque à la proposition suivante.

Proposition 1.1 [15]. *Le dual d'une coalgèbre injective C admet une structure naturelle d'algèbre de Banach. La boule unité, munie de la topologie $\sigma(C',C)$, est un semigroupe compact.*

Signalons que pour $x,y\in C'$, le produit xy est défini par

$$\langle c,xy\rangle=\langle Nc,x\otimes y\rangle\qquad (c\in C).$$

Observons aussi que la coidentité de C n'est autre que l'identité de C'. Nous dirons que C est *cocommutative* si C' est une algèbre de Banach commutative pour la multiplication ci-dessus.

Désormais il sera commode de ne considérer que les algèbres de Banach commutatives (avec une identité normalisée) et les coalgèbres injectives cocommutatives. Egalement, tout semigroupe topologique sera supposé abélien.

Un *atome* de la coalgèbre injective C est un élément a tel que $Na=a\otimes a$. Il est clair que les atomes de C sont des éléments du spectre de C'. Les atomes de $C(S)$ sont précisément les semicaractères de S.

Si R_1 et R_2 sont des algèbres de Banach, $\mathrm{ALG}(R_1,R_2)$ désigne l'espace des *contractions d'algèbres* $R_1\to R_2$, c'est-à-dire les contractions multiplicatives qui envoient l'identité sur l'identité. D'autre part, si C et D sont des coalgèbres injectives, $\mathrm{COALG}(C,D)$ désigne les *contractions de coalgèbres* $C\to D$, c'est-à-dire les contractions telles que

$$N_Df=(f\check{\otimes}f)N_C\quad \text{et}\quad e_Df=e_C.$$

On vérifie aussitôt la

Proposition 1.2 [15]. *Le transposé f' d'une contraction de coalgèbres f est une contraction d'algèbres.*

Nous entendrons par homomorphisme de semigroupes topologiques une application continue multiplicative qui envoie l'identité sur l'identité.

Nous aurons besoin dans la suite du *produit tensoriel projectif* $E\hat{\otimes}F$ de deux espaces de Banach E et F. $E\hat{\otimes}F$ est le complété de $E\otimes F$ muni de la norme π, la plus grande des normes raisonnables [6a]. Si $\tau\in E\otimes F$, on définit

$$\|\tau\|_\pi=\sup\{|\langle\tau,\Phi\rangle|:\ \Phi \text{ forme bilinéaire de norme} \leqslant 1\}.$$

Isolons enfin deux propriétés essentielles de la norme injective:

(P) *Si E_1 et F_1 sont des sous-espaces fermés de E et F, resp., alors $E_1\check{\otimes}F_1$ est isométriquement un sous-espace fermé de $E\check{\otimes}F$.*

(Q) *$E'\check{\otimes}F'$ est isométriquement un sous-espace fermé de $(E\hat{\otimes}F)'$.*

Pour les démonstrations nous renvoyons à [0].

Ce travail a été fait à McGill University, Montréal et à la Faculté des Sciences d'Orsay, où je préparais une thèse de Ph. D. à Cambridge, G. B. J'ai beaucoup profité de plusieurs discussions avec A. Atzmon, T. Fox et avec mon directeur de thèse S. W. Drury, qui m'a suggéré ce

sujet; je les remercie, ainsi que le SRC qui m'a accordé une bourse. Je tiens aussi à remercier le rapporteur de cet article, qui m'a signalé divers résultats antérieurs liés à cette question.

2. Le codual d'une algèbre de Banach. Comme le dual d'une coalgèbre injective est une algèbre de Banach, on pourrait espérer que le dual d'une algèbre de Banach soit une coalgèbre injective. Bien que cela soit faux, on peut en tirer quelque chose d'intéressant.

Soit R une algèbre de Banach. Désignons sa multiplication par M: $R\hat{\otimes}R \to R$ et posons $N = M'$. Si φ est dans le spectre de R, on voit que, moyennant quelques identifications naturelles, on a $N\varphi = \varphi\otimes\varphi \in R'\check{\otimes}R' \subseteq (R\hat{\otimes}R)'$. S'appuyant sur (P), on peut se servir du lemme de Zorn pour démontrer que parmi les sous-espaces fermés de R', il existe des espaces maximaux qui sont des coalgèbres injectives pour la comultiplication N. Comme il est clair que la fermeture de la somme de deux tels espaces est toujours une coalgèbre injective, nous venons de démontrer la

PROPOSITION 2.1. *Il existe dans R' un sous-espace fermé maximal unique qui est une coalgèbre injective pour la comultiplication N.*

Cet espace s'appelle *codual* de R, il est noté $R^\triangledown$. Pour examiner $R^\triangledown$ de plus près, il sera utile d'introduire la notion d'un élément presque-périodique de R'. A tout $\varphi \in R'$, on peut associer une application linéaire $\tilde{\varphi}$: $R \to R'$ définie par

$$\langle\tilde{\varphi}(x), y\rangle = \langle\varphi, xy\rangle \quad (x, y \in R).$$

On vérifie aisément que $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Suivant Kitchen [10], nous dirons que φ est *presque-périodique* si $\tilde{\varphi}$ est une application compacte. Les éléments presque-périodiques de R' constituent un sous-espace fermé que nous désignerons par $\mathrm{AP}(R)$.

THÉORÈME 2.2. (a) *Si R est une algèbre de Banach, on a* $R^\triangledown \subseteq \mathrm{AP}(R)$.

(b) *Si, de plus,* $\mathrm{AP}(R)$ *satisfait à la propriété d'approximation, on a* $R^\triangledown = \mathrm{AP}(R)$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du

LEMME 2.3. *Soit E un sous-espace fermé de l'espace de Banach F. Si E satisfait à la propriété d'approximation, alors* $(E\check{\otimes}F)\cap(F\check{\otimes}E) = E\check{\otimes}E$.

Démonstration. D'après (P), on a $E\check{\otimes}E \subseteq (E\check{\otimes}F)\cap(F\check{\otimes}E)$. Supposons alors qu'il existe $\xi \in (E\check{\otimes}F)\cap(F\check{\otimes}E)$ tel que $\xi \notin E\check{\otimes}E$. Remarquons que la topologie $\sigma(E, E')$ sur E est précisément celle induite par $(F, \sigma(F, F'))$ ([1], p. 54). Or, comme $\xi \in E\check{\otimes}F$, on a $\xi \in \mathrm{KW}(E', F)$. Si l'image de ξ était dans E, on aurait $\xi \in E\check{\otimes}E$, en vertu de l'hypothèse que E satisfait à la propriété d'approximation. Ceci étant faux, il existe $u \in E'$ tel que $\xi(u) \notin E$. Par conséquent, il existe $v \in E^0$ —l'ensemble polaire de E — tel que $\langle\xi(u), v\rangle \neq 0$, c'est-à-dire $\langle\xi, u\otimes v\rangle \neq 0$. Mais puisque $E' = F'/E^0$, nous pouvons choisir $w \in F'$ tel que $\langle\xi, w\otimes v\rangle \neq 0$. D'autre part, comme $\xi \in F\check{\otimes}E$ et $v \in E^0$, on a $\langle\xi, w\otimes v\rangle = 0$. Cette contradiction nous amène à l'égalité voulue.

Remarque. En fait, il n'était pas nécessaire de supposer que E satisfait à la propriété d'approximation. La démonstration reste valable si on suppose que $E\check{\otimes}E = \mathrm{KW}(E', E)$. D'ailleurs si F satisfait à la propriété d'approximation, on peut démontrer que $(E\check{\otimes}F)\cap(F\check{\otimes}E) = E\check{\otimes}E$ si et seulement si $\mathrm{KW}(E', E) = E\check{\otimes}E$. On trouve dans [15] un exemple d'un espace de Banach E pour lequel $E\check{\otimes}E \subsetneqq \mathrm{KW}(E', E)$.

Démonstration de théorème 2.2. Rappelons que $(R\hat{\otimes}R)'$ est isométriquement isomorphe à $L(R, R')$, l'espace des applications linéaires continues $R \to R'$, muni de la norme uniforme. Cette identification associe à $N\varphi \in (R\hat{\otimes}R)'$ l'élément $\tilde{\varphi}$ de $L(R, R')$. Si $N\varphi \in R'\check{\otimes}R' \subseteq (R\hat{\otimes}R)'$ alors $\tilde{\varphi}$ est une application compacte (voir [6]).

(a) Si $\varphi \in R^\triangledown$, on a $N\varphi \in R^\triangledown\check{\otimes}R^\triangledown \subseteq R'\check{\otimes}R'$, et il en résulte que $\tilde{\varphi}$ est une application compacte. La première partie est démontrée.

(b) Supposons maintenant que $\mathrm{AP}(R)$ satisfait à la propriété d'approximation, et fixons $\varphi \in \mathrm{AP}(R)$. Nous nous proposons de démontrer que $N\varphi \in R'\check{\otimes}\mathrm{AP}(R) \subseteq R'\check{\otimes}R' \subseteq (R\hat{\otimes}R)'$, c'est-à-dire que φ est une application compacte $R \to \mathrm{AP}(R) \hookrightarrow R'$ ([6], p. 165). Pour des raisons de symétrie, $N\varphi \in R'\check{\otimes}\mathrm{AP}(R)$ si et seulement si $N\varphi \in \mathrm{AP}(R)\check{\otimes}R'$, et le lemme 2.3 permet de conclure que $N\varphi \in \mathrm{AP}(R)\check{\otimes}\mathrm{AP}(R)$. On en déduit que $\mathrm{AP}(R) \subseteq R^\triangledown$, d'où $\mathrm{AP}(R) = R^\triangledown$.

Démontrons alors que $N\varphi \in R'\check{\otimes}\mathrm{AP}(R)$. Ceci revient à dire que pour tout $r \in R$ l'application $\widetilde{\tilde{\varphi}(r)}$ est compacte ([6], p. 165). Il est immédiat que $\widetilde{\tilde{\varphi}(r)}(s) = \tilde{\varphi}(rs)$ pour tout $s \in R$. Soit (s_n) une suite dans B_R. Comme $\tilde{\varphi}$ est compact et (rs_n) est une suite bornée, nous pouvons extraire une sous-suite de Cauchy de $\tilde{\varphi}(rs_n) = \widetilde{\tilde{\varphi}(r)}(s_n)$ ([11], p. 98). Nous en déduisons que $\widetilde{\tilde{\varphi}(r)}$ est compacte.

Donnons deux exemples.

EXEMPLE 2.4. Si K est un espace compact séparé, $C(K)$ est une algèbre de Banach pour la multiplication ponctuelle. Kitchen [10] a prouvé que $\mathrm{AP}(C(K)) = M_d(K)$, les mesures discrètes sur K. D'après le théorème 2.2 et [6], p. 195, on a $C(K)^\triangledown = M_d(K)$.

Soit $f \in C(S)$, où S est un semigroupe topologique. Si $s \in S$, on définit $f_s \in C(S)$ par $f_s(t) = f(st)$ pour tout $t \in S$. f est dite *presque-périodique* si la fermeture de $\{f_s\colon s \in S\}$ est compacte dans $C(S)$ ([3], [4]). L'ensemble $A(S)$ des fonctions presque-périodiques sur S est un sous-espace fermé de $C(S)$.

Si S est muni de la topologie discrète, $l^1(S)$ est une algèbre de Banach pour la convolution:

$$\text{si } a = (a_s),\ b = (b_s) \in l^1(S), \text{ alors } a * b = \Big(\sum_{u \cdot v = s} a_u b_v\Big).$$

Exemple 2.5 $[l^1(S)]^\nabla = A(S)$.

Démonstration. Comme $A(S)$ satisfait à la propriété d'approximation ([6], p. 185), il suffit, d'après le théorème 2.2, de démontrer que $\mathrm{AP}(l^1(S)) = A(S)$. On sait que $[l^1(S)]' = l^\infty(S) = C(S)$. Si $s \in S$, définissons $e_s \in l^1(S)$ par $e_s(t) = 0$ si $s \neq t$ et $e_s(s) = 1$. Or, la boule unité $B_{l^1(S)}$ de $l^1(S)$ est l'enveloppe convexe équilibrée fermée de $\{e_s\colon s \in S\}$. Si $\varphi \in C(S)$ alors $\tilde\varphi(e_s) = \varphi_s$, et il est clair que la fermeture de $\{\tilde\varphi(b)\colon b \in B_{l^1(S)}\}$ est l'enveloppe convexe équilibrée fermée de $\{\varphi_s\colon s \in S\}$. Cette enveloppe est compacte si et seulement si $\{\varphi_s\colon s \in S\}$ est relativement compact ([11], p. 72). Ce n'est autre que la condition pour que φ soit presque-périodique.

Remarque. Notons $\mathrm{FAP}(R)$ la fermeture du sous-espace de R' comprenant les éléments φ tels que $\tilde\varphi$ soit de rang fini. Il n'est pas difficile de démontrer que $\mathrm{FAP}(R)$ est une coalgèbre injective et que $\mathrm{FAP}(R) \subseteq R^\nabla \subseteq \mathrm{AP}(R)$, [14]. Il serait intéressant de savoir dans quelles conditions on a $\mathrm{FAP}(R) = \mathrm{AP}(R)$.

3. Des foncteurs adjoints. Nous allons montrer que les passages au dual d'une coalgèbre injective et au codual d'une algèbre de Banach donnent lieu à des foncteurs adjoints. Comme application, nous démontrerons l'existence d'une coalgèbre injective colibre sur tout espace de Banach. Ce théorème d'existence sera démontré de façon plus concrète dans le paragraphe suivant, où nous faisons apparaître un lien avec les fonctions presque-périodiques.

Tout d'abord, il faut introduire une construction différente du codual R^∇ de l'algèbre de Banach R. Une construction semblable a déjà été utilisée dans [7], p. 79. Rappelons que $M\colon R\hat\otimes R \to R$ est la multiplication de R et que l'application transposée M' est notée N. Posons successivement:

(1) $C_1^R = R'$,

(2) $C_\omega^R = N^{-1}(C_\lambda^R \check\otimes C_\lambda^R) \cap C_\lambda^R$ si $\omega = \lambda+1$,

(3) $C_\omega^R = \bigcap\{C_\lambda^R\colon \lambda < \omega\}$ si ω est un ordinal limite.

(On se sert implicitement des propriétés (P) et (Q) de $\check\otimes$.)

Désignons par ζ un ordinal tel que $C_\zeta^R = C_{\zeta+1}^R = C$.

Proposition 3.1. *C est le codual de R.*

Démonstration. C est un sous-espace fermé de R'. Identifiant $C \check\otimes C$ à un sous-espace fermé de $(R\hat\otimes R)'$, on a

$$N(C) = N(C_{\zeta+1}^R) \subseteq C_\zeta^R \check\otimes C_\zeta^R = C\check\otimes C.$$

Observons que C contient le spectre de R. Il en résulte que C est une coalgèbre injective, et par définition on a $C \subseteq R^\nabla$.

Pour démontrer que $R^\nabla \subseteq C$, nous raisonnons par récurrence. Nous savons a priori que $R^\nabla \subseteq C_1^R = R'$. Fixons ω et supposons que si $\lambda < \omega$, alors $R^\nabla \subseteq C_\lambda^R$.

(1) Si ω est un ordinal limite, $R^\nabla \subseteq \bigcap\{C_\lambda^R\colon \lambda < \omega\} = C_\omega^R$.

(2) Si $\omega = \lambda+1$, alors $R^\nabla \subseteq N^{-1}(R^\nabla \check\otimes R^\nabla) \subseteq N^{-1}(C_\lambda^R \check\otimes C_\lambda^R)$, d'où $R^\nabla \subseteq C_\omega^R$.

Il s'ensuit que pour tout ordinal ω on a $R^\nabla \subseteq C_\omega^R$. En particulier, $R^\nabla \subseteq C_\zeta^R = C$, ce qui termine la démonstration.

Remarque. On peut prouver que $R^\nabla = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^R$ si ce dernier espace satisfait à la propriété d'approximation.

La proposition suivante est un coanalogue de la proposition 1.2 qui affirme que le transposé d'une contraction de coalgèbres est une contraction d'algèbres.

Proposition 3.2. *Soit $f \in \mathrm{ALG}(R, S)$, où R et S sont deux algèbres de Banach. Posons $f^\nabla = f'|_{S^\nabla}$. Alors*

(a) *$f^\nabla(S^\nabla) \subseteq R^\nabla$ et*

(b) *$f^\nabla \in \mathrm{COALG}(S^\nabla, R^\nabla)$.*

Démonstration. (a) Nous raisonnons encore par récurrence et nous montrons que $f'(C_\omega^S) \subseteq C_\omega^R$ pour tout ordinal ω. D'après la définition, on a $f'(C_1^S) \subseteq C_1^R$. Supposons alors que $f'(C_\lambda^S) \subseteq C_\lambda^R$ pour tout $\lambda < \omega$.

(1) Si ω est un ordinal limite, alors

$$f'(C_\omega^S) = f'\big(\{\bigcap C_\lambda^S\colon \lambda < \omega\}\big) \subseteq \bigcap\{f'(C_\lambda^S)\colon \lambda < \omega\} \subseteq C_\omega^R.$$

(2) Si $\omega = \lambda+1$ et $c \in C_\omega^S$, alors $N_S(c) \in C_\lambda^S \check\otimes C_\lambda^S$. Soient x et y dans R. Puisque $f \in \mathrm{ALG}(R, S)$, on a

$$\begin{aligned}\langle N_R f'(c) - (f'\check\otimes f')N_S(c), x\otimes y\rangle &= \langle f'(c), xy\rangle - \langle N_S(c), f(x)\otimes f(y)\rangle\\ &= \langle c, f(xy)\rangle - \langle c, f(x)f(y)\rangle = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que $N_R f'(c) = (f'\check\otimes f')N_S(c) \in C_\lambda^R \check\otimes C_\lambda^R$, et nous trouvons donc que

$$f'(c) \in N_R^{-1}(C_\lambda^R \check\otimes C_\lambda^R) \cap C_\lambda^R = C_\omega^R.$$

Par conséquent, $f'(C_\omega^S) \subseteq C_\omega^R$ pour tout ω, et en vertu de 3.1 on a $f^\nabla(S^\nabla) \subseteq R^\nabla$.

(b) Comme il est évident que $e_{S^\nabla} f^\nabla = e_{R^\nabla}$, le raisonnement de $(a, 2)$ fournit la démonstration de (b).

Avant d'aborder la question des fonceteurs adjoints, donnons une caractérisation plus abstraite de R^∇.

Proposition 3.3. *Soit R une algèbre de Banach.*

(a) *Il existe un semigroupe discret S tel que R soit un quotient (par un idéal fermé I) de $l^1(S)$.*

(b) *Si $\mathrm{AP}(R)$ satisfait à la propriété d'approximation, alors $R^\nabla = A(S)\cap I^0$.*

Démonstration. (a) Nous prenons pour S la boule unité de R, munie de la topologie discrète. Si nous définissons une application linéaire π: $l^1(S)\to R$ par

$$\pi\big((\lambda_s)_{s\in S}\big) = \sum_{s\in S}\lambda_s s,$$

il est immédiat que π est un épimorphisme d'algèbres qui envoie $B_{l^1(S)}$ sur B_R. Nous en déduisons que R est isométriquement isomorphe à $l^1(S)/I$, où $I = \ker\pi$.

(b) Comme $\pi\colon l^1(S)\to R$ est un épimorphisme d'algèbres, $\pi'\colon R'\to I^0 \hookrightarrow l^\infty(S)$ est une isométrie. On vérifie aussitôt que

$$\pi'\big(\mathrm{AP}(R)\big) = \mathrm{AP}\big(l^1(S)\big)\cap I^0 = A(S)\cap I^0,$$

en vertu de l'exemple 2.5. Il s'ensuit que $\pi'(R^\nabla) = A(S)\cap I^0$, et la proposition 3.2 permet de conclure que R^∇ s'identifie comme coalgèbre injective à $A(S)\cap I^0$.

Soient $\mathscr{C}$ la catégorie des coalgèbres injectives et des contractions de coalgèbres, et $\mathscr{A}$ la catégorie des algèbres de Banach et des contractions d'algèbres. D'après les résultats précédents, il est clair que

$$(\ )^\nabla\colon R\to R^\nabla;\ f\to f^\nabla$$

est un foncteur contravariant $\mathscr{A}\to\mathscr{C}$, et que

$$(\ )'\colon C\to C';\ f\to f'$$

est un foncteur contravariant $\mathscr{C}\to\mathscr{A}$.

On établit une correspondance bijective entre $\mathrm{ALG}(R, C')$ et $\mathrm{COALG}(C, R^\nabla)$ de la manière suivante:

π désigne toujours le plongement d'un espace de Banach dans son bidual, et i désigne une inclusion. Si $f\in\mathrm{ALG}(R, C')$, alors l'application

$$C\xrightarrow{\pi}(C')^\nabla\xrightarrow{f^\nabla}R^\nabla$$

est une contraction de coalgèbres. (On vérifie aussitôt que $\pi(C)\subseteq(C')^\nabla$.) D'autre part, si $g\in\mathrm{COALG}(C, R^\nabla)$, alors

$$R\xrightarrow{\pi}R''\xrightarrow{i'}(R^\nabla)'\xrightarrow{g'}C'$$

est une contraction d'algèbres.

Théorème 3.4 *$(\ )'$ et $(\ )^\nabla$ sont adjoints à droite.*

La démonstration ne pose aucune difficulté et nous la laissons au lecteur.

Passons maintenant à la question des coalgèbres injectives colibres. Tout d'abord il nous faut une définition.

Définition. Soient B un espace de Banach, C une coalgèbre injective et $p\colon C\to B$ une contraction. Alors le couple (C, p) est dit *coalgèbre injective colibre sur B* si quelles que soient D, une coalgèbre injective, et $f\colon D\to B$, une contraction, il existe une contraction de coalgèbres F: $D\to C$ rendant commutatif le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "p"'] & & D \arrow[ll, "F"'] \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Dès qu'on sait démontrer l'existence d'une coalgèbre injective colibre sur B, il est clair qu'elle est unique, à une isométrie de coalgèbres près. Dorénavant, nous parlerons de *la* coalgèbre injective colibre $\mathbb{S}(B)$ sur B. Si nous avions défini nos coalgèbres en termes du produit tensoriel projectif $\hat{\otimes}$, nous aurions pu utiliser un résultat dans [5] pour démontrer le théorème d'existence. Malheureusement, la méthode de Fox s'appuie sur des propriétés très particulières de $\hat{\otimes}$, et elle ne marche pas dans notre cas.

On peut cependant reprendre presque mot pour mot des raisonnements de Sweedler [13] pour démontrer l'existence de $\mathbb{S}(B'')$; l'existence de $\mathbb{S}(B)$ découlera du fait qu'il y a un plongement isométrique de B dans son bidual.

Signalons qu'il est bien connu [17] que l'algèbre de Banach libre sur B s'identifie à

$$S(B) = C\oplus_{l^1}B\oplus_{l^1}(B\hat{\otimes}B)_{\mathrm{sym}}\oplus_{l^1}(B\hat{\otimes}B\hat{\otimes}B)_{\mathrm{sym}}\oplus_{l^1}\cdots$$

où, par exemple, $(B\hat{\otimes}B)_{\mathrm{sym}}$ est le quotient de $B\hat{\otimes}B$ par l'intersection des noyaux des formes bilinéaires continues symétriques sur $B\times B$. La multiplication est définie à partir des relations

$$[b_1\otimes\ldots\otimes b_n]\cdot[b_{n+1}\otimes\ldots\otimes b_m] = [b_1\otimes\ldots\otimes b_m]$$

où $[\ ]$ désigne une classe d'équivalence et $b_i\in B$ $(1\leqslant i\leqslant m)$.

Théorème 3.5. *Soit B un espace de Banach. Alors $\mathbb{S}(B'') = [S(B')]^\nabla$.*

Démonstration. Voir [13], pp. 126–128. L'application $p\colon\mathbb{S}(B'')\to B''$ exigée par la définition est la composition

$$[S(B')]^\nabla\xrightarrow{j}[S(B')]'\xrightarrow{i'}B''$$

où j est l'inclusion et $i\colon B'\to S(B')$; $b'\to(0, b', 0, \ldots)$.

Pour bien exploiter le théorème 3.5, nous allons démontrer que les sous-espaces héritent des théorèmes d'existence.

LEMME 3.6. *Soient (C, p) une coalgèbre injective colibre sur l'espace de Banach B, et B_1 un sous-espace fermé de B. Supposons qu'il existe un atome a de C tel que $p(a) \in B_1$. Alors, il existe dans C un sous-espace fermé maximal unique C_1 de sorte que:*

(a) *C_1 soit une coalgèbre injective pour la comultiplication induite par C, et*

(b) *$p(C_1) \subseteq B_1$.*

Si p_1 désigne la restriction de p à C_1, alors (C_1, p_1) est une coalgèbre injective colibre sur B_1.

Remarque. C'est la propriété (P) de $\hat{\otimes}$ qui rend légitime l'énoncé du lemme 3.6. On trouve dans [15] une discussion du problème de la bonne définition d'une „sous-coalgèbre".

Démonstration. Pour établir l'existence et l'unicité de C_1, il suffit de reprendre, mutatis mutandis, la démonstration de la proposition 2.1.

Considérons le diagramme (i) ci-dessous.

(i)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "p"'] & & D \arrow[ll, "F"'] \arrow[d, "f"] \\ B & \supseteq & B_1 \end{tikzcd}$$

(ii)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "p_1"'] & & D \arrow[ll, "F"'] \arrow[dl, "f"] \\ & B_1 & \end{tikzcd}$$

$f\colon D \to B_1 \subseteq B$ est une contraction, D est une coalgèbre injective et F est la contraction de coalgèbres qui rend le diagramme commutatif. On voit facilement que $\overline{F(D)}$ est une coalgèbre injective pour la comultiplication induite par C. Comme p est continue et $pF = f\colon D \to B_1$, on a $p\left(\overline{F(D)}\right) \subseteq B_1$. Il en résulte que $\overline{F(D)} \subseteq C_1$, et F est donc une contraction de coalgèbres qui rend commutatif le diagramme (ii). Si G était une autre contraction de coalgèbres telle que (iii) commute, elle rendrait commutatif (iv) ce qui entraînerait que $G = F$.

(iii)
$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[dr, "p_1"'] & & D \arrow[ll, "G"'] \arrow[dl, "f"] \\ & B_1 & \end{tikzcd}$$

(iv)
$$\begin{tikzcd} C \arrow[dr, "p"'] & & D, \arrow[ll, "G"'] \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Ce lemme permet de démontrer le théorème général d'existence.

THÉORÈME 3.7. *Soit B un espace de Banach. Alors il existe une coalgèbre injective colibre sur B.*

Démonstration. Nous plongeons B dans son bidual B''. En vertu de 3.5 et 3.6, il suffit de trouver un atome a de $\mathbb{S}(B'')$ tel que $p(a) \in B$.

En fait, nous en trouverons une surabondance. Puisque $\mathbb{S}(B'') = [S(B')]^{\gamma}$, les atomes de $\mathbb{S}(B'')$ sont précisément les éléments du spectre de $S(B')$. Or, le dual de $S(B')$ s'identifie à

$$C \oplus_{l^\infty} B'' \oplus_{l^\infty} L_2(B') \oplus_{l^\infty} L_3(B') \oplus_{l^\infty} \ldots$$

où $L_n(B')$ est l'espace des formes n-linéaires continues symétriques sur $B' \times B' \times \ldots \times B'$. Par conséquent, les éléments de spectre du $S(B')$ sont de la forme

$$1 \oplus \varphi \oplus (\varphi \otimes \varphi) \oplus (\varphi \otimes \varphi \otimes \varphi) \oplus \ldots$$

où φ est un élément de la boule unité de B''. D'après la définition de p, on a $p(1 \oplus \varphi \oplus (\varphi \otimes \varphi) \oplus \ldots) = \varphi$. Nous achevons la démonstration en prenant φ dans la boule unité de B.

Si C et D sont deux coalgèbres injectives, la composition

$$C \check{\otimes} D \xrightarrow{N_C \check{\otimes} N_D} (C \check{\otimes} C) \check{\otimes} (D \check{\otimes} D) \xleftrightarrow{\text{permutation}} (C \check{\otimes} D) \check{\otimes} (C \check{\otimes} D)$$

définit une comultiplication sur $C \check{\otimes} D$. En effet, $C \check{\otimes} D$, munie de cette comultiplication, est le produit de C et D dans la catégorie $\mathscr{C}$. Plus précisément, si E est une coalgèbre injective et si $F_C\colon E \to C$ et $F_D\colon E \to D$ sont des contractions de coalgèbres, il existe une contraction de coalgèbres unique $F\colon E \to C \check{\otimes} D$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F_C"] \arrow[d, "F_D"'] \arrow[dr, "F"] & C \\ D & C \check{\otimes} D \arrow[l, "\pi_D"] \arrow[u, "\pi_C"'] \end{tikzcd}$$

où π_C est la contraction de coalgèbres

$$C \check{\otimes} D \xrightarrow[\mathrm{Id}_C \check{\otimes} e_D]{} C \check{\otimes} C \xleftrightarrow[\text{identification}]{} C$$

et π_D est définie de façon semblable.

Remarquons qu'ici nous utilisons fortement le fait que nos coalgèbres sont cocommutatives et possèdent une coidentité.

Puisqu'il est bien connu que $B_1 \oplus_{l^\infty} B_2$ est le produit de B_1 et B_2 dans la catégorie des espaces de Banach et des contractions, il est facile de démontrer la

PROPOSITION 3.8. *Soient B_1 et B_2 deux espaces de Banach. Alors*

$$\mathbb{S}(B_1 \oplus_{l^\infty} B_2) = \mathbb{S}(B_1) \check{\otimes} \mathbb{S}(B_2).$$

Nous laissons les détails au lecteur.

4. Les coalgèbres injectives colibres et les fonctions presque-périodiques. Dans ce paragraphe nous introduisons une méthode différente qui permet de retrouver le théorème d'existence pour les coalgèbres injectives colibres. Nous allons identifier la coalgèbre injective colibre sur l_K^∞, l'espace des fonctions bornées sur K lettres, à l'espace des fonctions presque-périodiques sur le semigroupe libre (discret) sur K lettres, et nous présenterons une généralisation de ce résultat, due au professeur K.H. Hofmann (Tulane). Le théorème 3.7 apparaîtra alors comme corollaire.

Nous aurons besoin d'une généralisation, due à De Leeuw et Glicksberg, du compactifié de Bohr d'un groupe abélien localement compact.

THÉORÈME DG [3]. (a) *Soit S un semigroupe topologique. Alors il existe γS un semigroupe compact et $i_S\colon S\to\gamma S$ un monomorphisme dense tels que la proposition suivante soit vérifiée:*

quels que soient T un semigroupe compact et $\varphi\colon S\to T$ un homomorphisme, il existe un homomorphisme unique $\Phi\colon \gamma S\to T$ de sorte que le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "i_S"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \gamma S \arrow[dl, "\Phi"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

(b) *L'espace $A(S)$ des fonctions presque-périodiques sur S s'identifie à l'espace des fonctions continues sur γS, muni de la norme uniforme.*

Le couple $(\gamma S, i_S)$ — noté simplement γS — s'appelle *compactifié presque-périodique de S*. γS est unique, à un isomorphisme près.

Considérons l'exemple $S=\boldsymbol{Z}^+$, le semigroupe additif discret des entiers nonnégatifs. Dans ce cas, $\gamma\boldsymbol{Z}^+$ est la fermeture de $\boldsymbol{Z}^+\times\boldsymbol{Z}^+$ dans le semigroupe compact $\alpha\boldsymbol{Z}^+\times\gamma\boldsymbol{Z}$, où $\alpha\boldsymbol{Z}^+$ désigne le compactifié d'Alexandroff de $\boldsymbol{Z}^+$ et $\gamma\boldsymbol{Z}$ désigne le compactifié de Bohr de $\boldsymbol{Z}$. Pour les détails, on pourra consulter [9], p. 67.

THÉORÈME 4.1. *Notons $S=S_K$ le semigroupe libre discret sur K lettres. Alors* $\mathrm{S}(l_K^\infty)=A(S_K)$.

Démonstration. Il sera utile d'identifier $S=S_K$ à $\sum_{k\in K}\boldsymbol{Z}^+$, le sous-semigroupe de $\prod_{k\in K}\boldsymbol{Z}^+$ comprenant les éléments $(n_k)_{k\in K}$ qui n'ont qu'un nombre fini de n_k différents de zéro. Bien entendu, S est muni de la topologie discrète. Nous écrirons $e_j=(\delta_{jk})_{k\in K}$ et nous allons systématiquement confondre les éléments de S et leurs images par i_S dans γS.

Munissons $A(S)=C(\gamma S)$ de la comultiplication habituelle N; la coidentité e est l'application qui associe à tout élément de $A(S)$ sa valeur en $\vec{0}$.

Tout d'abord nous définissons une contraction $p\colon C(\gamma S)\to l_K^\infty$ en posant

$$[p(u)]_k=u(e_k)\qquad (k\in K,\ u\in C(\gamma S)).$$

Soient maintenant D une coalgèbre injective et $f\colon D\to l_K^\infty$ une contraction linéaire. Notre but est de construire une contraction de coalgèbres $F\colon D\to C(\gamma S)$ jouissant de la propriété $pF=f$. Rappelons qu'en vertu de 1.1, $B_{D'}$ est un semigroupe compact. Si $k\in K$ nous définissons $f_k\in B_{D'}$ par la relation

$$\langle f_k, d\rangle=[f(d)]_k\qquad (d\in D).$$

Soit $\vec{n}=(n_k)\in S$. Nous considérons

$$\varphi(\vec{n})=\prod_{k\in K}(f_k)^{n_k}\in B_{D'}.$$

Puisque $(f_k)^0$ est l'identité, il s'agit d'un produit fini, donc bien défini, et comme S est muni de la topologie discrète, il est évident que $\varphi\colon S\to B_{D'}$ est un homomorphisme. En conséquence du théorème (DG), il existe un homomorphisme unique $\Phi\colon\gamma S\to B_{D'}$ tel que $\Phi i_S=\varphi$.

Soit $d\in D$. Nous définissons l'application $F(d)\colon\gamma S\to C$ par la relation

$$F(d)(\sigma)=\langle\Phi(\sigma), d\rangle\qquad(\sigma\in\gamma S).$$

Nous allons démontrer que F est la contraction de coalgèbres cherchée.

D'abord, si $\sigma_0\in\gamma S$ et $\varepsilon>0$, nous posons

$$U_\varepsilon=U_\varepsilon(\sigma_0, d)=\{\sigma\in\gamma S\colon |\langle\Phi(\sigma), d\rangle-\langle\Phi(\sigma_0), d\rangle|<\varepsilon\}.$$

Comme Φ est continue, nous pouvons affirmer que U_ε est un voisinage de σ_0. Mais alors

$$|F(d)(\sigma)-F(d)(\sigma_0)|<\varepsilon\qquad(\sigma\in U_\varepsilon)$$

et nous en déduisons que $F(d)\in C(\gamma S)$.

On vérifie aussitôt que $F\colon D\to C(\gamma S)$; $d\to F(d)$ est une contraction. Si l'on identifie $C(\gamma S)\check{\otimes}C(\gamma S)$ à $C(\gamma S\times\gamma S)$, alors pour tout $d\in D$ et $\sigma,\tau\in\gamma S$, on a

$$\begin{aligned}[(F\check{\otimes}F)N_D(d)](\sigma,\tau)&=\langle N_D(d), \Phi(\sigma)\otimes\Phi(\tau)\rangle=\langle d, \Phi(\sigma)\Phi(\tau)\rangle\\&=\langle d, \Phi(\sigma\tau)\rangle=F(d)(\sigma\tau)=[NF(d)](\sigma,\tau),\end{aligned}$$

d'où $NF=(F\check{\otimes}F)N_D$. Puisqu'il est clair que $eF=e_D$, il en résulte que F est une contraction de coalgèbres.

Or, quels que soient $k\in K$ et $d\in D$, on a

$$[pF(d)]_k=F(d)(e_k)=\langle\Phi(e_k), d\rangle=\langle\varphi(e_k), d\rangle=f_k(d)=[f(d)]_k,$$

d'où $pF=f$.

Nous avons prouvé que F répond à toutes les conditions désirées sauf celle de l'unicité. Soit alors G une application ayant les mêmes propriétés que F. Fixons encore $d \in D$. Alors

$$G(d)(\vec{0}) = eG(d) = e_D(d) = eF(d) = F(d)(\vec{0}),$$

et comme $pG = f = pF$, on a $G(d)(e_k) = [f(d)]_k = F(d)(e_k)$ $(k \in K)$. Nous allons utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que $G(d) = F(d)$ sur S. Mais puisque S est dense dans γS et $G(d)$ et $F(d)$ sont des fonctions continues, nous pourrons en déduire que $G(d) = F(d)$, ce qui achèvera la démonstration.

Soit alors $n \geqslant 1$. Supposons que pour tout n-tuple $(k_1, \ldots, k_n) \subseteq K$ on a

$$G(c)(e_{k_1} \ldots e_{k_n}) = F(c)(e_{k_1} \ldots e_{k_n}), \qquad \forall c \in D.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un tenseur $\sum_{j=1}^{J} b_j \otimes c_j \in D \otimes D$ tel que

$$\|N_D(d) - \sum_{j=1}^{J} b_j \otimes c_j\|_{D\check{\otimes} D} \leqslant \varepsilon.$$

Ecrivons $x = e_{k_2} \ldots e_{k_{n+1}}$. Comme F et G sont des contractions de coalgèbres, on a

$$\begin{aligned} |G(d)(e_{k_1} \ldots e_{k_{n+1}}) - F(d)(e_{k_1} \ldots e_{k_{n+1}})| &= |G(d)(e_{k_1}x) - F(d)(e_{k_1}x)| \\ &= |NG(d)(e_{k_1}, x) - NF(d)(e_{k_1}, x)| \\ &= |(G \hat{\otimes} G) N_D(d)(e_{k_1}, x) - (F \hat{\otimes} F) N_D(d)(e_{k_1}, x)| \\ &\leqslant 2\varepsilon + |\sum_{j=1}^{J} G(b_j)(e_{k_1}) G(c_j)(x) - \sum_{j=1}^{J} F(b_j)(e_{k_1}) F(c_j)(x)| = 2\varepsilon, \end{aligned}$$

en vertu de l'hypothèse de récurrence.

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, nous en déduisons que

$$G(d)(e_{k_1} \ldots e_{k_{n+1}}) = F(d)(e_{k_1} \ldots e_{k_{n+1}})$$

et, par récurrence, que $G(d) = F(d)$ sur S. La démonstration est terminée.

Grâce au théorème 4.1, nous pouvons procéder à une

Nouvelle démonstration de 3.7. Soit B un espace de Banach. Désignons la boule unité de B' par K. Il est bien connu que B est un sous-espace fermé de l_K^∞: on fait correspondre à $b \in B$ l'élément $(\langle b, k\rangle)_{k \in K}$ de l_K^∞. D'après 3.6 et 4.1, il suffit, en conservant les notations de (4.1), de trouver un atome a de $\mathrm{S}(l_K^\infty) = C(\gamma S)$ tel que $(a(e_k))_{k \in K} \in B$.

On sait que les atomes de $C(\gamma S)$ sont précisément les semicaractères de γS. Si b est dans la boule unité de B, nous posons

$$\chi_b(\vec{n}) = \prod_{k \in K} \langle b, k\rangle^{n_k} \qquad (\vec{n} = (n_k) \in S).$$

χ_b est alors un homomorphisme $S \to \boldsymbol{D}$, où $\boldsymbol{D}$ est le semigroupe multiplicatif compact $\{z \in \boldsymbol{C}: |z| \leqslant 1\}$. Il résulte du théorème DG que χ_b se prolonge en un homomorphisme X_b: $\gamma S \to \boldsymbol{D}$; en d'autres termes, c'est un semicaractère de γS. Mais, pour tout $k \in K$, $X_b(e_k) = \langle b, k\rangle$, et donc $(X_b(e_k))_{k \in K}$ s'identifie à $b \in B \subseteq l_K^\infty$.

Esquissons une démonstration différente du théorème 4.1. Notons $c_0(K)$ l'espace des fonctions bornées sur K lettres qui „tendent vers zéro à l'infini". Remarquons que $[c_0(K)]' = l^1(K)$ et que $[l^1(K)]' = l_K^\infty$. En vertu du théorème 3.5, on a $\mathrm{S}(l_K^\infty) = [S(l^1(K))]^\gamma$, et on démontre sans difficulté que $S(l^1(K)) = l^1(S_K)$, où S_K est le semigroupe libre sur K lettres. Puisque nous savons déjà que $[l^1(S_K)]^\gamma = A(S_K)$, nous avons démontré à nouveau que $\mathrm{S}(l_K^\infty) = A(S_K)$.

Pour conclure, nous présentons une généralisation du théorème 4.1, qui nous a été communiqué par le professeur K. H. Hofmann (Tulane University). Soit U le foncteur d'oubli de la catégorie des semigroupes compacts à la catégorie des espaces compacts. D'après le théorème de Freyd ([18], p. 117), U admet un adjoint à gauche, que nous noterons V.

Théorème 4.2 (Hofmann). *Soient X un espace compact et j: $X \to U(V(X)) = V(X)$ l'homomorphisme unique qui correspond à l'identité $V(X) \to V(X)$. Soit $C(j)$: $C(V(X)) \to C(X)$ l'application induite par j. Alors $(C(V(X)), C(j))$ est la coalgèbre injective colibre sur $C(X)$.*

Remarque. Le théorème 4.1 n'est autre que le théorème 4.2 pour $X = \beta K$, où K est un espace discret.

Démonstration. Soient D une coalgèbre injective et f: $D \to C(X)$ une contraction linéaire. Nous définissons une application continue f^*: $X \to B_{D'} = B$ par

$$\langle d, f^*(x)\rangle = f(d)(x) \qquad (x \in X, d \in D).$$

On vérifie sans peine que $C(f^*) r_D = f$, où r_D désigne l'application naturelle $D \to C(B)$:

$$r_D(d)(u) = \langle d, u\rangle \qquad (d \in D, u \in B).$$

Il est clair que r_D est une contraction de coalgèbres. Comme U et V sont adjoints, il existe un homomorphisme unique f^+: $V(X) \to B$ tel que $f^+ j = f^*$, d'où $C(f^*) = C(j) C(f^+)$. L'application $F = C(f^+) r_D$: $D \to C(V(X))$ est une contraction de coalgèbres qui satisfait à $C(j) F = C(f^*) r_D = f$. Soit G: $D \to C(V(X))$ une contraction de coalgèbres telle que $C(j) F = C(j) G$. Pour terminer la démonstration, nous devons montrer que $F = G$.

Soit $P(V(X))$ le semigroupe compact des mesures de probabilité sur $V(X)$. Les applications transposées F' et G' induisent des homomorphismes $P(V(X)) \to B$ de semigroupes affines compacts. En vertu de la relation $C(j)F = C(j)G$, ces homomorphismes coïncident sur les mesures de Dirac $\{\delta_{j(x)}\colon x\in X\}$, et donc sur le sous-semigroupe convexe faiblement fermé engendré par cet ensemble, c'est-à-dire sur $P(V(X))$. Il s'ensuit que F' et G' coïncident sur l'enveloppe convexe équilibrée faiblement fermée de $P(V(X))$, et donc sur un voisinage de 0. On en déduit que $F' = G'$, d'où $F = G$.

Références

[0] I. Amemiya and K. Shiga, *On tensor products of Banach spaces*, Kodai Math. Seminar Reports 9 (1957), pp. 161–176.

[1] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Fasc. XVIII, livre 5, Hermann, Paris 1973.

[2] J. B. Cooper and P. Michor, *Duality of compactological and locally compact groups*, Springer Lecture Notes in Math. 540 (1976), pp. 188–207.

[3] K. Deleeuw and I. Glicksberg, *Applications of almost periodic compactifications*, Acta Math. 105 (1961), pp. 63–97.

[4] —, — *Almost periodic functions on semigroups*, Acta Math. 105 (1961), pp. 99–140.

[5] T. Fox, Ph. D. Thesis, McGill University, Montréal (1976).

[6] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6a] — *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), pp. 1–79.

[7] K. H. Hofmann, *The duality of compact semigroups and C*-bigebras*, Springer Lecture Notes in Math. 129 (1970).

[8] — *Category theoretical methods in topological algebra*, Springer Lecture Notes in Math. 540 (1976), pp. 345–402.

[9] K. H. Hofmann and P. S. Mostert, *Elements of compact semigroups*, C. E. Merrill Books (1966).

[10] J. Kitchen, *Normed modules and almost periodicity*, Monatsh. Math. 70 (1966), pp. 233–243.

[11] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw Hill Series in Higher Math, New York 1973.

[12] S. Sankaran and S. A. Selesnick, *Some remarks on C*-bigebras and duality*, Semigroup Forum 3 (1972), pp. 108–129.

[13] M. E. Sweedler, *Hopf algebras*, Benjamin (1969).

[14] A. M. Tonge, *Algebras and coalgebras in analysis*, Ph. D. Thesis, Cambridge, G. B., 1975.

[15] — *Translation invariance, compact semigroups and injective coalgebras*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 83 (1978), pp. 225–236.

[16] — *Banach algebras and absolutely summing operators*, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 80 (1976), pp. 465–473.

[17] N. Th. Varopoulos, *A direct decomposition of the measure algebra of a locally compact abelian group*, Ann. Inst. Fourier 16 (1966), pp. 121–143.

[18] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verl. (1971).

Received March 7, 1977 (1273)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVII. (1980)

On basic sequences in non-locally convex spaces

by

J. R. MORROW (Worcester, Mass.)

Abstract. The results in this paper concern linear topological spaces that are not necessarily locally convex and basic sequences in such spaces. The main result is a characterization of a block basic sequence which is a subsequence of a basis. Other sequences generated by a basis are considered.

0. Introduction. This paper deals with basic sequences in linear topological spaces which are not necessarily locally convex. The purpose of this paper is to study several types of sequences generated by a basis. One of these types is the block perturbation introduced by Pełczyński and Singer [10]; a second type is the block basic sequence; and the third type studied has the form $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, where $y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ and $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ is a basis.

Section 1 contains the essential definitions and terminology for the remainder of the paper.

Two important properties of basic sequences in F-spaces are contained in Section 2. An elementary proof of the "selection principle" of Bessaga and Pełczyński [2], in the context of an F-space, is given following closely the work of N. J. Kalton [7].

Section 3 contains a characterization of the space c_0.

Block perturbations are used in Section 4 to characterize the locally bounded spaces among F-spaces with a bounded, regular basis.

Section 5 contains results concerning when a block basic sequence is a subsequence of a basis.

The paper is concluded with an elementary proof of a result of L. Drewnowski [4] concerning the weak basis theorem.

The author wishes to thank the referee for his/her helpful comments.

1. Definitions and terminology. Let X denote an arbitrary linear topological space in this section unless otherwise specified. Let (y_n) be a sequence contained in X; then $[y_n]$ denotes the closed linear span of (y_n). Two basic sequences (y_n) and (z_n) are said to be *equivalent* provided that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ converges if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$ converges. A basic sequence