[17] — *A survey of recent results on the spectral radius in Banach algebras*, Proc. of the Fourth Prague Symposium on General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra, August 1976, Part B, pp. 531–540, Prague 1977.
[18] — *Properties of the spectral radius in Banach algebras*, thesis, Warszawa 1977.
[19] — *Idempotents in Banach algebras*, Bull. London Math. Soc. 11 (1979), pp. 177–183.
[20] B. Aupetit and J. Zemánek, *On the spectral radius in real Banach algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (1978), pp. 969–973.
[21] А. С. Маркус и А. А. Семенцул, *Об операторах, слабо возмущающих спектр*, Сибирский мат. ж. 19 (1978), pp. 646–653.

MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE CZECHOSLOVAK ACADEMY OF SCIENCES
PRAHA, CZECHOSLOVAKIA

Present address:
MATHEMATICAL INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES
00-950 WARSZAWA, P.O. BOX 137, POLAND

Received March 11, 1977 (1276)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVII. (1980)

Compacts de fonctions mesurables et filtres non mesurables

par

MICHEL TALAGRAND (Paris)

Resumé. Désignons par $M(\Sigma)$ l'ensemble des fonctions réelles mesurables sur l'espace mesuré (X, Σ, μ) et par τ_p (resp: τ_m) la topologie de la convergence ponctuelle (resp: en mesure) sur $M(\Sigma)$.

On construit un espace pathologique (X, Σ, μ) et une suite de $M(\Sigma)$ qui est relativement compacte mais ne contient aucune sous suite convergente μ-p.p. Ce résultat répond à une question de D. H. Fremlin qui a montré que cette situation est impossible si (X, Σ, μ) est „parfait".

Nous montrons également qu'elle est impossible si Σ est la tribu complétée d'une tribu dénombrablement engendrée. Si $A \subset M(\Sigma)$ est compact pour τ_p et *séparé* pour τ_m, alors τ_p et τ_m coincident sur A, qui est donc métrisable. Ce résultat résoud un problème de A. Ionescu-Tulcea.

La construction de l'exemple est basée sur le fait frappant qu'une intersection dénombrable de filtres non-mesurables est non-mesurable. La méthode qui conduit à ce résultat est utilisée pour une étude systématique des filtres non-mesurables. On étudie également par analogie les filtres non-maigres dont on obtient une caractérisation très simple, qui généralise des résultats connus sur les filtres analytiques.

On étudie enfin l'indépendance pour les filtres de la propriété d'être maigre ou mesurable.

0. Introduction. Cet article développe les résultats annoncées dans deux notes aux Comptes Rendus ([10], [11]).

Étant donné un espace mesuré (X, Σ, μ), nous désignerons par $M(\Sigma)$ l'espace des fonctions réelles mesurables. Nous désignerons par τ_p la topologie produit de $\boldsymbol{R}^X$, ainsi que la topologie induite sur $M(\Sigma)$, que nous appellerons topologie de la convergence ponctuelle. L'identification d'une partie Y de X et de sa fonction indicatrice χ_Y, définit une topologie sur Σ qui sera encore notée τ_p.

Sur $M(\Sigma)$ nous désignerons par τ_m la topologie de la convergence en mesure, c'est-à-dire la topologie définie par les semi-normes

$$l_E(x) = \int_E \inf(1, |x(t)|)\, d\mu(t) \qquad \forall x \in M(\Sigma)$$

où $E \in \Sigma$ et $\mu(E) < +\infty$.

Lorsque (X, Σ, μ) est σ-fini, τ_m est définissable par un écart.

Suivant [1], § 1 B, un espace mesuré sera dit *parfait* si pour toute fonction $x \in M(\Sigma)$, tout ensemble $E \in \Sigma$, de mesure finie, et toute partie F de $\boldsymbol{R}$ telle que $\overset{-1}{x}(F) \in \Sigma$, il existe un borélien $B \subset F$ tel que

$$\mu\big(E \cap \overset{-1}{x}(F)\big) = \mu\big(E \cap \overset{-1}{x}(B)\big).$$

Dans [1] D. H. Fremlin prouve le résultat suivant:

THÉORÈME 1 (Fremlin). *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré parfait σ-fini et (x_n) une suite de $M(\Sigma)$. Alors l'une des éventualités suivantes se produit nécessairement:*

(i) *La suite (x_n) possède une sous-suite convergente μ-p.p.*

(ii) *La suite (x_n) possède une sous-suite dont aucune valeur d'adhérence pour τ_p n'est mesurable.*

Ce résultat a amené Fremlin à proposer le problème suivant:

PROBLÈME 2. *Existe-t-il espace de probabilité (X, Σ, μ) et un ensemble $A \subset M(\Sigma)$ compact pour τ_p, qui contienne une suite (x_n) n'ayant aucune sous-suite convergente μ-p.p.?*

Toujours dans [1], Fremlin déduit du théorème 1 le corollaire suivant (voir § 7):

THÉORÈME 3 (Fremlin). *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré parfait σ-fini et $A \subset M(\Sigma)$ un ensemble compact pour τ_p et séparé pour τ_m. Alors τ_p et τ_m coïncident sur A, qui est en particulier métrisable pour τ_p.*

Ce résultat est une réponse partielle au problème suivant, proposé par A. Ionescu Tulcea.

PROBLÈME 4. *Quels sont les espaces mesurés (X, Σ, μ) tels que pour tout ensemble $A \subset M(\Sigma)$ compact pour τ_p est séparé pour τ_m, les topologies τ_p et τ_m coïncident sur A?*

Dans le début de ce travail, nous donnons une réponse positive au problème 2. L'idée de la construction est due à D. H. Fremlin, et la difficulté qu'elle présente a amemé la question de Fremlin qui est à l'origine de tout ce travail: Une intersection dénombrable d'ultra-filtres libres peut-elle être mesurable? (une explication plus détaillée est donnée au début du § 1). L'intérêt des résultats sur les filtres que nous obtenons à cette occasion nous semblant dépasser largement le cadre du problème 3, ces résultats sont ensuite développés pour eux-mêmes, et constituent le coeur de ce travail.

Les paragraphes 7 et 8 sont consacrés à la solution du problème 4, et l'on montre sous l'axiome de Martin que tout espace mesuré σ-fini convient. (En ce qui concerne les espaces non σ-finis, il résulte de [1], proposition 4 D et 4 I, que la réponse dépend de l'axiomatique choisie.)

A l'occasion de cette démonstration, nous obtenons un résultat voisin du théorème 1 (théorème 34).

En plus des raisons déjà mentionnées, je tiens à remercier chaleureusement D. H. Fremlin pour une correspondance enrichissante. En particulier, il m'a fait remarquer que la proposition 20 pouvait avantageusement remplacer un premier résultat plus compliqué.

Je tiens également à remercier G. Godefroy, à qui est due la 4 ème équivalence du théorème 21, et qui m'a fait connaître les travaux antérieurs de Mathias, Baumgartner et Louveau.

1. Tribu engendrée par les filtres non mesurables. Désignons par I un ensemble infini fixé. L'ensemble des parties de I s'identifie de façon naturelle à $K = \{0, 1\}^I$.

Dans cette optique, lorsque nous considerons une partie de I comme un point de K, nous la noterons, contrairement à l'usage, par une lettre minuscule. Muni de la topologie produit, K est un groupe abélien compact, et nous désignerons par m sa mesure de Haar normalisée.

Par filtre sur un ensemble nous entendrons, sauf mention contraire, un filtre non trivial et libre, c'est-à-dire contenant les complémentaires des parties finies.

Un filtre sur I étant un ensemble de parties de I s'identifie à un sous-ensemble de K. Nous dirons donc qu'un filtre sur I est *mesurable* si et seulement si cet ensemble est mesurable pour m. Il est facile de voir (et connu) que tout filtre est de mesure intérieure nulle, qu'un filtre est non-mesurable si et seulement s'il est de mesure extérieure 1, et enfin que tout ultra-filtre est non-mesurable.

La clef de voute des paragraphes 1 et 2 est la proposition 7. Elle est préparée par les deux lemmes suivants.

LEMME 5. *Il existe une suite (q_n) d'entiers > 0 (et pas nécessairement distincts) telle que*

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-2^{-q_n}) = \tfrac{1}{2}.$$

Démonstration. Construisons la suite (q_n) par récurrence, de la façon suivante. On prend $q_1 = 2$. Les q_p étant construits pour $p = 1, \ldots$ $\ldots, n-1$ de sorte que

$$\prod_{j=1}^{n-1} (1-2^{-q_j}) > \tfrac{1}{2},$$

on définit q_n par

$$q_n = \inf\Big\{q \in \boldsymbol{N};\ (1-2^{-q}) \prod_{j=1}^{n-1} (1-2^{-q_j}) > \tfrac{1}{2}\Big\}.$$

La définiton de q_n montre que

$$\forall n,\ \frac{1}{2} < \prod_{j=1}^{n} (1-2^{-q_j}) < \frac{1}{2}\cdot\frac{1-2^{-q_n}}{1-2^{-q_{n+1}}}.$$

Puisque cette condition implique que $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = +\infty$, il en résulte que la suite (q_n) vérifie la condition du lemme 5. ■

Soit $L = \prod\limits_{n=1}^{\infty} K^{q_n}$, et soit μ la mesure produit sur L lorsque chaque facteur est muni de la mesure m. Tout élément x de L peut s'écrire comme une famille $(x_n^j)_{\substack{n\in N\\ 1\leqslant j\leqslant q_n}}$ où

$$x_n^j \in K \qquad \forall n \in N \text{ et } \forall j; \quad 1 \leqslant j \leqslant q_n.$$

LEMME 6. *Soit φ l'application*

$$\varphi\colon L \to K,\qquad (x_n^j)_{\substack{n\in N\\ 1\leqslant j\leqslant q_n}} \to \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{q_n} x_n^j.$$

Alors φ est mesurable, et m est l'image de μ par φ.

Démonstration. Pour tout élément y de K et tout $i \in I$ désignons par $y(i)$ la composante de rang i de y. Soit

$$A_i = \overset{-1}{\varphi}\big(\{y \in K;\ y(i) = 0\}\big).$$

On a alors:

$$(x_n^j)_{\substack{n\in N\\ 1\leqslant j\leqslant q_n}} \in A_i \Leftrightarrow \big(\forall n \in N\ \exists j;\ 1 \leqslant j \leqslant q_n \text{ et } x_n^j(i) = 0\big)$$

ce qui prouve que A_i est μ-mesurable et que

$$\mu(A_i) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-2^{-q_n}) = \tfrac{1}{2}.$$

Le résultat découle maintenant du fait évident que les ensembles A_i et leurs complémentaires sont deux à deux indépendants. ■

PROPOSITION 7. *Une intersection dénombrable de filtres non mesurables est un filtre non mesurable.*

Démonstration. Soit (F_n) une suite de filtres non mesurables. Il faut prouver que $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n$ rencontre tout compact A de K tel que $m(A) > 0$. D'après le lemme 6, nous savons que $\overset{-1}{\varphi}(A)$ est mesurable et que $\mu(\overset{-1}{\varphi}(A)) = m(A) > 0$. D'autre part, le sous-ensemble $G = \prod\limits_{n=1}^{\infty} F_n^{q_n}$

de L est de mesure extérieure 1, puisque c'est un produit dénombrable d'ensembles de mesure extérieure 1. Il rencontre donc $\overset{-1}{\varphi}(A)$. Soit $x \in G \cap \overset{-1}{\varphi}(A)$. On a déjà $\varphi(x) \in A$. Enfin, puisque chaque F_n est stable par intersection finie, $\varphi(x)$ contient pour chaque n un élement de F_n, donc $\varphi(x) \in F \cap A$. ■

PROBLÈME. *Sous l'axiome de Martin, peut-on affirmer que l'intersection d'une famille de cardinal $< c$ de filtres non mesurables est non mesurable?*

Désignons par 1 l'élément de K ayant toutes ses coordonnées égales à 1.

THÉORÈME 8. *Désignons par Σ_f la σ-algebre de K engendrée par les ensembles F et $1+F$ (où le signe $+$ désigne la loi de groupe de $\{0,1\}^I$) lorsque F parcourt la classe des filtres non mesurables. Alors, pour tout élément X de Σ_f distinct du vide et de K on a*

$$m^*(X) = 1, \qquad m_*(X) = 0.$$

Démonstration. Il existe deux suites (F_n^1) et (F_n^2) de filtres non mesurables telles que X appartienne à la tribu engendrée par les ensembles F_n^1 et $1+F_n^2$.

Supposons X non vide, et soit x l'un de ses éléments. Posons

$$J_1 = \{n \in N;\ x \in F_n^1\}; \qquad J_2 = \{n \in N;\ x \in 1+F_n^2\} = \{n \in N;\ x^c \in F_n^2\}.$$

On a

$$x \in \bigcap_{n\in J_1} F_n^1 \cap \bigcap_{n\in J_1^c} (F_n^1)^c \cap \bigcap_{n\in J_2} (1+F_n^2) \cap \bigcap_{n\in J_2^c} (1+F_n^2)^c \subset X.$$

Pour $n \in J_1^c$ (resp. J_2^c) soit G_n^1 (resp. G_n^2) le filtre engendré par x^c et F_n^1 (resp. x et F_n^2) qui est non trivial puisque $x \notin F_n^1$ (resp. $x^c \notin F_n^2$) et non mesurable puisqu'il contient un filtre non mesurable. On a alors

$$\bigcap_{n\in J_1} F_n^1 \cap \bigcap_{n\in J_1^c} (G_n^1)^c \cap \bigcap_{n\in J_2} (1+F_n^2) \cap \bigcap_{n\in J_2^c} (1+G_n^2)^c \subset X.$$

Mais on a $1+G_n^1 \subset (G_n^1)^c$ et $G_n^2 \subset (1+G_n^2)^c$, d'où il vient

$$\bigcap_{n\in J_1} F_n^1 \cap \bigcap_{n\in J_2^c} G_n^2 \cap \Big(1+\Big(\bigcap_{n\in J_1^c} G_n^1 \cap \bigcap_{n\in J_2} F_n^2\Big)\Big) \subset X.$$

Il découle de la proposition 7 que

$$F_1 = \bigcap_{n\in J_1} F_n^1 \cap \bigcap_{n\in J_2^c} G_n^2 \quad \text{et} \quad F_2 = \bigcap_{n\in J_1^c} G_n^1 \cap \bigcap_{n\in J_2} F_n^2$$

sont des filtres non mesurables, et l'on a $x \in F_1$, $x^c \in F_2$.

Ecrivons maintenant $K = K_1 \times K_2$, où $K_1 = \{0,1\}^x$ et $K_2 = \{0,1\}^{x^c}$, et soient m_1 et m_2 les mesures de Haar normalisées de K_1 et K_2. Puisque $x \in F_1$, on peut écrire $F_1 = F_1' \times K_2$ où $F_1' \subset K_1$, et puisque $x^c \in F_2$, on peut écrire $1+F_2 = K_1 \times F_2'$ ou $F_2' \subset K_2$.

Ainsi l'on a

$$m_1^*(F_1') = m^*(F_1) = 1; \quad m_2^*(F_2') = m^*(1+F_2) = 1.$$

D'où

$$m^*(F_1 \cap (1+F_2)) = m^*(F_1' \times F_2') = m_1^*(F_1') m_2^*(F_2') = 1$$

ce qui montre que $m^*(X) = 1$ puisque $F_1 \cap (1+F_2) \subset X$.

Enfin, si X est distinct de K, on a $X^c \neq \emptyset$, d'où

$$m^*(X^c) = 1 - m_*(X) = 1. \blacksquare$$

PROPOSITION 9. *La tribu Σ_f est invariante par les translations de K. C'est donc la plus petite tribu invariante par les translations et contenant les filtres non mesurables.*

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout filtre non mesurable F et tout élément x de K on a $x+F \in \Sigma_f$. Désignons par F' (resp. F'') le filtre (éventuellement trivial) engendré par x et F (resp. x^c et F).

On a $F = F' \cap F''$ d'où

$$x+F = x+F' \cap F'' = (x+F') \cap (x+F'').$$

On vérifie sans peine que l'on a

$$x+F' = 1+F'; \quad x+F'' = F''.$$

On a donc

$$x+F = (1+F') \cap F'' \in \Sigma_f$$

puisque F' et F'' sont, soit des filtres non mesurables, soit égaux à K. $\blacksquare$

2. Extensions de la mesure de Haar aux filtres. Désignons par Σ_m la tribu des ensembles m-mesurables de K et par Σ la tribu engendrée par Σ_m et Σ_f. Il est que Σ contient tous les filtres et est invariante par les translations de K.

THÉORÈME 10. *Pour toute probabilité μ sur Σ_f il existe une unique probabilité λ sur Σ telle que Σ_m et Σ_f soient indépendantes pour λ, c'est-à-dire*

$$(1) \qquad X \in \Sigma_f, \quad Y \in \Sigma_m \Rightarrow \lambda(X \cap Y) = \mu(X) m(Y).$$

Démonstration. Considérons, sur l'espace $K \times K$, la tribu $\Sigma_f \otimes \Sigma_m$ engendrée par les rectangles $X \times Y$ où $X \in \Sigma_f$, $Y \in \Sigma_m$, et sur cette tribu, la mesure $\nu = \mu \otimes m$. Désignons par Δ la diagonale de $K \times K$, et prouvons tout d'abord que $\nu^*(\Delta) = 1$.

Soit $Z \in \Sigma_f \otimes \Sigma_m$ tel que $\nu(Z) > 0$. Il existe sous-tribu dénombrablement engendrée Σ_0 de Σ_f telle que $Z \in \Sigma_0 \otimes \Sigma_m$. D'après le théorème de Fubini, et puisque $\nu(Z) > 0$, il existe un point x de K tel que $m(Z_x) > 0$, où

$$Z_x = \{y \in K;\ (x, y) \in Z\}.$$

Tout élément de Σ_0 contenant x contient aussi $G = \bigcap_{x \in X \in \Sigma_0} X$ et $G \in \Sigma_0$ puisque Σ_0 est dénombrablement engendrée.

Puisque G est non vide, il résulte du théorème 8 que $m^*(G) = 1$. Puisque $m(Z_x) > 0$, ceci montre que $G \cap Z_x \neq \emptyset$. Soit $t \in G \cap Z_x$. L'ensemble $\{u \in K;\ (u, t) \in Z\}$ appartient à Σ_0 et contient x donc contient G. Ceci prouve que $(t, t) \in Z \cap \Delta$, ce qui établit notre assertion.

Ce résultat montre que sur Δ, muni de la tribu Σ' trace de $\Sigma_f \otimes \Sigma_m$, on peut définir une mesure λ' par

$$\lambda'(Z \cap \Delta) = \nu(Z) \qquad \forall Z \in \Sigma_f \otimes \Sigma_m.$$

Prouvons l'existence de λ. La projection π de Δ sur K ainsi que son inverse sont mesurables lorsque l'on munit Δ de Σ' et K de Σ. La mesure image λ de λ' par π vérifie

$$(2) \qquad \forall Z \in \Sigma_f \otimes \Sigma_m, \quad \lambda(\pi(Z \cap \Delta)) = \nu(Z)$$

d'où, en prenant $Z = X \times Y$, on voit que λ vérifie (1).

Prouvons l'unicité de λ. Soit λ_1 une probabilité sur (K, Σ) vérifiant la condition (1). Définissons sur $(K \times K, \Sigma_f \otimes \Sigma_m)$ la probabilité ν_1 par

$$(3) \qquad \forall Z \in \Sigma_f \otimes \Sigma_m, \quad \nu_1(Z) = \lambda_1(\pi(Z \cap \Delta)).$$

Si $X \in \Sigma_f$ et $Y \in \Sigma_m$ on a

$$\nu_1(X \times Y) = \lambda_1(\pi_1(X \times Y) \cap \Delta) = \lambda_1(X \cap Y) = \mu(X) m(Y).$$

L'unicité de la mesure produit prouve donc que $\nu_1 = \nu$. Il résulte alors des conditions (2) et (3), et du fait que tout élément de puisse s'écrire $\pi(Z \cap \Delta)$, ou $Z \in \Sigma_f \otimes \Sigma_m$, que $\lambda = \lambda_1$. $\blacksquare$

Remarque. La démonstration précédente montre que l'on peut remplacer Σ_f par une sous tribu quelconque dans l'énoncé de ce théorème.

Puisque Σ est invariante par les translations de K, il est naturel de se demander si on peut prolonger m à Σ en une mesure invariante par les translations. Or, on voit de suite que pour une telle extension les ultrafiltres sont de mesure $1/2$ et indépendants. En particulier la mesure de la différence symétrique de deux ultrafiltres distincts n'est jamais nulle. L'ensemble des fonctions caractéristiques d'ultrafiltres est compact par τ_p, homéomorphe pour τ_p à $\beta I \setminus I$, donc non métrisable, et séparé pour τ_m. Le théorème 35 que nous prouverons ultérieurement, affirme qu'une telle situation est impossible.

Montrons maintenant comment la théorème 10 permet de résoudre le problème 2. Prenons $I = \boldsymbol{N}$ pour simplifier. Soit μ une probabilité quelconque sur Σ_f (par exemple une mesure de Dirac) et considérons l'espace mesuré (K, Σ, λ) du théorème 10. Soit A le sous-ensemble de $\mu(\Sigma)$ formé des fonctions caractéristiques des ultrafiltres (libres ou non) sur $\boldsymbol{N}$. Puisque A est, pour τ_p, homéomorphe à $\beta \boldsymbol{N}$ il est compact. Soit $f_n \in A$ la fonction donnée par

$$\forall x \in K \qquad f_n(x) = x(n)$$

où $x(n)$ désigne la n-ième coordonnée de x. L'ensemble des points de convergence d'une sous-suite (f_{n_p}) de (f_n) est

$$\bigcup_q \bigcap_{p \geqslant q} \{x;\ x(n_p) = 1\} \cup \bigcup_q \bigcap_{p \geqslant q} \{x;\ x(n_p) = 0\}$$

donc est de mesure nulle pour m et à fortiori pour λ. Ainsi la suite (f_n), quoique relativement compacte dans $\mu(\Sigma)$ ne possède pas de sous-suite convergence p.p. Le problème 2 à ainsi une réponse positive. Nous prouverons plus tard que sous l'axiome de Martin une telle situation ne peut pas se produire lorsque l'espace (X, Σ, λ) est le complété d'un espace (X, Σ_0, λ) où Σ_0 est dénombrablement engendré (théorème 34).

3. Propriétés de stabilité des filtres non mesurables. Désignons toujours par I un ensemble infini, et par K le produit $\{0, 1\}^I$. Pour tout élément $a = (a_i)$ de $[0, 1]^I$ désignons par m_a la mesure produit $\bigotimes_{i \in I} \big((1-a_i)\delta_0 + a_i \delta_1\big)$ sur K. Désignons par S_I le sous-ensemble de $[0, 1]^I$ formé des suites (a_i) vérifiant la condition suivante

$$(4) \qquad \exists \alpha \text{ tel que } 0 < \alpha \leqslant 1/2; \quad \forall i \in I \ \ \alpha \leqslant a_i \leqslant 1-\alpha.$$

PROPOSITION 11. *Un filtre sur I est mesurable si et seulement s'il est de mesure nulle pour chaque m_a $(a \in S_I)$.*

Démonstration. Il suffit d'établir que pour a et b dans S_I un filtre de mesure extérieure 1 pour m_a est de mesure extérieure 1 pour m_b (en effet si $b_i = 1/2$ pour chaque i, on a $m_b = m$. D'autre part un filtre non mesurable pour m_a est de mesure extérieure 1 pour m_a).

D'après (4) il existe un entier p tel que

$$\forall i \in I \qquad a_i^p \leqslant b_i.$$

Il existe donc pour chaque i un réel $c_i \in [0, 1]$ tel que

$$(1-c_i) a_i^p + c_i = b_i.$$

Considérons l'application:

$$\begin{aligned} \varphi\colon K \times K^p &\to K,\\ (x, (y_n)_{n \leqslant p}) &\to x \cup \bigcap_{n \leqslant p} y_n. \end{aligned}$$

Considérons sur $K \times K^p$ la mesure $\nu = m_c \otimes m_a^{\otimes p}$: on montre, de façon analogue à la preuve du lemme 6, que m_b est l'image de ν par φ (cette image existe puisque φ est continue). Si $A \subset K$ est un compact tel que $m_b(A) > 0$, alors $\nu\big(\overset{-1}{\varphi}(A)\big) = m_b(A) > 0$, ce qui prouve que $\overset{-1}{\varphi}(A)$ rencontre l'ensemble $K \times F^p$ (qui est tel que $\nu^*(K \times F^p) = \big(m_a^*(F)\big)^p = 1$) en au moins un point x. Et l'on a $\varphi(x) \in F \cap A$, puisque F est un filtre. ■

Soient I et J deux ensembles infinis, et soit θ une application surjective de I dans J, telle que pour tout j l'ensemble $\overset{-1}{\theta}(j)$ soit fini. (Nous dirons alors que θ est fini-jective.) Cette application induit de façon naturelle une application de $K_I = \{0, 1\}^I = \mathfrak{P}(I)$ dans $K_J = \{0, 1\}^J \mathfrak{P}(\theta)$, que nous noterons encore θ, et qui est définie par

$$\theta(x) = \{\theta(i);\ i \in x\}.$$

Pour une partie A de K_J nous noterons

$$\tilde{\theta}(A) = \{x \in K_I;\ \theta(x) \in A\}$$

la notation $\overset{-1}{\theta}$ étant réservée, pour $y \in K_J$ à

$$\overset{-1}{\theta}(y) = \{i \in I;\ \theta(i) \in y\}.$$

Étant donné un filtre F sur I, on désignera par $\theta(F)$ le filtre image de F, c'est-à-dire le filtre engendré par les parties $\theta(x)$ de J, pour $x \in F$. De même, étant donné un filtre G sur J, on désignera par $\theta(G)$ le filtre image réciproque de G, c'est-à-dire le filtre engendré par les parties $\overset{-1}{\theta}(y)$ de I, pour $y \in G$ (ce filtre en tant que partie de K_I, ne coïncide pas avec $\tilde{\theta}(G)$). Le fait que θ soit fini-jective implique que $\theta(F)$ est libre si F l'est.

Ces notations étant posées, nous avons le résultat de stabilité suivant:

PROPOSITION 12. *Supposons qu'il existe un entier n tel que pour tout j on ait $\alpha_j = \operatorname{card} \overset{-1}{\theta}(j) < n$.*

Soit F un filtre sur I et G un filtre sur J. Alors

(i) *F est mesurable si et seulement si $\theta(F)$ l'est,*

(ii) *G est mesurable si et seulement si $\overset{-1}{\theta}(G)$ l'est.*

Démonstration. Désignons par m la mesure de Haar de K. Posons

$$a = (1-2^{-\alpha_j})_{j \in J}; \qquad b = (2^{-\alpha_j})_{j \in J}.$$

Puisque, par hypothèse, la famille α_j est uniformément bornée, on a $a \in S_J$ et $b \in S_J$.

En tant qu'application de K_I dans K_J, θ est continue, et l'on voit sans peine que m_a est la mesure image de m par cette application. Si $\theta(F)$ est mesurable, d'après la proposition 11 on a $m_a\big(\theta(F)\big) = 0$, d'où

$$m(F) \leqslant m\Big(\tilde{\theta}\big(\theta(F)\big)\Big) = m_a\big(\theta(F)\big) = 0$$

ce qui montre que F est mesurable. On en déduit, puisque $\theta(\overset{-1}{\theta}(G)) = G$, que $\overset{-1}{\theta}(G)$ est mesurable dès que G l'est.

Considérons l'application φ de K_I dans K_J telle que la composante de rang j de $\varphi(x)$ vaille 1 si et seulement si pour tout $i \in \overset{-1}{\theta}(j)$ la composante de rang i de x vaut 1. Cette application est continue, et l'image de m par φ est m_b.

Supposons que G ne soit pas mesurable. On a donc $m_b^*(G) = 1$. Soit $A \subset K_I$ un compact tel que $m(A) > 0$. On a

$$m_b(\varphi(A)) = m(\overset{-1}{\varphi}(\varphi(A))) \geqslant m(A) > 0$$

donc G rencontre $\varphi(A)$ en au moins un point x. Puisque $x \in G$ on a $\overset{-1}{\theta}(x) \in \overset{-1}{\theta}(G)$. Puisque $x \in \varphi(A)$, il existe $y \in A$ tel que $x = \varphi(y)$, ce qui montre que $y \supset \overset{-1}{\theta}(x)$, donc que $y \in \overset{-1}{\theta}(G)$. On a ainsi $y \in \overset{-1}{\theta}(G) \cap A$, ce qui prouve que $\overset{-1}{\theta}(G)$ n'est pas mesurable.

Ainsi G est mesurable dès que $\overset{-1}{\theta}(G)$ l'est. On en déduit que si F est mesurable il en est de même de $\theta(F)$, puisque $\overset{-1}{\theta}(\theta(F))$, étant moins fin que F est aussi mesurable. La démonstration est terminée.

L'hypothèse de la proposition 12 est-elle nécessaire? La proposition 13 va montrer que si on la supprime, $\overset{-1}{\theta}(G)$ peut etre mesurable sans que G le soit. Nous montrerons plus tard que, sous l'axiome de Martin on peut construire dans ces mêmes conditions un filtre non mesurable F tel que $\theta(F)$ soit le filtre de Fréchet.

PROPOSITION 13. *Supposons que les cardinaux des ensembles $\overset{-1}{\theta}(j)$ ne soient pas uniformément bornés. Il existe alors un filtre non mesurable G sur J tel que $\overset{-1}{\theta}(G)$ soit mesurable.*

Démonstration. Il existe une suite (j_n) d'éléments de J telle que

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\operatorname{card} \overset{-1}{\theta}(j_n)} < +\infty.$$

Soit J' l'ensemble des j_n. Prouvons d'abord que pour tout filtre G sur I tel que $J'^c \notin G$ le filtre $\overset{-1}{\theta}(G)$ est mesurable.

Pour tout $y \in G$, l'ensemble $y \cap J'$ est infini par hypothèse. Donc

$$\overset{-1}{\theta}(y) \in A = \{x \in K_I;\ \{n;\ \overset{-1}{\theta}(j_n) \subset x\} \text{ est infini}\}.$$

Or

$$A^c = \bigcup_n B_n,$$

où

$$B_n = \{x \in K_I;\ p \geqslant n \Rightarrow \overset{-1}{\theta}(j_p) \not\subset x\}.$$

On a donc

$$m(B_n) = \prod_{p \geqslant n} (1 - 2^{-\operatorname{card} \overset{-1}{\theta}(j_p)}).$$

La condition (5) prouve que $\lim_{n\to\infty} m(B_n) = 1$, donc que $m(A) = 0$, ce qui montre que $\overset{-1}{\theta}(G)$ est mesurable, puisque $\overset{-1}{\theta}(G) \subset A$.

Pour conclure il suffit de remarquer qu'il existe sur J des filtres non mesurables ne contenant pas J'^c (par exemple des ultrafiltres portés par J'). ■

Étant donné un ensemble infini I, un filtre F sur I, et un sous-ensemble infini J de I notons $F|_J$ le filtre trace de F sur J (qui est trivial si $J^c \in F$).

PROPOSITION 14. *Un filtre F sur I est mesurable si et seulement s'il existe une partie dénombrable D de I telle que le filtre $F|_D$ soit* (*non trivial et*) *mesurable.*

Démonstration. La condition est évidemment suffisante. Supposons réciproquement F mesurable. Il existe alors un compact A de $K_I = \{0, 1\}^I$, de mesure > 0, ne rencontrant pas F.

D'après un argument classique (voir par exemple [2], lemme 2B) il existe une partie dénombrable D de I, et un compact B de $K_D = \{0, 1\}^D$, de mesure > 0, et tel que $\overset{-1}{\pi}(B) \subset A$, où π désigne la projection canonique de K_I sur K_D. On en déduit que B ne rencontre pas $F|_D$, ce qui prouve que $F|_D$ est mesurable. ■

Pour terminer cette section, étudions le comportement des filtres mesurables vis à vis de la somme.

Étant donné un ensemble infini J, une famille $(I_j)_{j\in J}$ d'ensembles infinis disjoints, un filtre F sur J, et des filtres F_J sur I_J, considérons sur $I = \bigcup_{j\in J} I_j$ le filtre $G = \sum_F F_j$ défini par:

$$x \in G \Leftrightarrow \{i \in J;\ x \cap I_j \in F_j\} \in F.$$

Désignons par H le filtre sur J engendré par les complémentaires des parties dénombrables (ce filtre est trivial si J est dénombrable) et soit

$$J_0 = \{j \in J;\ F_j \text{ est mesurable}\}.$$

Proposition 15. *G est mesurable si et seulement si le filtre engendré par F et J_0 n'est pas plus fin que H.*

Démonstration. Prouvons que la condition est suffisante. Il existe par hypothèse une partie dénombrable D de J telle que

$$x \in F \Rightarrow x \cap J_0 \cap D \neq \emptyset .$$

Donc

$$G \subset \bigcup_{j \in D \cap J_0} \{x \in K_I;\ x \cap I_j \subset F_j\}$$

et ce dernier ensemble est de mesure nulle puisque chaque F_j considéré est mesurable.

Réciproquement, supposons que G mesurable. D'après la proposition 14 il existe une partie dénombrable D' de I telle que $G|_{D'}$ soit mesurable et non trivial, donc une partie dénombrable D de J telle que $G|_{I'}$ possède ces mêmes propriétés, où $I' = \bigcup_{j \in D} I_j$. Il nous suffit de prouver que tout élément y de F rencontre $J_0 \cap D$. Supposons qu'il n'en soit rien. Chaque filtre $F_j (j \in D)$ engendre un filtre F'_j sur I', filtre qui est mesurable si et seulement si F_j l'est. Et puisque $D \setminus J_0 \in F|_D$ on a

$$G|_D = \sum_{F|_D} F_i \supset \bigcap_{j \in D \setminus J_0} F'_j .$$

Or ce dernier filtre est non mesurable d'après la proposition 7, ce qui contredit le fait que G est mesurable. ∎

4. Structure des fibres non-mesurables. Dans ce paragraphe nous étudierons le rapport entre la non mesurabilité d'un filtre, et le fait qu'il contienne des parties ayant „peu" d'éléments. Nous supposerons $I = N$, la proposition 14 permettant de se ramener à ce cas.

Lemme 16. *Soient a et b deux réels tels que $0 < b < a < 1$. Il existe alors un réel $A > 0$ tel que*

$$(6) \qquad \forall n, \quad \sum_{0 \leqslant k \leqslant an} b^k (1-b)^{n-k} C_n^k \geqslant 1 - A \left(\frac{b^a (1-b)^{1-a}}{a^a (1-a)^{1-a}} \right)^n .$$

Démonstration. Désignons par p_n la partie entière de $an+1$. Soit, pour $k \leqslant an$:

$$R_k = \frac{b^k (1-b)^{n-k} C_n^k}{b^{k-1} (1-b)^{n-k-1} C_n^{k-1}} = \frac{b(n-k)}{(1-b)k} .$$

La fonction $t \to \dfrac{n-t}{t}$ étant décroissante sur l'intervalle $]0, n]$ on a

$$R_k \leqslant R_{an} = \frac{b}{1-b} \frac{1-a}{a} = \beta < 1$$

puisque $b < a$. On a donc:

$$k \geqslant p_n \Rightarrow b^k (1-b)^{n-k} C_n^k \leqslant \beta^{k-p_n} b^{p_n} (1-b)^{n-p_n} C_n^{p_n}$$

d'où

$$\sum_{k \geqslant an} b^k (1-b)^{n-k} C_n^k \leqslant \frac{1}{1-\beta} b^{p_n} (1-b)^{n-p_n} C_n^{p_n} .$$

Il suffit pour conclure d'évaluer ce dernier terme grâce à la formule de Stirling, ce qui est élémentaire (et tout à fait fastidieux!). ∎

Théorème 17. *Soit a un réel > 0 et soit (I_n) une suite de parties finies de N vérifiant la condition suivante*

$$(7) \qquad \exists a > 0; \quad \sum_n a^{\operatorname{card} I_n} < +\infty .$$

Alors, pour tout filtre non mesurable F, il existe un ensemble $x \in F$ tel que

$$\forall n, \quad \operatorname{card}(x \cap I_n) \leqslant a \operatorname{card} I_n .$$

Démonstration. Soit b un réel tel que $0 < b < a$ et que

$$\frac{b^a (1-b)^{1-a}}{a^a (1-a)^{1-a}} < a .$$

Soit m_b la mesure $((1-b)\delta_0 + b\delta_1)^{\otimes N}$ sur $K = \{0, 1\}^N$.

La proposition 11 montre que $m_b^*(F) = 1$. Soit

$$A = \{x \in K;\ \forall n, \operatorname{card}(x \cap I_n) \leqslant a \operatorname{card} I_n\}.$$

On a

$$m_b(A) = \prod_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k \leqslant a \operatorname{card} I_n} b^k (1-b)^{\operatorname{card} I_n - k} C_{\operatorname{card} I_n}^k \Big) .$$

Il résulte du lemme 16 et de la condition (7) que ce nombre est > 0. Il en résulte que $F \cap A \neq \emptyset$. ∎

Remarques. 1. Soit D un ensemble dénombrable, p un entier > 1 et θ une surjection de N sur D telle que pour tout $d \in D$ on ait $\operatorname{card}(\overset{-1}{\theta}(d)) = p$. Si G est un filtre non-mesurable quelconque sur D, il résulte de la proposition 12 que $\overset{-1}{\theta}(G)$ n'est pas mesurable. Pourtant tout élément de $\overset{-1}{\theta}(G)$ contient une infinité d'ensembles $\overset{-1}{\theta}(d)$.

Il résultera plus précisément de la proposition que sous l'axiome de Martin la condition (7), qui exprime que la suite $(\operatorname{card} I_n)$ croit assez vite est en fait la meilleure possible. (Nous repoussons ce résultat au paragraphe 6 avec d'autres résultats de même nature.)

2. L'ensemble des filtres ayant la propriété décrite dans le théorème 17 est stable par intersection dénombrable.

Il serait naturellement très intéressant de savoir si un filtre vérifiant la conclusion du théorème 17 est nécessairement non mesurable. (En cas de réponse positive celà conduirait à des implifications importantes des résultats précédents.) Nous n'avons pu trancher cette question, ni même le cas plus précis des filtres „dichotomiques". C'est-à-dire qui vérifient la condition:

(D): Pour tout partition (I_p) de N, où $\operatorname{card} I_p = 2$ pour tout p il existe un $x \in F$ tel que

$$\forall p \quad \operatorname{card}(x \cap I_p) \leqslant 1.$$

Nous allons établir un résultat plus faible, à savoir que tout filtre rapide est non mesurable.

Définition 18 (Mokobodzki). Un filtre F sur N est dit *rapide* s'il vérifie pour toute suite croissante (n_p) d'entiers:

$$\exists\, x \in F; \quad \forall p, \quad \operatorname{card} x \cap [0, n_p] \leqslant p.$$

L'existence de tels filtres découle de l'hypothèse du continu. Toute partie z de l'intervalle $[1, n]$ s'identifie à un élément de $\{0, 1\}^n$. Pour un telle partie z posons

$$E_z = \{x \in K;\ x \cap [1, n] = z\}.$$

On a $m(E_z) = 2^{-n}$.

La difficulté est concentrée dans le lemme technique suivant:

Lemme 19. *Soit A un compact de K de mesure > 0. Il existe alors un compact $B \subset A$, de mesure > 0, et une suite (n_k) d'entiers tels que*

(8) $$\forall z \in \{0, 1\}^{n_k}, \quad m(E_z \cap B) \geqslant (1 - 2^{-k})\, m(E_z).$$

Démonstration. Construisons par récurrence sur k une suite croissante (n_k) d'entiers et une suite décroissante B_k de sous-compacts de A vérifiant les conditions suivantes

(9) $$m(B_k \setminus B_{k+1}) \leqslant a 2^{-n_k - k - 2} \quad \text{où} \quad a = m(A),$$

(10) $$B_k = \bigcup_{z \in T_k} E_z \cap B_{k-1}$$

où l'on a posé

$$T_k = \{z \in \{0, 1\}^{n_k};\ m(E_z \cap B_{k-1}) \geqslant (1 - 2^{-k-1})\, m(E_z)\}.$$

Choisissons $B_0 = A$ et $n_0 = 1$. Supposons B_n et n_k construits.

Il existe un entier n_{k+1} tel que l'on ait

(11) $$N = \operatorname{card}\{z \in \{0, 1\}^{n_{k+1}};\ E_z \cap B_k \neq \emptyset\} \leqslant 2^{n_{k+1}}\big(m(B_k) + a 2^{-n_k - 2k - 4}\big).$$

Posons

$$B_{k+1} = \bigcup_{z \in T_{k+1}} E_z \cap B_k.$$

On a donc

$$B_k \setminus B_{k+1} \subset \bigcup_{\substack{z \notin T_{k+1} \\ E_z \cap B_k \neq \emptyset}} E_z \cap B_k.$$

D'où il vient:

$$m(B_k) \leqslant m(B_{k+1}) + (1 - 2^{-k-2})\,[2^{-n_k+1} N - m(B_{k+1})].$$

Ce qui donne d'après (11)

$$\begin{aligned} 2^{-k-2} m(B_{k+1}) &\geqslant m(B_k) - N \cdot 2^{-n_{k+1}} (1 - 2^{-k-2}) \\ &\geqslant 2^{-k-2} m(B_k) - a 2^{-n_k - 2k - 4} \end{aligned}$$

d'où

$$m(B_{k+1}) \geqslant m(B_k) - a 2^{-n_k - k - 2}$$

ce qui montre que la construction est terminée.

Posons $B = \bigcap_k B_k$. On a

$$\sum_{p=k}^{\infty} 2^{-n_p - p - 2} \leqslant 2^{-n_k - k - 1} \sum_{p=0}^{\infty} 2^{-p-1} = 2^{-n_k - k - 1}$$

d'où il vient

(12) $$m(B) \geqslant m(B_k) - a 2^{-n_k - k - 1}.$$

Ceci prouve déjà avec $k = 0$ que $m(B) > 0$.

Si $z \in \{0, 1\}^{n_k}$ est tel que $E_z \cap B \neq \emptyset$, on a par construction

$$m(E_z \cap B_k) = m(E_z \cap B_{k-1}) \geqslant (1 - 2^{-k-1})\, m(E_z).$$

D'où, d'après (12)

$$m(E_z \cap B) \geqslant (1 - 2^{-k-1})\, m(E_z) - 2^{-n_k - k - 1} = (1 - 2^{-k})\, m(E_z). \ \blacksquare$$

Proposition 20. *Aucun filtre rapide sur N n'est mesurable.*

Démonstration. Soient F un filtre rapide sur N et A un compact de K de mesure > 0. Soient $B \subset A$ le compact et (n_k) la suite fournie par le lemme 19. Puisque F est rapide, il existe un $x \in F$ tel que

$$\forall k > 0 \quad \operatorname{card}(x \cap [0, n_{k+2}]) \leqslant k.$$

Construisons par récurrence sur k une suite $z_k \in \{0, 1\}^{n_k}$ qui vérifie les conditions suivantes:

$$z_k = z_{k+1} \cap [0, n_k],$$

(13) $$z_k \supset x \cap [0, n_k],$$

(14) $$E_{z_k} \cap B \neq \emptyset.$$

Le cas $k=1$ est analogue au cas général. Supposons z_k construit. Puisque $E_{z_k}\cap B\neq\emptyset$ on a

$$m(E_{z_k}\cap B)\geqslant(1-2^{-k})m(E_{z_k}).$$

D'autre part on a

$$m(\{u\in E_{z_k};\ u\cap[0,n_{k+1}]\supset x\cap[0,n_{k+1}]\})=m(E_{z_k})2^{-\operatorname{card}(x\cap]n_k,n_{k+1}])}\geqslant m(E_{z_k})2^{-k+1}.$$

Ces deux relations prouvent l'existence d'un $u\in E_{z_k}$ tel que si l'on pose

$$z_{k+1}=u\cap[0,n_{k+1}]$$

on ait

$$E_{z_{k+1}}\cap B\neq\emptyset;\qquad z_{k+1}\supset x\cap[0,n_{k+1}].$$

Ce qui termine la construction.

Soit enfin l'élément z de K défini par $z\cap[0,n_k]=z_k$ pour tout k. D'après (14) on a $z\in B\subset A$. D'après (13) on a $x\subset z$, donc $z\in F$, ce qui montre que $F\cap A\neq\emptyset$. ■

5. Étude de la propriété de Baire. La principale motivation de l'étude des filtres ayant la propriété de Baire est de développer un parallèle avec la mesurabilité afin que les deux propriétés s'éclairent mutuellement. Cette démarche s'avère fructueuse comme le montre le théorème 21.

Soient toujours I un ensemble infini et $K=\{0,1\}^I$. Rappelons que l'on dit qu'un sous-ensemble de K possède la propriété de Baire s'il s'écrit $O\triangle M$, où O est ouvert et M maigre. Nous dirons donc qu'un filtre possède la propriété si et seulement s'il possède cette propriété en tant que sous-ensemble de K. Il est aisé de voir (et bien connu) qu'un filtre possèdant la propriété de Baire est maigre, et qu'un filtre non maigre n'est maigre dans aucun ouvert.

Les filtres maigres sont caractérisés par le théorème suivant dont l'esprit est le même que celui du théorème 17. Cette caractérisation rendra plus simples de nombreuses preuves.

Soit $K^\infty\subset K$ l'ensemble des parties infinies de K. C'est un G_δ de K.

THÉORÈME 21. *Les conditions suivantes portant sur un filtre F sur I sont équivalentes:*

(i) *F est maigre.*

(ii) *Il existe une suite (I_k) de parties finies deux à deux disjointes de I, telle que tout élément de F rencontre tous les I_k sauf au plus un nombre fini.*

(iii) *F est contenu dans un K_σ de K^∞.*

(iv) *Il existe une partie dénombrable D de I (que l'on peut choisir égale à I si celui-ci est dénombrable), et une application fini-jective θ de D sur N telle que $\theta(F)$ soit le filtre de Fréchet.*

Démonstration. (i)$\Rightarrow$(ii). Supposons (ii) inexacte. Soit $G=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$, un G_δ dense de K, où (G_n) est une suite décroissante d'ouverts denses de K. Etant donnée une partie finie J de I et $z\in\{0,1\}^J=\mathscr{P}(J)$ soit toujours

$$E_z=\{x\in K;\ x\cap J=z\}.$$

Construisons par récurrence une suite (D_n) des parties finies de I telles que

$$\forall z\in\{0,1\}^{D_n},\ \exists t\in\{0,1\}^{D_{n+1}};\quad t\cap D_n=z \text{ et } E_t\subset G_n. \tag{15}$$

La possibilité de cette construction résulte immédiatement de la densité de G_n. Posons $I_n=D_{n+1}\setminus D_n$. Par hypothèse il existe $x\in F$ tel que $x\cap I_n=\emptyset$ pour une infinité de n. Construisons par récurrence sur n une suite $z_n\in\{0,1\}^{D_n}$ telle que

$$z_n\cap D_{n-1}=z_{n-1}\quad \text{ et }\quad x\cap D_n\subset z_n.$$

Si $x\cap I_n\neq\emptyset$, on prend $z_{n+1}=z_n\cup(x\cap D_{n+1})$. Si $x\cap I_n=\emptyset$ on peut d'après (15) choisir z_{n+1} tel que $z_{n+1}\cap D_n=z_n$ et $E_{z_{n+1}}\subset G_n$. Il existe alors un élément z de K contenant x et tel que pour tout n on ait $z\cap D_n=z_n$, donc $z\in E_{z_n}$.

Par construction, pour une infinité de n, on a $E_{z_n}\subset G_n$. La suite G_n étant décroissante on a donc $z\in G$. Et puisque $z\supset x$, on a $z\in F$. Ceci prouve que $G\cap F\neq\emptyset$. Donc F, rencontrant tout G_δ dense n'est pas maigre.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Il suffit de remarquer que

$$A_p=\{x\in K;\ \forall n\geqslant p,\ x\cap I_n\neq\emptyset\}$$

est un compact de K contenu dans K^∞. Et l'on a

$$F\subset\bigcup A_p\subset K^\infty.$$

(iii)$\Rightarrow$(i) puisque K^∞ étant d'intérieur vide, tout K_σ qu'il contient est maigre.

(ii)$\Leftrightarrow$(iv) est évident. ■

Remarques. 1. Puisque un ensemble analytique possède la propriété de Baire, la condition (iv) du théorème 21 est une généralisation d'un résultat de Mathias & Baumgartner sur les filtres analytiques. (Voir également le travail de Louveau [6].)

2. Les ultrafiltres et les filtres rapides sur N ne sont pas maigres.

3. On trouvera dans [4] un exemple d'application du théorème 21 aux mesures simplement additives sur N.

La condition (ii) du théorème 21 implique immédiatement le résultat suivant:

icm©

Proposition 22. *Un filtre F sur I est maigre si et seulement s'il existe une partie dénombrable D de I telle que $F|_D$ soit maigre.*

Proposition 23. *Une intersection dénombrable de filtres non maigres n'est pas maigre. De plus l'axiome de Martin implique que l'intersection d'une famille de cardinal $< c$, de filtres non maigres, n'est pas maigre.*

Démonstration. Prouvons plus généralement que sous l'axiome $(A_\varkappa)$ de [9], pour un cardinal $\varkappa < c$ l'intersection d'une famille $(F_a)_{a<\gamma}$ de filtres non maigres (où $\operatorname{card}\gamma = \varkappa$) n'est pas maigre. Soit (I_k) une suite de parties finies deux à deux disjointes de I. Prouvons que $F = \bigcap_{a<\gamma} F_a$ ne vérifie pas la condition (ii) du théorème 21. Pour cela, construisons par induction transfinies pour $a \leqslant \gamma$ des parties infinies J_a de N et des éléments x_a de F_a tels que

$$(16)\qquad \begin{aligned} &a < \beta \Rightarrow J_\beta \setminus J_a \text{ est fini.}\\ &\forall n \in J_a \quad x_a \cap I_n = \emptyset. \end{aligned}$$

La construction étant effectuée pour tout ordinal $a < \beta$, il découle du théorème 4 de [9] et du fait que $\operatorname{card}\beta < \varkappa$ qu'il existe une partie infinie J'_β de N telle que $J'_\beta \setminus J_a$ soit fini pour $a < \beta$. Si $\beta < \gamma$, puisque F_β n'est pas maigre, la condition (ii) du théorème 21 prouve l'existence d'une partie infinie $J_\beta \subset J'_\beta$ et d'un $x_\beta \in F_\beta$ vérifiant (16). Si $\beta = \gamma$ on prend $J_\gamma = J'_\gamma$.

Pour tout a, l'ensemble $\{n \in J_\gamma;\ x_a \cap I_n \neq \emptyset\}$ est contenu dans $J_\gamma \setminus J_a$ donc fini. Si l'on pose

$$x = \bigcup_{a<\gamma} \Big(x_a \setminus \bigcup_{n \in J_\gamma \setminus J_a} I_n\Big).$$

on a $x \in F$ et $x \cap I_n = \emptyset$ pour tout $n \in J_\gamma$. ∎

Théorème 24. *Un élément de la tribu de K engendrée par les ensembles F et $1+F$ lorsque F parcourt la classe des filtres non maigres et qui est distinct du vide et de K ne possède la propriété de Baire dans aucun ouvert.*

Démonstration. Elle est parallèle à celle du théorème 8, et laissée au lecteur.

Reprenons les notations de la proposition 12.

Proposition 25. *Soit θ une application fini-jective de I sur J, soient F un filtre sur I et G un filtre sur J. Alors*

(i) *F est maigre si et seulement si $\theta(F)$ l'est.*

(ii) *G est maigre si et seulement si $\overset{-1}{\theta}(G)$ l'est.*

Démonstration. Prouvons la première assertion. La suffisance découle directement de la condition (iv) du théorème 21. Réciproquement, si F est maigre soit (I_n) la suite de la condition (ii) de ce même théorème. Il existe une suite n_k d'entiers telle que les ensembles $\theta(I_{n_k})$ soient deux à deux disjoints. Cette suite et le filtre $\theta(F)$ vérifient alors la condition (ii) du théorème 21, ce qui prouve que $\theta(F)$ est maigre.

Enfin (ii) résulte de (i) puisque $\theta\big(\overset{-1}{\theta}(G)\big) = G$. ∎

Le comportement des filtres maigres vis à vis de la somme est identique à celui des filtres mesurables. L'énoncé et la démonstration de la proposition 15 sont encore valables si l'on remplace „mesurable" par „maigre".

Terminons ce paragraphe par un dernier résultat de stabilité. Étant donné deux ensembles infinis I_1 et I_2, et des filtres F_1 sur I_1, F_2 sur I_2, soit $F = F_1 \times F_2$ le filtre sur $I_1 \times I_2$ engendré par les parties $x_1 \times x_2$, où $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$,

Proposition 26. *$F_1 \times F_2$ est maigre si et seulement si l'un des deux filtres F_1, F_2, est maigre et l'autre n'est pas plus fin que les filtres des parties de complémentaire au plus dénombrable.*

Démonstration. Prouvons que la condition est suffisante. Si F_1 est maigre et si D est une partie dénombrable de I_2 tel que $x_2 \cap D$ soit infini pour $x_2 \in F_2$, on a

$$F_1 \times F_2 \subset \sum_{F_2} H_i$$

où $H_i = F_2$ si $i \in D$, et sinon est trivial. Ce filtre est maigre d'après l'analogue de la proposition 15.

Prouvons que la condition est nécessaire. Si F est maigre, d'après la proposition 22 il existe des parties dénombrables D_1 de I_1 et D_2 de I_2 telles que $F|_{D_1 \times D_2}$ soit maigre. Ceci montre déjà que $F_1|_{D_1}$ et $F_2|_{D_2}$ sont non triviaux. Une modification facile de la preuve de l'implication (i) ⇒ (ii) du théorème 21 montre qu'il existe des suites croissantes J_k^1 et J_k^2 de parties finies de I_1 et I_2 telles que tout élément de F rencontre tous les ensembles $J_{k+1}^1 \times J_{k+1}^2 \setminus J_k^1 \times J_k^2$ à partir d'un certain rang. Si F_1 n'est pas maigre, il existe $x \in F_1$ tel que l'ensemble

$$B = \{n \in N;\ x_1 \cap J_{n+1}^1 \setminus J_n^1 \neq \emptyset\}$$

soit infini. Si F_2 n'est pas maigre il existe $x_2 \in F_2$ tel que l'ensemble

$$C = \{n \in B;\ x_2 \cap J_{n+1}^2 \setminus J_n^2 = \emptyset\}$$

soit infini. Si $n \in C$, on a donc

$$x_1 \times x_2 \cap (J_{n+1}^1 \times J_{n+1}^2 \setminus J_n^1 \times J_n^2) = \emptyset$$

ce qui est absurde, et prouve que, soit F_1, soit F_2 est maigre. ∎

Remarques. 1. Le lecteur étendra aisément la proposition 26 aux produits finis, en remarquant qu'un produit fini de filtres est plus fin que le filtre des parties du produit de complémentaire au plus dénombrable si et seulement si l'un des filtres est plus fin que le filtre des parties (de l'ensemble sur lequel il est défini) dont le complémentaire est au plus dénombrable.

2. Étant donnée une suite (I_n) d'ensembles infinis et des filtres F_n sur I_n, soit $F = \widetilde{\prod_{n=1}} F_n$ le filtre sur $I = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$ engendré par les parties $\prod_{n=1}^{\infty} x_n$, ou $x_n \in F_n$, et $x_n = I_n$ sauf pour un nombre fini d'indices. L'analogue de la proposition 26 n'est plus exact.

Choisissons en effet $I_n = \boldsymbol{N}$ et $F_n = G$ pour chaque n (où G est quelconque). Désignons par $x(a)$ la composante de rang a de $x \in \{0,1\}^I$. On a

$$\prod_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{p,q \in \boldsymbol{N}} A_{p,q}$$

où

$$A_{p,q} = \{x \in \{0,1\}^I;\ x(a) = 1\ \forall a \in \{p,q\}^{\boldsymbol{N}}\}.$$

En effet, tout élément z de F contient un produit $\prod_{n=1}^{\infty} x_i$, où $\bigcap_{i=1}^{\infty} x_i = y \in G$. Si p et q sont deux points distincts de y, z contient $\{p,q\}^{\boldsymbol{N}}$, ce qui suffit.

Ainsi, $A_{p,q}$ étant rare et de mesure nulle, F est maigre et mesurable.

3. Si dans la définition précédente, on supprime la condition „$x_n = I_n$ sauf pour un nombre fini d'indices", le filtre obtenu contient le complémentaire de toute partie dénombrable, donc n'est pas maigre et pas mesurable.

4. Nous ne savons pas si l'analogue de la proposition 26 pour les filtres mesurables est exacte.

6. Independance de la propriété de Baire est de la mesurabilite. Une des conséquences de l'axiome de Martin (AM) est la suivante ([9], Théorème 3): Si $(X_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-ensembles de $[0,1]$ de mesure de Lebesgue nulle, et si $\operatorname{card} I < \operatorname{card} \boldsymbol{R}$ alors $\bigcup_{i \in I} X_i$ est aussi de mesure nulle. Il est aisé d'étendre ce résultat à des parties X_i d'un espace de probabilité (X, Σ, μ) où Σ est dénombrablement engendrée.

PROPOSITION 27. *Il existe sur tout ensemble infini I un filtre mesurable non maigre.*

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où I est dénombrable. Soit alors θ une application fini-jective de I sur $\boldsymbol{N}$ telle que $\operatorname{card} \overset{-1}{\theta}(n) = n$ pour tout n. Soit F un ultrafiltre sur $\boldsymbol{N}$. D'après la proposition 25, $\overset{-1}{\theta}(F)$ n'est pas maigre, et d'après la preuve de la proposition 13, $\overset{-1}{\theta}(F)$ est mesurable. ■

PROPOSITION 28 (AM). *Il existe sur tout ensemble infini I un filtre universellement mesurable non maigre.*

Démonstration. Supposons d'abord $I = \boldsymbol{N}$. L'existence d'une „limite médiale" sur $\{-1,1\}^{\boldsymbol{N}}$, établie dans [7] avec l'hypothèse du continu, peut aussi se déduire de l'axiome de Martin. La fonction φ est universellement mesurable, additive sur K (c'est-à-dire que si $x, y \in K$ et $x \cap y = \emptyset$, on a $\varphi(x \cup y) = \varphi(x) + \varphi(y)$) et nulle sur les parties finies. Il en résulte que $F = \overset{-1}{\varphi}(1) \cap K$ est un filtre universellement mesurable et que, d'après [4] ce filtre ne possède pas la propriété de Baire.

Si maintenant I est quelconque, on peut supposer qu'il contient $\boldsymbol{N}$ et le filtre engendré par F dans I convient. ■

PROPOSITION 29 (AM). *Soit (I_n) une suite de parties finies deux à deux disjointes de $\boldsymbol{N}$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $\forall a < 1,\ \sum_{n=1}^{\infty} a^{\operatorname{card} I_n} < \infty$.

(ii) *Il existe un filtre F non mesurable tel que*

$$\forall x \in F,\ \exists p \in \boldsymbol{N};\quad n \geqslant p \Rightarrow x \cap I_n \neq \emptyset.$$

Démonstration. Prouvons que (ii) ⇒ (i). Soit $a < 1$ et soit

$$m_{1-a} = (a\delta_0 + (1-a)\delta_1)^{\otimes \boldsymbol{N}}.$$

D'après la proposition 11 on a $m^*_{1-a}(F) = 1$. Or

$$F \subset \{x \in K;\ \exists p,\ \forall n \geqslant p,\ x \cap I_n \neq \emptyset\} = A,$$

d'où

$$m_a(A) = \operatorname{Sup}_p \prod_{n \geqslant p} (1 - a^{\operatorname{card} I_n}) = 1$$

ce qui montre que $\sum a^{\operatorname{card} I_n} < +\infty$.

Prouvons que (i) ⇒ (ii). Soit Ω_1 le premier ordinal de même cardinal que $\boldsymbol{R}$. Soit $(L_\alpha)_{\alpha < \Omega_1}$ une énumération des compacts de K de mesure > 0. Construisons par induction sur $\alpha < \Omega_1$ une suite (x_α) de parties de $\boldsymbol{N}$ vérifiant les conditions suivantes:

$$x_\alpha \in L_\alpha,$$

pour toute famille finie A d'ordinaux

(17) $\quad \exists k, l \in \boldsymbol{N}\colon \forall n \geqslant l \quad \operatorname{card}\big(\bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha \cap I_n\big) \geqslant 3^{-k} \operatorname{card} I_n.$

Supposons la suite construite pour tout ordinal $\alpha < \beta$. Pour toute famille finie A d'ordinaux $< \beta$ soit X_A l'ensemble

$$\{x \in K;\ \exists l, n \geqslant l \Rightarrow \operatorname{card}\big(x \cap \bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha \cap I_n\big) \geqslant \tfrac{1}{3} \operatorname{card}\big(I_n \cap \bigcap_{\alpha \in A} x_\alpha\big)\}.$$

D'après le lemme 16 (où l'on fait $b = 1/2$, $a = 2/3$), la condition (17) et la condition (i), on a $m(X_A) = 1$. D'après l'axiome de Martin on a $m(\bigcap_A X_A) = 1$. Il suffit alors de prendre $x_\beta \in L_\beta \cap \bigcap_A X_A$ pour terminer la construction. Le filtre engendré par les x_a $(a < \Omega_1)$ est non mesurable puisqu'il rencontre tout compact de mesure positive, et vérifie la condition (ii) d'après (17). ■

En particulier ce résultat implique l'existence sur tout ensemble infini de filtres maigres non mesurables, ce qui, compte tenu de la condition (iv) du théorème 21 montre que l'hypothèse de la proposition 12 est bien nécessaire. La proposition 29 n'est pas sans rapports avec le résultat suivant, du à D. H. Fremlin [3] (antérieurement à notre travail).

PROPOSITION 30 (AM). *Soit (A_n) une suite d'ensembles indépendants d'un espace de probabilité (X, Σ, μ) où la tribu Σ est dénombrablement engendrée. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\forall k > 0 \ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)^k = +\infty$.

(ii) *Il existe une valeur d'adhérence (pour τ_p) de la suite (A_n), qui est de mesure extérieure* 1.

Ce résultat est la clef de la proposition suivante.

PROPOSITION 31 (AM). *Soit (I_n) une suite de parties finies deux à deux disjointes de N. Les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) $\forall a > 0 \ \sum_{n=1}^{\infty} a^{\operatorname{card} I_n} = +\infty$.

(ii) *Il existe un filtre non mesurable F tel que pour tout $x \in F$, l'ensemble $\{n; I_n \subset x\}$ est infini.*

Démonstration. L'implication (ii)$\Rightarrow$(i) résulte du théorème 17. Prouvons la réciproque. Soit:

$$A_n = \{x \in K;\ x \supset I_n\}.$$

On a $m(A_n) = 2^{-\operatorname{card} I_n}$, ce qui montre que la condition (i) de la proposition 30 est vérifiée. Il existe donc un ultrafiltre U sur N tel que si l'on pose

$$F = \lim_U A_n \quad \text{on ait } m^*(F) = 1.$$

Mais on a aussi

$$(\forall x \in K)\ (x \in F \Leftrightarrow \{n;\ I_n \subset x\} \in U).$$

Ceci prouve que F est un filtre vérifiant la condition (ii). ■

Pour terminer ce paragraphe, et notre étude des filtres, signalons que les méthodes précédentes permettent aussi de construire un filtre maigre ayant la propriété (D) du paragraphe 4.

7. Reduction du problème 4. Ce paragraphe et le suivant sont consacrés à la solution du problème 4.

Le lemme élémentaire suivant dégage la difficulté.

LEMME 32. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini, et $A \subset M(\Sigma)$ un ensemble compact pour τ_p et séparé pour τ_m. Alors la restriction de τ_m à A est complète et plus fine que τ_p.*

De plus, les conditions sont équivalentes:

(i) *Les topologies τ_m et τ_p coincident sur A.*

(ii) *A est métrisable pour τ_p.*

(iii) *Toute suite de A possède une sous-suite convergente μ-p.p.*

(iv) *A est compact pour τ_m.*

(v) *A est précompact pour τ_m.*

(vi) *A est séparable pour τ_m.*

Démonstration. Prouvons la première assertion. Si (x_n) est une suite de A qui est de Cauchy pour τ_m, elle possède une sous-suite (x_{n_p}) convergente μ-p.p. vers une fonction x. Si y désigne une valeur d'adhérence dans A (pour τ_p) de la suite (x_{n_p}), on a $x = y$, μ-p.p.; donc la suite (x_{n_p}) converge en mesure vers $y \in A$, et il en est alors de même de la suite (x_n), ce qui prouve la complétude de A pour τ_m. De plus un sous-ensemble B de A fermé pour τ_p est aussi complet pour τ_m, donc fermé pour τ_m, ce qui montre que τ_m est plus fine que τ_p.

Prouvons maintenant les équivalences. Sont évidentes les implications:

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)} \quad \text{et} \quad \text{(iv)} \Rightarrow \text{(v)} \Rightarrow \text{(vi)}.$$

Puisque (iii) implique que toute suite de A possède une sous-suite convergente pour τ_m, et que τ_m est séparée sur A, on a (iii)$\Rightarrow$(iv). Enfin puisque τ_m est plus fine que τ_p sur A on a (vi)$\Rightarrow$(ii) et (iv)$\Rightarrow$(i). ■

Le théorème 3 résulte du théorème 1 et de la condition (iii) de ce lemme. L'exemple du paragraphe 2 prouvant que le théorème 1 n'est pas exact si l'espace mesuré n'est pas parfait, il nous faut employer une autre méthode. Nous prouverons plus tard que A est précompact pour τ_m.

Désignons par Ω le premier ordinal non dénombrable. Le résultat suivant est le principal de ce paragraphe.

THÉORÈME 33. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré et $A \subset M(\Sigma)$ un compact pour τ_p, non nécessairement séparé pour τ_m, et qui n'est pas précompact pour τ_m. Alors il existe un sous-compact A' de A et une surjection continue de A' sur $\{0,1\}^\Omega$. De plus, sous l'axiome de Martin, il existe un sous-compact A' de A et une surjection continue de A' sur $\{0,1\}^{\boldsymbol{R}}$, donc un sous-compact de A homéomorphe à βN.*

Démonstration. 1ère étape. Si A n'est pas précompact pour τ_m, il existe un réel $a > 0$, un ensemble $E \in \Sigma$, de mesure finie et une suite (y_n) de fonctions de A tels que

$$m \neq n \Rightarrow \mu(\{|y_n - y_m| \geq a\} \cap E) \geq a.$$

Soit $y = \operatorname{Sup}_n |y_n|$. Puisque A est ponctuellement borné, y est finie. Il existe alors un réel L tel que $\mu(\{y \geqslant L\} \cap E) \leqslant \alpha/2$. Soit φ l'application:

$$\varphi\colon \boldsymbol{R} \to [-L, L], \quad t \to \operatorname{Inf}\big(L, \operatorname{Sup}(t, -L)\big).$$

L'ensemble des restrictions à E des fonctions $\varphi \circ x$, pour $x \in A$, est image continue de A (pour τ_p) donc compact pour τ_p. Cet ensemble n'est pas précompact pour τ_m, puisque

$$m \neq n \Rightarrow \mu(\{|\varphi \circ y_n - \varphi \circ y_m| \geqslant \alpha\}) \geqslant \alpha/2.$$

Nous voilà donc ramené au cas où A est borné en norme uniforme et où $\mu(X) < +\infty$. Sur A, τ_m coïncide avec la topologie induite par $\mathscr{L}_1(\mu)$, topologie que nous utiliserons désormais pour la commodité du vocabulaire.

$2^{\text{ème}}$ étape. Soient (x_n) une suite de A, et β un réel > 0 tels que

$$(18) \qquad n \neq m \Rightarrow \|x_n - x_m\|_1 \geqslant \beta.$$

Pour toute partie infinie J de $\boldsymbol{N}$ posons

$$\overline{x}_J = \limsup_{n \in J} x_n; \qquad \underline{x}_J = \liminf_{n \in J} x_n.$$

Prouvons qu'il existe une partie infinie I de $\boldsymbol{N}$ telle que pour toute partie infinie J de I on ait

$$(19) \qquad \|\overline{x}_J - \underline{x}_J\|_1 = \|\overline{x}_I - \underline{x}_I\|_1.$$

Pour cela construisons par récurrence une suite décroissante (I_n) de parties infinies de $\boldsymbol{N}$ telle que

$$\|\overline{x}_{I_{n+1}} - \underline{x}_{I_{n+1}}\|_1 \leqslant 2^{-n} + \operatorname{Inf}\{\|\overline{x}_I - \underline{x}_I\|_1;\ I \subset I_n,\ I \text{ infini}\}.$$

Soit I une partie infinie de $\boldsymbol{N}$ telle que $I \setminus I_n$ soit finie pour tout n et soit $J \subset I$. Puisque pour tout n, $J \setminus I_n$ est fini on a

$$\begin{aligned}\|\overline{x}_J - \underline{x}_J\|_1 &= \|\overline{x}_{J \cap I_n} - \underline{x}_{J \cap I_n}\| \geqslant \|\overline{x}_{I_{n+1}} - \underline{x}_{I_{n+1}}\|_1 - 2^{-n}\\ &\geqslant \|\overline{x}_{I_{n+1} \cap I} - \underline{x}_{I_{n+1} \cap I}\|_1 - 2^{-n} = \|\overline{x}_I - \underline{x}_I\|_1 - 2^{-n}\end{aligned}$$

ce qui prouve que I convient.

En remplaçant la suite (x_n) par une sous-suite, on peut supposer que la condition (19) est vérifiée pour $I = \boldsymbol{N}$, et que la suite (x_n) converge faiblement dans $\mathscr{L}_2(\mu)$ vers une certaine fonction x. Pour alléger les notations posons

$$\overline{x} = \overline{x}_{\boldsymbol{N}} \, (= \limsup_n x_n), \qquad \underline{x} = \underline{x}_{\boldsymbol{N}} \, (= \liminf_n x_n).$$

$3^{\text{ème}}$ étape. Posons:

$$X_0 = \{u \in X;\ \underline{x}(u) < x(u) < \overline{x}(u)\}.$$

Prouvons que $\mu(X_0) > 0$. Pour cela, posons $y_n = \operatorname{Inf}_{m \geqslant n} x_m$, et considérons l'ensemble:

$$X_1 = \{u \in X;\ \underline{x}(u) \geqslant x(u)\}.$$

On a:

$$\int_{X_1} \underline{x}\, d\mu \geqslant \int_{X_1} x\, d\mu = \lim_{n \to \infty} \int_{X_1} x_n\, d\mu \geqslant \lim_{n \to \infty} \int_{X_1} y_n\, d\mu \geqslant \int_{X_1} \underline{x}\, d\mu.$$

On en déduit que $\lim_{n \to \infty} \int_{X_1} (x_n - y_n)\, d\mu = 0$, et que $x = \underline{x}$ μ-p.p. sur X_1, donc que $\lim_{n \to \infty} \int_{X_1} (x - y_n)\, d\mu = 0$. Il en résulte que $\lim_{n \to \infty} \int_{X_1} |x - x_n|\, d\mu = 0$. De même on a $\lim_{n \to \infty} \int_{X_2} |x - x_n|\, d\mu = 0$, si $X_2 = \{u \in X;\ x(u) \geqslant \overline{x}(u)\}$. Il résulte alors de (18) que $\mu(X_0) = \mu\big(X \setminus (X_1 \cup X_2)\big) > 0$.

Soit maintenant J une partie infinie de I. Prouvons que

$$(20) \qquad \mu\left(\left\{u \in X_0;\ \left\{n \in J;\ \frac{x + \overline{x}}{2}(u) \leqslant x_n(u)\right\} \text{ est infini}\right\}\right) = \mu(X_0),$$

$$(21) \qquad \mu\left(\left\{u \in X_0;\ \left\{n \in J;\ \frac{x + \underline{x}}{2}(u) \geqslant x_n(u)\right\} \text{ est infini}\right\}\right) = \mu(X_0).$$

Soit en effet $Y = \left\{u \in X_0;\ \left\{n \in J;\ x_n(u) \geqslant \dfrac{\overline{x} + x}{2}\right\} \text{ est fini}\right\}$. On a:

$$u \in Y \Rightarrow \overline{x}_J(u) < \frac{\overline{x} + x}{2} < \overline{x}.$$

Puisque $\underline{x}_J \geqslant \underline{x}$, il en résulte que si $\mu(Y) > 0$ on a

$$\|\overline{x}_J - \underline{x}_J\|_1 < \|\overline{x} - \underline{x}\|_1$$

ce qui contredit (18), et établit (20). La condition (21) se prouve de même.

$4^{\text{ème}}$ étape. Construisons par induction transfinie une suite $(t_\alpha)_{\alpha < \Omega}$ de points de X_0 telle que si l'on pose

$$T_\alpha = \left\{n;\ x_n(t_\alpha) \geqslant \frac{x + \overline{x}}{2}(t_\alpha)\right\},$$

$$T'_\alpha = \left\{n;\ x_n(t_\alpha) \leqslant \frac{x + \underline{x}}{2}(t_\alpha)\right\},$$

alors pour tout couple (C, C') de familles finies disjointes d'ordinaux $< \Omega$ l'ensemble

$$S_{C,C'} = \bigcap_{\alpha \in C} T_\alpha \cap \bigcap_{\alpha \in C'} T'_\alpha$$

soit infini.

Supposons la construction effectuée pour tous les ordinaux $< \gamma$, de sorte que $S_{C,C'}$ soit infini si C et C' sont constitués d'ordinaux $< \gamma$. L'ensemble de tels couples (C, C') est dénombrable. Pour chacun d'eux l'ensemble $X_{C,C'}$ des points t de X_0 tels que les deux ensembles

$$\left\{n \in S_{C,C'};\ x_n(t) \geqslant \frac{x+\overline{x}}{2}(t)\right\}; \qquad \left\{n \in S_{C,C'};\ x_n(t) \leqslant \frac{x+\underline{x}}{2}(t)\right\}$$

soient infinis est de même mesure que X_0, d'après (20) et (21). Il suffit de choisir t_γ dans l'intersection des ensembles $X_{C,C'}$.

$5^{\text{ème}}$ étape. Terminons la preuve du théorème 33. Soit f_α une fonction continue de $\boldsymbol{R}$ dans $[0,1]$ telle que

$$t \leqslant \frac{x+\underline{x}}{2}(t_\alpha) \Rightarrow f_\alpha(t) = 0; \qquad t \geqslant \frac{x+\overline{x}}{2}(t_\alpha) \Rightarrow f_\alpha(t) = 1.$$

L'application:

$$\varphi\colon A \to [0,1]^\Omega, \qquad x \to f_\alpha(x(t_\alpha))$$

est continue. Étant donnée une partie P de Ω, il résulte de la $4^{\text{ème}}$ étape que l'ensemble des parties R_α de $\boldsymbol{N}$, où $R_\alpha = T_\alpha$ si $\alpha \in P$, et sinon $R_\alpha = T'_\alpha$, est une base de filtre. Soit U un ultrafiltre, plus fin que le filtre engendré par cette base, et soit $x = \lim_U x_n$. Pour $\alpha \in P$, on a

$$x(t_\alpha) > \frac{x+\overline{x}}{2}(t_\alpha), \qquad \text{d'où} \qquad f_\alpha(x(t_\alpha)) = 1.$$

De même si $\alpha \notin P$, on a $f_\alpha(x(t_\alpha)) = 0$. Ceci prouve que l'image de A par φ contient $\{0,1\}^\Omega$. Il suffit maintenant de poser $A' = \overset{-1}{\varphi}(\{0,1\}^\Omega)$. La preuve de la première assertion du théorème 33 est terminée.

Supposons maintenant vrai l'axiome de Martin. Il suffit de remarquer que la construction de la $4^{\text{ème}}$ étape de la démonstration précédente peut alors être effectuée pour tout ordinal $\alpha < \Omega_1$. Ceci provient du fait que tous les ensembles mesurables qui interviennent appartiennent à la plus petite tribu rendant mesurables les fonctions x et x_n, et que cette tribu est dénombrablement engendrée.

Soit φ une surjection continue de A' sur $P = \{0,1\}^{\{0,1\}^{\boldsymbol{N}}}$. Pour chaque entier n soit t_n l'élément donné par

$$\forall\, a \in \{0,1\}^{\boldsymbol{N}}, \qquad t_n(a) = a(n).$$

Soit $z_n \in A'$ tel que $\varphi(z_n) = t_n$. L'application θ, de $\beta\boldsymbol{N}$ dans A', qui envoie l'ultrafiltre U sur $\lim_U t_n$ est continue. L'application $\varphi\circ\theta$ est injective. En effet

$$\forall a \in [0,1]^{\boldsymbol{N}}, \qquad (\varphi\circ\theta)(U)(a) = (\lim_U t_n)(a) = \lim_U a(n) = \chi_U(a).$$

Il en résulte que θ est injective, donc est un homéomorphisme sur son image. ■

Le résultat suivant est un corollaire de la démonstration précédente, qui n'est pas directement utile à la solution du problème 4.

THÉORÈME 34 (AM). *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré, où Σ est la σ-algèbre complétée par rapport à μ d'une σ-algèbre Σ_0 de cardinal $\leqslant \operatorname{card}\boldsymbol{R}$. Alors tout ensemble $A \subset M(\Sigma)$ compact pour τ_p est précompact pour τ_m. En particulier si l'espace mesuré est σ-fini, toute suite de A possède une sous-suite convergente μ-p.p.*

Démonstration. Reprenons les notations de la preuve du théorème 33. Soit $(\beta_\alpha)_{\alpha<\Omega_1}$ une énumeration des traces de mesure > 0 des ensembles de Σ_0 sur X_0, telle que chacune de ces traces soit énumérée pour deux ordinaux consécutifs. Comme lors de la preuve de la proposition 34, construisons la suite $(t_\alpha)_{\alpha<\Omega_1}$, en imposant de plus $t_\alpha \in B_\alpha$. Le raisonnement de la $5^{\text{ème}}$ étape de la preuve du théorème 33 montre qu'il existe $y \in A$ et tel que $y(t_\alpha) > x$ si α est pair, et $y(t_\alpha) < x$ si α est impair. Ceci montre que les deux ensembles $\{u \in X;\ y(u) > x(u)\}$ et $\{u \in X;\ y(u) < x(u)\}$ ne peuvent être simultanément mesurables, puisque leurs intersections avec X_0 sont de mesure extérieure $\mu(X_0)$ et contredit le fait que $y \in M(\Sigma)$. ■

Il n'est cependant pas possible d'étendre le théorème 1 au type d'espace envisagé dans l'énoncé précédant. En effet supposons exacte l'hypothèse du continu. Soit $(U_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ une suite d'ultrafiltres dense dans $\beta\boldsymbol{N}$. La proposition 7 permet de construire par induction une suite $(t_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ de points de $K = [0,1]^{\boldsymbol{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes

$$\beta \geqslant \alpha \Rightarrow t_\beta \in U_\alpha, \qquad t_\alpha \in A_\alpha$$

où $(A_\alpha)_{\alpha<\Omega}$ est une énumération des compacts de K de mesure > 0. Soit X l'ensemble des t_α. On a $m^*(X) = 1$, et pour tout α l'ensemble $X \setminus U_\alpha$ est dénombrable. Considérons l'espace mesuré $(X, \mathscr{B}, \mu)$, où $\mathscr{B}$ désigne la σ-algèbre des boréliens de X et μ la trace sur X de la mesure de Haar. Soit (x_n) la suite des fonctions coordonnées. Comme dans l'exemple du paragraphe 2, on voit qu'elle ne possède aucune sous-suite convergente μ-p.p. Mais si (x_{n_p}) est une sous-suite de (x_n) il existe un α tel que U_α soit porté par l'ensemble des n_p. Et alors $\lim_{U_\alpha} x_n = \chi_{U_\alpha}$ est une valeur d'adhérence de la suite (x_{n_p}), qui est mesurable puisque $U_\alpha \cap X \in \mathscr{B}$.

8. Solution du problème 4.

Le point crucial est le théorème suivant:

THÉORÈME 35. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini, et $A \subset M(\Sigma)$*

un ensemble homéomorphe pour τ_p à βN. Il existe alors un sous-compact B de A, homéomorphe à βN, et tel que

$$\mu\Big(\bigcup_{x,y\in B}\{t\in X;\ x(t)\neq y(t)\}\Big)=0.$$

Démonstration. On peut supposer que μ est une probabilité, en la remplaçant par une probabilité ayant les mêmes ensembles négligeables.

Supposons tout d'abord $A\subset\Sigma$. Pour tout fermé C de A posons:

$$h(C)=\mu^*\Big(\bigcup_{x,y\in C}x\triangle y\Big).$$

Construisons par récurrence une suite B_n de fermés infinis de A tels que

$$h(B_n)<2^{-n}+\inf\{h(C);\ C\subset B_{n-1},\ C \text{ fermé infini}\}$$

et posons $B=\bigcap B_n$. C'est un fermé infini (car si $x_n\in B_n$, toute valeur d'adhérence de la suite (x_n) appartient à B). Si C est un fermé infini de B on a $h(C)\leqslant h(B_n)\leqslant 2^{-n}+h(C)$, ce qui montre que $h(C)=\lim h(B_n)=h(B)$. Il nous suffit de prouver que $h(B)=0$.

Puisque B contient une copie de βN il existe une surjection continue f de B sur $[0,1]$. D'après le théorème de Zorn il existe un fermé C de B tel que $f(C)=[0,1]$ et

$$(D\subset C,\ D \text{ fermé},\ D\neq C)\Rightarrow\big(f(D)\neq[0,1]\big).$$

Soit (q_n) une suite dense de $[0,1]$ et pour chaque n soit $x_n\in C\cap\overset{-1}{f}(q_n)$. Désignons par θ l'application de X dans $K=\{0,1\}^N$ définie par

$$\theta(t)=\big(\chi_{x_n}(t)\big).$$

Elle est mesurable lorsque K est muni de la tribu des boréliens. Pour tout point u de K définissons les sous-ensembles suivants de $[0,1]$

$$u'=\overline{\{q_n;\ u_n=0\}};\qquad u''=\overline{\{q_n;\ u_n=1\}}.$$

Prouvons que

$$\theta(X)\subset Y=\{u\in K;\ u'\cap\overset{\circ}{\widehat{u''}}=\emptyset=\overset{\circ}{\widehat{u'}}\cap u''\}.$$

Supposons en effet par exemple que pour un t de X on ait $I\subset\theta(t)'$ et $\theta(t)''\cap I\neq\emptyset$, où I désigne un intervalle ouvert non vide de $[0,1]$. Puisque $\theta(t)''\cap I\neq\emptyset$, il existe un n tel que $t\in x_n$ et $q_n=f(x_n)\in I$. Puisque f est continue, il existe un ouvert V non vide de C, contenu dans $\{x\in A;\ t\in x\}$ et tel que $f(V)\subset I$. Posons $G=\{x_n;\ x_n\notin V\}$ et prouvons que $\overline{f(G)}=[0,1]$. Il est déjà clair que $\overline{f(G)}\supset[0,1]\setminus I$.

Si $s\in I$, puisque $I\subset\theta(t)'$, tout voisinage de s contient un q_m avec $t\notin x_m$, donc $x_m\in G$. On a ainsi $[0,1]=\overline{f(G)}\subset f(\overline{G})$. Mais ceci est absurde puisque $\overline{G}\subset C$ et $\overline{G}\neq C$.

Prouvons de façon similaire que

$$x,y\in C;\ f(x)=f(y)=q_n\Rightarrow\theta(x\triangle y)\subset Y_n=\{u\in K;\ q_n\in u'\cap u''\}.$$

Supposons en effet par exemple que pour un t de $x\triangle y$ on ait $q_n\notin\theta(t)'$ et $t\in x\setminus y$. On a alors $q_n\in\overset{\circ}{\widehat{\theta(t)''}}$. Il existe donc un voisinage V de y tel que

$$f(V)\subset\overset{\circ}{\widehat{\theta(t)''}};\qquad V\subset\{x\in C;\ t\notin x\}.$$

Si $x_m\in V$, on a $f(x_m)\in\overset{\circ}{\widehat{\theta(t)''}}$, et puisque $t\notin x_m$ on a aussi $f(x_m)=q_m\in\theta(t)'$, ce qui contredit le résultat précédent.

Puisque la suite q_n est dense dans $[0,1]$ on a $Y\cap\bigcap_n Y_n=\emptyset$. Puisque $\theta(X)\subset Y$ on a $\bigcap_n\overset{-1}{\theta}(Y_n)=\emptyset$. Puisque les Y_n sont des boréliens de K les ensembles $\overset{-1}{\theta}(Y_n)$ sont mesurables. Il existe un ensemble mesurable Z contenant $\bigcup_{x,y\in B}x\triangle y$ et tel que

$$\mu(Z)=\mu^*\Big(\bigcup_{x,y\in B}x\triangle y\Big)=h(B).$$

Supposons $h(B)>0$. Il existe alors un n tel que

$$\mu^*\Big(\overset{-1}{\theta}(Y_n)\cap\bigcup_{x,y\in B}x\triangle y\Big)\leqslant\mu\big(\overset{-1}{\theta}(Y_n)\cap Z\big)<\mu(Z)=h(B).$$

Soit $C=\overset{-1}{f}(q_n)$. C'est un fermé infini. En effet, si x_{n_k} est une suite telle que $\lim_{k\to\infty}q_{n_k}=q_n$ et $q_{n_k}\neq q_n$, toute valeur d'adhérence de la suite x_{n_k} est contenue dans C. De plus on a

$$\bigcup_{x,y\in C}x\triangle y\subset\overset{-1}{\theta}(Y_n)\cap\bigcup_{x,y\in B}x\triangle y$$

d'où

$$h(C)=\mu^*\Big(\bigcup_{x,y\in C}x\triangle y\Big)\leqslant\mu\big(\overset{-1}{\theta}(Y_n)\cap Z\big)<h(B)$$

ce qui contredit la construction de B, et établit que $h(B)=0$. ■

Prouvons maintenant le cas général. Désignons par $\mathscr{B}$ la σ-algèbre des boréliens de $\boldsymbol{R}$, par λ la mesure de Lebesgue et par $\Sigma\hat{\otimes}\mathscr{B}$ la σ-algèbre complétée de $\Sigma\otimes\mathscr{B}$ par rapport à $\mu\otimes\lambda$.

L'ensemble $\hat{A}$ des parties x de $X\times\boldsymbol{R}$ telles que

$$\exists x\in A;\quad\{(a,b)\in X\times\boldsymbol{R};\ b<x(a)\}\subset y\subset\{(a,b)\in X\times\boldsymbol{R};\ b\leqslant x(a)\}$$

est un compact de $\Sigma \hat{\otimes} \mathscr{B}$ pour la topologie de la convergence simple sur $X \times \boldsymbol{R}$, et la surjection évidente φ de $\hat{A}$ sur A est continue. Puisque A est homéomorphe à $\beta\boldsymbol{N}$, le raisonnement de la fin de la preuve du théorème 33 prouve qu'il existe un compact $\hat{B}$ de $\hat{A}$ tel que la restriction de φ à $\hat{B}$ soit un homéomorphisme de $\hat{B}$ et A.

On sait alors qu'il existe un compact $\hat{C} \subset \hat{B}$, homéomorphe à $\beta\boldsymbol{N}$, et un ensemble $Z \in \Sigma \hat{\otimes} \mathscr{B}$, tel que $\mu \otimes \lambda(Z) = 0$ et $\hat{x} \triangle \hat{y} \subset Z$ pour tous $\hat{x}$ et $\hat{y}$ de Z. Soit $Y \subset X$ un ensemble de mesure nulle tel que

$$t \notin Y \Rightarrow \lambda(\{u \in \boldsymbol{R};\ (t, u) \in Z\}) = 0.$$

On a, pour $t \in X$

$$x, y \in \varphi(\hat{C}) \Rightarrow \{u \in \boldsymbol{R};\ \operatorname{Inf}(x(t), y(t)) < u < \operatorname{Sup}(x(t), y(t))\} \subset \{u \in \boldsymbol{R};\ (t, u) \in Z\}$$

ce qui montre que $x(t) = y(t)$ dès que $t \notin Y$. La démonstration est terminée, puisque $\varphi(\hat{C})$ est homéomorphe à $\beta\boldsymbol{N}$.

Remarque. Sur un espace de probabilité les ensembles séparés pour τ_m ne sont pas toujours „petits". En effet, dans l'espace $\{0, 1\}^{2^{\boldsymbol{R}}}$ muni de sa mesure produit il existe une partie X de même cardinal que $\boldsymbol{R}$ et de mesure extérieure 1. Il existe $2^{\boldsymbol{R}}$ ensembles indépendants pour la mesure induite sur X, quoique $\operatorname{card} X = \boldsymbol{R}$.

Des théorèmes 33 et 35 découle immédiatement le résultat suivant, qui, sous l'axiome de Martin, résoud le problème 4.

THÉORÈME 36 (AM). *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré σ-fini, et $A \subset M(\Sigma)$ un ensemble compact τ_p et séparé pour τ_m. Alors sur A les topologies τ_p et τ_m coincident, donc en particulier A est métrisable pour τ_p.*

Bibliographie

[1] D. H. Fremlin, *Pointwise compact sets of measurable functions*, Manuscripta Math. 15 (1975), p. 219–242.
[2] — *Topological measure spaces: Two conterexamples*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 78 (1975), p. 95–106.
[3] — *Solution of a problem of W. Moran*, Manuscript non publié, Paris, Janvier 75.
[4] G. Godefroy et M. Talagrand, *Mesures simplement additives sur N*, Bull. Sc. Math. 101 (1977), p. 283–286.
[5] A. Ionescu Tulcea, *On pointwise convergence, compactness and equicontinuity in the lifting topology*, I, Z. Wahrsch. Verw. Geb. 26 (1973), p. 197–205.
[6] A. Louveau, *Ensembles K_σ-bornés et filtres sur ω*, Séminaire G.M.S., exposé 1, 1975–1976 (Université Paris VII).
[7] P. A. Meyer, *Limites médiales, d'après Mokobodzki*, Séminaire de probabilité VII, Université de Strasbourg, Lecture Notes 321, Springer Verlag.
[8] G. Mokobodzki, *Ultrafiltres rapides sur N*, Séminaire Brelot-Choquet-Deny, Théorie de Potentiel, 12 ème année, 1967/68, N° 12.

[9] Shoenfield, *Martin's Axiom*, Amer. Math. Monthly Journal 32 (1975), p. 610–617.
[10] M. Talagrand, *Extension de la mesure de Lebesgue aux filtres*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 283 (1976), p. 95–98.
[11] — *Solution d'un problème de A. Ionescu Tulcea*, ibidem, 283 (1976), p. 975–978.

Received April 1, 1977 (1285)