STUDIA MATHEMATICA, T. LXVII. (1980)

Charakterisierung der Quotientenräume von s und eine Vermutung von Martineau

von

DIETMAR VOGT und MAX JOSEF WAGNER

Abstract. There is given a complete characterization of all nuclear (F)-spaces which are isomorphic to a quotient space, respectively a complemented subspace of s. Application to sequence spaces gives concrete criteria, which permit easy construction of nuclear (F)-spaces which are not quotients of s, so disproving a conjecture of Martineau. Moreover, it is shown that there exists no quotient universal nuclear (F)-space, respectively nuclear Köthe space, which solves to the negative some problems posed by Pełczyński. The lifting Theorem 1.4 seems to be of independent interest.

In der vorliegenden Arbeit wird eine interne Charakterisierung derjenigen nuklearen (F)-Räume gegeben, die isomorph sind einem Quotientenraum des Raumes s der schnell fallenden Folgen. Dabei ergibt sich auch eine vollständige Beschreibung der projizierten Unterräume von s. Diese Charakterisierungen führen im Fall der nuklearen Folgenräume, d.h. der nuklearen (F)-Räume mit Basis, zu handlichen und anschaulichen Kriterien (für den Fall der projizierten Unterräume vgl. dazu [1]). Mit Hilfe dieser Kriterien wird dann ein Beispiel für einen nuklearen (F)-Raum angegeben, der nicht Quotient von s ist (s. [12]). Damit wird eine Vermutung von Martineau ([6], [9], S. 161) widerlegt. In Verschärfung dieser Widerlegung der Martineauschen Vermutung wird abschließend gezeigt, daß es in der Tat keinen nuklearen (F)-Raum gibt, der alle nuklearen (F)-Räume als Quotientenräume hat.

1. Sei E im folgenden ein (F)-Raum, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ eine Nullumgebungsbasis absolutkonvexer, abgeschlossener Mengen, $\| \ \|_1 \leqslant \| \ \|_2 \leqslant \ldots$ die zugehörigen Halbnormen.

1.1. Definition. E hat die Eigenschaft (Ω), wenn folgendes gilt: Zu jedem $p \in \boldsymbol{N}$ existiert $q \in \boldsymbol{N}$, so daß es zu jedem $k \in \boldsymbol{N}$ ein $n \in \boldsymbol{N}$ und $C > 0$ gibt mit

$$U_q \subset Cr^n U_k + \frac{1}{r} U_p \quad \text{für alle } r > 0.$$

Die Bedingung (Ω) hängt offenbar nicht von der speziellen Nullumgebungsbasis ab. Wir können dabei immer $q > p$ annehmen und brauchen bei Beweisen die Inklusion nur für große k und große r zu zeigen. Man erkennt unmittelbar das folgende Lemma.

1.2. Lemma. *Hat E die Eigenschaft (Ω), so auch jeder Quotientenraum von E.*

Wir können nun schon die eine Richtung der vorgesehenen Charakterisierung beweisen:

1.3. Satz. *Jeder Quotientenraum von s hat die Eigenschaft (Ω).*

Beweis. Auf Grund von 1.2 müssen wir nur zeigen, daß s die Eigenschaft (Ω) hat. Dies folgt aus 2.5. Wir geben aber hier einen direkten Beweis. Sei dazu $p \in N$. Wir setzen $q = p+1$, $C = 1$ und nehmen an

$$\|\xi\|_q = \sum_{j=1}^{\infty} j^q |\xi_j| \leqslant 1.$$

Es genügt zu zeigen: Bei gegebenem $r \geqslant 1$, k läßt sich mit geeignetem n ξ schreiben als $\xi = \eta + \zeta$, $\|\eta\|_k \leqslant r^n$, $\|\zeta\|_p \leqslant 1/r$.

Sei dazu $j_0 \in N$, so daß $j_0 \leqslant r \leqslant j_0 + 1$ und $\eta = (\xi_1, \ldots, \xi_{j_0}, 0, \ldots)$, $\zeta = (0, \ldots, 0, \xi_{j_0+1}, \xi_{j_0+2}, \ldots)$. Wir erhalten:

$$\|\eta\|_k = \sum_{j=1}^{j_0} j^k |\xi_j| \leqslant j_0^{k-q} \|\xi\|_q \leqslant r^{k-q},$$

$$\|\zeta\|_p = \sum_{j=j_0+1}^{\infty} j^p |\xi_j| \leqslant (j_0+1)^{-1} \|\xi\|_q \leqslant 1/r.$$

Im folgenden soll nun die Umkehrung von 1.3 gezeigt werden. Eines der wesentlichen Hilfsmittel dazu ist der folgende Satz, der eine Variante eines Ergebnisses aus [11] darstellt, wobei aber hier statt der in [11] verwendeten Voraussetzung $(*)$ an E (Quotient eines Folgenraumes mit logarithmisch konkaver Matrix, z.B. eines Potenzreihenraumes) die Eigenschaft (Ω) für E steht (vgl. die Bemerkung vor 2.4). Der Beweis ist auf die (F)-Raumsituation zugeschnitten.

1.4. Satz. *Sei $0 \to E \to G \xrightarrow{q} F \to 0$ eine exakte Sequenz nuklearer (F)-Räume, E habe die Eigenschaft (Ω). Sei H abgeschlossener Unterraum von s und $\varphi \in L(H, F)$. Dann existiert ein $\psi \in L(H, G)$, so daß $\varphi = q \circ \psi$, d.h.*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r] & G \arrow[r, "q"] & F \arrow[r] & 0 \\ & & & H \arrow[u] \arrow[ul, dashed] \arrow[r, phantom, "\subset"] & s \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $E \subset G$, und wählen in G eine Nullumgebungsbasis absolutkonvexer, abgeschlossener Mengen W_k, so daß für die $U_k = W_k \cap E$ gilt

$$(1) \qquad U_k \subset r^{\nu(k)} U_{k+1} + \frac{1}{r} U_{k-1} \quad \text{für alle } r \geqslant 2.$$

Sei V_k die von den W_k mittels q auf F induzierte Nullumgebungsbasis, ferner $\|\xi\|_k = \sum_{j=1}^{\infty} j^k |\xi_j|$ das kanonische Normensystem auf s und damit auf H. Seien weiter $E_k, G_k, \ldots$ die zu den jeweiligen Nullumgebungen gehörigen normierten Räume, $\hat{E}_k, \hat{G}_k, \ldots$ die zugehörigen Banachräume. Ihre Normen, sowie die zu den $U_k, W_k, \ldots$ gehörenden Halbnormen bezeichnen wir ebenfalls durchgängig mit $\| \ \|_k$, ihre Einheitskugeln mit $\hat{U}_k, \hat{W}_k, \ldots$

Für jedes k erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \to \hat{E}_k \to \hat{G}_k \xrightarrow{q_k} \hat{F}_k \to 0,$$

sowie eine von φ induzierte nukleare Abbildung $\varphi_k \colon H \to \hat{F}_k$. Zu φ_k existiert (s. [5], I, S. 87) eine nukleare Abbildung $\psi_k \colon H \to \hat{G}_k$ mit $\varphi_k = q_k \circ \psi_k$.

Bezeichnen wir mit $\varrho_{\nu,\mu}$, $\nu > \mu$ die verbindende Abbildung $\hat{G}_\nu \to \hat{G}_\mu$ (bzw. $\hat{E}_\nu \to \hat{E}_\mu$ usw.), so ist $q_k \circ (\varrho_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - \psi_k) = 0$ also

$$\chi_k = \varrho_{k+1,k} \circ \psi_{k+1} - \psi_k \in L(H, \hat{E}_k).$$

Die Abbildung χ_k ist nuklear, läßt sich also fortsetzen (s. [5], I, S. 87) zu einer Abbildung $\hat{\chi}_k \colon s \to \hat{E}_k$. Ist e_j der j-te Einheitsvektor in s, so setzen wir $x_{j,k} = \hat{\chi}_k(e_j)$. Für ein geeignetes $n(k)$, $C_k \geqslant 1$ haben wir dann $\|\hat{\chi}_k(\xi)\|_k \leqslant C_k \|\xi\|_{n(k)}$, d.h.

$$\|x_{j,k}\|_k \leqslant C_k j^{n(k)}.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$\big(\nu(k)+1\big) n(k) \leqslant n(k+1), \qquad C_k^{\nu(k)+1} 2^{(k+1)\nu(k)+1} \leqslant C_{k+1}$$

ist.

Nach Multiplikation mit $2C_k j^{n(k)}$ und Einsetzen von $r = 2^{k+1} C_k j^{n(k)} \geqslant 2$ erhalten wir dann aus (1):

$$(2) \qquad \begin{aligned} 2C_k j^{n(k)} U_k &\subset 2C_k^{\nu(k)+1} j^{n(k)+\nu(k)n(k)} 2^{(k+1)\nu(k)} U_{k+1} + 2^{-k} U_{k-1} \\ &\subset C_{k+1} j^{n(k+1)} U_{k+1} + 2^{-k} U_{k-1}. \end{aligned}$$

Ist nun $x \in \hat{E}_k$, $\|x\|_k \leqslant 2C_k j^{n(k)}$, d.h. $x \in 2C_k j^{n(k)} \hat{U}_k$, so finden wir zunächst ein $\xi \in E_k$, $\varrho_{k,k-1} \xi \in 2^{-k} U_{k-1}$, so daß $x + \xi \in 2C_k j^{n(k)} \varrho_k U_k$ ($\varrho_k \colon E \to E_k$ die Quotientenabbildung), d.h. $x + \xi = \varrho_k \eta$, $\eta \in 2C_k j^{n(k)} U_k$. Zerlegen wir nun η gemäß (2): $\eta = \alpha + \beta$ und setzen $a = \varrho_{k+1} \alpha$, $b = \varrho_k \beta - \xi$, so ist $x = \varrho_{k+1,} \ a + b$ und $\|a\|_{k+1} \leqslant C_{k+1} j^{n(k+1)}$, $\|\varrho_{k,k-1} b\|_{k-1} \leqslant 2^{-k+1}$.

Wir wählen auf Grund dessen nun bei festem j sukzessive eine Folge $a_{j,k}$ mit $a_{j,k} \in E_k$, $\|a_{j,k}\|_k \leqslant C_k j^{n(k)}$. Dabei lassen wir zur größeren Klarheit, wo unnötig, die Abbildungen $\varrho_{.}$ weg. Zunächst setzen wir $a_{j,0} = 0$. Ist $a_{j,k}$ gewählt, so ist $\|x_{j,k} + a_{j,k}\|_k \leqslant 2C_k j^{n(k)}$. Wir finden also ein $a_{j,k+1} \in E_{k+1}$, $\|a_{j,k+1}\|_{k+1} \leqslant C_{k+1} j^{n(k+1)}$, so daß

$$\|x_{j,k} + a_{j,k} - a_{j,k+1}\|_{k-1} \leqslant 2^{-k+1}.$$

Durch $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \to \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j a_{j,k}$ wird eine stetige lineare Abbildung $\tilde{A}_k\colon s \to \hat{E}_k$ definiert. Sei A_k die von $\tilde{A}_k$ induzierte Abbildung $H \to \hat{G}_k$. Dann ist $q_k \circ A_k = 0$.

Wir setzen $\Psi_k = \psi_k - A_k$ und erhalten für $x = (x_1, x_2, \ldots) \in H \subset s$:

$$\|\Psi_{k+1} x - \Psi_k x\|_{k-1} = \|(\psi_{k+1} - \psi_k) x + A_k x - A_{k+1} x\|_{k-1}$$
$$= \|\chi_k x + A_k x - A_{k+1} x\|_{k-1} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \, \|x_{j,k} + a_{j,k} - a_{j,k+1}\|_{k-1} \leqslant 2^{-k+1} \|x\|_0.$$

Für jedes $x \in H$ und n existiert also $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k>n}} \Psi_k(x) = a_n$ in $\hat{G}_n$ (genauer $\lim\limits_{k\to\infty} \varrho_{k,n} \Psi_k(x)$). Offenbar ist $\varrho_{n+1,n} a_{n+1} = a_n$. Die a_n repräsentieren mithin einen Vektor $\psi(x) \in G$.

Die Abbildung $x \to \psi(x)$ ist linear, und wegen

$$\|\Psi_k(x)\|_{n-2} \leqslant \|\Psi_n(x)\|_n + \sum_{j=n}^{k-1} \|\Psi_{j+1}(x) - \Psi_j(x)\|_{j-1}$$
$$\leqslant C \|x\|_q + \sum_{j=n}^{\infty} 2^{-j+1} \|x\|_0 \leqslant C \|x\|_q + \|x\|_0$$

für alle $k \geqslant n > 2$ mit geeignetem nur von n abhängigem C und q ist sie stetig.

Wegen $q_k \circ \Psi_k = q_k \circ \psi_k = \varphi_k$ für alle k erhalten wir $q \circ \psi = \varphi$.

Unter Verwendung von 1.4 sowie der Tatsache, daß es zu jedem nuklearen (F)-Raum F eine exakte Sequenz

$$0 \to s \to \tilde{F} \to F \to 0$$

mit $\tilde{F} \subset s$ gibt (s. [10]), gelangen wir zu dem folgenden Lemma.

1.5. Lemma. *Ist E abgeschlossener Unterraum von s, so existiert eine exakte Sequenz* $0 \to E \to s \to \tilde{F} \to 0$, *wo* $\tilde{F} \subset s$.

Beweis. Wir wenden das eben zitierte Ergebnis ([10], 1.6.) auf $F = s/E$ an und erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \to s \to \tilde{F} \xrightarrow{h} s/E \to 0$$

Ist $\varphi\colon s \to s/E$ die Quotientenabbildung, so können wir, da s die Eigenschaft (Ω) hat, 1.4 anwenden und erhalten eine Abbildung $\psi\colon s \to \tilde{F}$ mit $h \circ \psi = \varphi$.

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 & \\
0 \arrow[r] & s \arrow[r, "j"] & \tilde{F} \arrow[r, "h"] & s/E \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & & s \arrow[u, "\varphi"] \arrow[ul, dashed, "\psi"] & \\
 & & & E \arrow[u, "i"] & \\
 & & & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Wir definieren nun Abbildungen $f\colon E \to s \oplus s$, $g\colon s \oplus s \to \tilde{F}$ folgendermaßen:

$$f(x) = (y, ix) \quad \text{falls} \quad jy = \psi(ix),$$
$$g(y_1, y_2) = jy_1 - \psi y_2$$

f ist dabei auf ganz E wohldefiniert, denn $h(\psi(ix)) = \varphi(ix) = 0$. Also existiert $y \in s$ mit $jy = \psi(ix)$. Dieses y ist wegen der Injektivität von j wohlbestimmt.

Zu zeigen bleibt (da $s \oplus s \cong s$): die Sequenz

$$0 \to E \xrightarrow{f} s \oplus s \xrightarrow{g} \tilde{F} \to 0$$

ist exakt.

Klar ist, daß f injektiv ist, ferner daß $g \circ f = 0$, denn $(g \circ f)x = jy - \psi(ix) = \psi(ix) - \psi(ix) = 0$. Sei nun $g(y_1, y_2) = 0$, d.h. $jy_1 = \psi y_2$. Dann ist $0 = h(jy_1) = h(\psi y_2) = \varphi y_2$, d.h. es existiert $x \in E$ mit $y_2 = ix$. Wegen $jy_1 = \psi(ix)$ und $y_2 = ix$ ist demnach $(y_1, y_2) = f(x)$. Zuletzt die Surjektivität von g: Zu $v \in \tilde{F}$ existiert $y_2 \in s$, so daß $hv = -\varphi y_2$. Wir setzen $y = v + \psi y_2$ und erhalten $hy = hv + h \circ \psi(y_2) = hv + \varphi y_2 = 0$. Es existiert also $y_1 \in s$ mit $jy_1 = y$ und daher $v = jy_1 - \psi y_2 = g(y_1, y_2)$.

Anzumerken ist, daß bei der nach 1.5 existierenden exakten Sequenz die Abbildung $0 \to E \to s$ nicht mit der vorgegebenen Einbettung $E \hookrightarrow s$ übereinstimmen muß. Dies kann im allgemeinen nicht der Fall sein, wie die exakte Sequenz $0 \to s \to s \to \omega \to 0$ (s. [10]) zeigt, denn ω ist nicht isomorph einem Unterraum von s (da ω keine stetige Norm besitzt, s. auch [10]).

1.6. Lemma. *Ist E abgeschlossener Unterraum von s und besitzt E die Eigenschaft (Ω), so ist E isomorph einem projizierten Unterraum von s.*

Beweis. Nach 1.5 existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to E \to s \to \tilde{F} \to 0,$$

wo $\tilde{F} \subset s$. 1.4 mit $\varphi = \mathrm{id}_{\tilde{F}}$ ergibt die Behauptung.

Wiederum ist anzumerken, daß der abgeschlossene Unterraum E nicht notwendig projiziert in s liegt. Auch dies zeigt das Beispiel $0 \to s \to s \to \omega \to 0$, denn wäre in diesem Fall s als projizierter Unterraum in s eingebettet, so wäre ω projizierter Unterraum von s. Dies kann nicht sein.

1.7. Lemma. *Ist $0 \to F \to \tilde{E} \xrightarrow{\varphi} E \to 0$ eine exakte Sequenz von (F)-Räumen und besitzen F und E die Eigenschaft (Ω), so auch $\tilde{E}$.*

Beweis. Wir können annehmen, daß F abgeschlossener Unterraum von $\tilde{E}$ ist. Sei $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ eine Nullumgebungsbasis absolutkonvexer Mengen in $\tilde{E}$, $p \in N$. Da F die Eigenschaft (Ω) hat, existiert ein $Q \in N$, so daß es zu jedem $k \in N$ ein $m \in N$ und $C_1 > 0$ gibt, so daß

$$U_Q \cap F \subset C_1 r^m (U_k \cap F) + \frac{1}{r}(U_p \cap F)$$
$$\subset C_1 r^m U_k + \frac{1}{r} U_p.$$

Ist $n \in N$, so folgt hieraus, indem wir r durch r^{n+1} ersetzen und die entstehende Inklusion mit r^n multiplizieren:

$$r^n(U_Q \cap F) \subset C_1 r^{m(n+1)+n} U_k + \frac{1}{r} U_p.$$

Da weiter E die Eigenschaft (Ω) hat, existiert ein $q \in N$ sowie zu jedem $k \in N$ ein $n \in N$ und $C_2 > 0$, so daß

$$\varphi U_q \subset C_2 r^n \varphi U_k + \frac{1}{r} \varphi U_Q.$$

Bei vorgegebenem r und k existiert also zu $x \in U_q$ ein $a \in C_2 r^n U_k$, $b \in (1/r) U_Q$ und $y \in F$, so daß $x = a + b + y$ und damit

$$y = x - a - b \in \left(U_q + C_2 r^n U_k + \frac{1}{r} U_Q\right) \cap F.$$

Wir nehmen nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß $p \leqslant Q \leqslant q$ und erhalten für $k \geqslant q$, $r \geqslant 1$

$$y \in (C_2 + 2) r^n (U_Q \cap F),$$

d.h. im ganzen:

$$U_q \subset C_2 r^n U_k + \frac{1}{r} U_Q + (C_2+2) r^n (U_Q \cap F)$$
$$\subset C_3 r^{m(n+1)+n} U_k + \frac{1}{r} U_Q + (C_2+2)\frac{1}{r} U_p$$
$$\subset C_3 r^{\nu} U_k + \frac{C}{r} U_p.$$

Hieraus folgt leicht die Behauptung.

Wir können nun unser Hauptergebnis beweisen:

1.8. Satz. *Ein nuklearer (F)-Raum ist isomorph einem Quotientenraum von s genau dann, wenn er die Eigenschaft (Ω) hat.*

Beweis. Die eine Richtung des Beweises ist 1.2. Sei umgekehrt E ein nuklearer (F)-Raum mit Eigenschaft (Ω). Nach dem oben zitierten Ergebnis ([10], 1.6) existiert eine exakte Sequenz

$$0 \to s \to \tilde{E} \to E \to 0,$$

wo $\tilde{E}$ ein abgeschlossener Unterraum von s ist. Mit s und E besitzt nach 1.7 auch $\tilde{E}$ die Eigenschaft (Ω). Nach 1.6 ist somit $\tilde{E}$ isomorph einem projizierten Unterraum von s, d.h. insbesondere Quotient von s. Damit ist auch E Quotient von s.

Um zu einer vollständigen internen Charakterisierung derjenigen nuklearen (F)-Räume zu gelangen, die isomorph einem stetig projizierten Unterraum von s sind, verwenden wir 1.6 sowie die Ergebnisse aus [10]. Wir übernehmen dazu die folgende Definition.

1.9. Definition. Ein (F)-Raum E hat die Eigenschaft (DN), falls folgendes gilt: Es existiert eine stetige Halbnorm $\| \ \|$, so daß es zu jedem $k \in N$ ein $p \in N$ und $C > 0$ gibt mit

$$\| \ \|_k \leqslant r \| \ \| + \frac{C}{r} \| \ \|_{k+p} \quad \text{für alle } r > 0$$

$$(\text{bzw. } \| \ \|_k^2 \leqslant C \| \ \| \cdot \| \ \|_{k+p}).$$

In [10] wird gezeigt, daß ein nuklearer (F)-Raum genau dann isomorph einem Unterraum von s ist, wenn er die Eigenschaft (DN) hat.

1.10. Satz. *Ein nuklearer (F)-Raum ist isomorph einem stetig projizierten Unterraum von s genau dann, wenn er die Eigenschaften* (DN) *und* (Ω) *hat.*

Beweis. Ein stetig projizierter Unterraum von s ist Unterraum von s, besitzt daher die Eigenschaft (DN), und ist Quotientenraum von s, besitzt also nach 1.2 die Eigenschaft (Ω).

Besitzt umgekehrt ein nuklearer (F)-Raum E die Eigenschaften (DN) und (Ω), so ist er wegen (DN) isomorph einem Unterraum $F \subset s$. Dieser besitzt wieder die Eigenschaft (Ω), ist also nach 1.6 isomorph einem projizierten Unterraum von s.

2. Es sollen jetzt die Ergebnisse des ersten Abschnitts auf nukleare (F)-Räume mit Basis, bzw. auf Köthesche Folgenräume angewendet werden. Bevor wir dies tun, formulieren wir die Bedingung (Ω) in einer dafür geeigneten Weise. Sei dazu E ein (F)-Raum, $U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ eine Nullumgebungsbasis absolutkonvexer abgeschlossener Mengen, $\| \ \|_{-k}$ die Eichfunktion von U_k^0 in E', d.h. $\|y\|_{-k} = \sup\{|y(x)|;\ x \in U_k\}$.

2.1. Lemma. *E hat die Eigenschaft (Ω) genau dann, wenn folgendes gilt: Zu jedem $p \in \mathbf{N}$ existiert ein $q \in \mathbf{N}$, so daß es zu jedem $k \in \mathbf{N}$ ein $n \in \mathbf{N}$ und $C > 0$ gibt mit*

$$\|\ \|_{-q} \leqslant Cr^n \|\ \|_{-k} + \frac{1}{r}\|\ \|_{-p} \quad \textit{für alle } r > 0.$$

Beweis. Ist $U_q \subset Cr^n U_k + (1/r)\, U_p$, so läßt sich jedes $x \in U_q$ schreiben als $x = Cr^n a + (1/r) b$, $a \in U_k$, $b \in U_p$, und für $y \in E'$ gilt

$$|y(x)| \leqslant Cr^n \|y\|_{-k} + \frac{1}{r}\|y\|_{-p}.$$

Hieraus folgt die eine Richtung des Beweises.

Ist umgekehrt $\|\ \|_{-q} \leqslant Cr^n \|\ \|_{-k} + (1/r)\|\ \|_{-p}$, so ist

$$\left(\frac{1}{2Cr^n}\, U_k^0\right) \cap \left(\frac{r}{2}\, U_p^0\right) \subset U_q^0.$$

Die Behauptung folgt dann durch Polarisieren:

$$U_q \subset \overline{\Gamma(2Cr^n U_k \cup (2/r)\, U_p)} \subset 3Cr^n U_k + (2/r)\, U_p.$$

2.2. Korollar. *E hat die Eigenschaft (Ω) genau dann, wenn folgendes gilt: Zu jedem $p \in \mathbf{N}$ existiert ein $q \in \mathbf{N}$, so daß es zu jedem $k \in \mathbf{N}$ ein $n \in \mathbf{N}$ und $C > 0$ gibt mit*

$$\|y\|_{-q}^{n+1} \leqslant C \|y\|_{-k} \|y\|_{-p}^n \quad \textit{für alle } y \in E'.$$

Beweis. Ist einer der auftretenden Terme $+\infty$, so sind die Ungleichungen in 2.1 und 2.2 (unabhängig davon, wie die Konstanten gewählt sind) äquivalent. Sind alle Terme $< +\infty$, so folgt die Äquivalenz aus der Berechnung des Minimums der Funktion

$$f(r) = \alpha r^n + \beta \frac{1}{r}, \quad \alpha, \beta > 0 \quad \left(f_{\min}^{n+1} = c(n)\, \alpha \beta^n\right).$$

Sei im folgenden $A = (a_{j,k})$ eine unendliche Matrix, $0 \leqslant a_{j,k} \leqslant a_{j,k+1}$ für $j, k = 1, 2, \ldots$ und $\sup_k a_{j,k} > 0$ für alle j. Wir setzen

$$\lambda(A) = \left\{\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \colon \|\xi\|_k = \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|\, a_{j,k} < +\infty \text{ für alle } k\right\}$$

versehen mit den Halbnormen $\|\ \|_k$. $\lambda(A)$ ist (F)-Raum. In diesem Falle ist für $y \in \lambda'(A)$, $U_k = \{\xi \colon \|\xi\|_k \leqslant 1\}$

$$\|y\|_{-k} = \sup \frac{|y_j|}{a_{j,k}},$$

wo $y_j = y(e_j)$, e_j j-ter Einheitsvektor. Dabei soll $\dfrac{a}{0} = +\infty$ für $a > 0$, $\dfrac{0}{0} = 0$ sein.

Wir erhalten nun eine Charakterisierung derjenigen Matrizen A, für die $\lambda(A)$ die Eigenschaft (Ω) hat. Es folgt daraus, daß z.B. alle $\lambda(A)$ vom Typ (d_2) (s. [2], [1], [13]) die Eigenschaft (Ω) besitzen. (d_2) und (Ω) sind jedoch nicht äquivalent, wie das Beispiel eines Potenzreihenraumes vom Typ $+\infty$ zeigt.

2.3. Satz. *$\lambda(A)$ hat die Eigenschaft (Ω) genau dann, wenn folgendes gilt: Zu jedem $p \in \mathbf{N}$ existiert ein $q \in \mathbf{N}$, so daß es zu jedem $k \in \mathbf{N}$ ein $n \in \mathbf{N}$ und $C > 0$ gibt mit*

$$Ca_{j,q}^{n+1} \geqslant a_{j,k} a_{j,p}^n \quad \textit{für alle } j.$$

Beweis. Wir setzen die j-te Koordinatenabbildung $f_j\colon \xi \to \xi_j$ in die Ungleichung von 2.2 ein. Ist $a_{j,p} > 0$, $a_{j,k} > 0$, so sind alle Terme $< +\infty$. Wir erhalten

$$\left(\frac{1}{a_{j,q}}\right)^{n+1} \leqslant C \frac{1}{a_{j,k}} \left(\frac{1}{a_{j,p}}\right)^n \tag{1}$$

und damit die Behauptung. Im andern Falle ($a_{j,p} = 0$ oder $a_{j,k} = 0$) ist die Ungleichung in 2.3 klar.

Zur Umkehrung ist nur etwas zu beweisen, falls $y_j = 0$ für alle j mit $a_{j,k} = 0$ oder $a_{j,p} = 0$. In diesem Falle ist $a_{j,k}, a_{j,p}, a_{j,q} \neq 0$ für $y_j \neq 0$. Für diese j erhalten wir (1) und damit leicht die Ungleichung in 2.2.

Mit Hilfe von 2.3 können wir die folgende sehr anschauliche Beschreibung der Folgenräume mit Eigenschaft (Ω) geben. Diese besagt insbesondere, daß die Bedingung $(*)$ in [11] gerade die Eigenschaft (Ω) für den dortigen Folgenraum bedeutet. Die nuklearen Quotienten von Folgenräumen mit Bedingung $(*)$ sind wegen 1.8 also identisch mit den nuklearen (F)-Räumen mit Eigenschaft (Ω).

2.4. Satz. *$\lambda(A)$ hat die Eigenschaft (Ω) genau dann, wenn eine Matrix $B = (b_{j,k})$ existiert, so daß $\lambda(B) = \lambda(A)$ und $b_{j,k}^2 \geqslant b_{j,k-1} b_{j,k+1}$ für alle j und $k \geqslant 2$.*

Beweis. Existiert eine solche Matrix B, so hat wegen 2.3 der Raum $\lambda(B)$ und damit auch $\lambda(A)$ die Eigenschaft (Ω), denn setzen wir bei vorgegebenem p $q = p+1$, so erhalten wir für $k > p$ und $b_{j,p} > 0$

$$b_{j,p}\left(\frac{b_{j,q}}{b_{j,p}}\right)^{k-p} \geqslant b_{j,p} \prod_{i=p}^{k-1} \frac{b_{j,i+1}}{b_{j,i}} = b_{j,k}$$

und damit $b_{j,p}^{k-p} \geqslant b_{j,k} b_{j,p}^{k-p-1}$. Für $b_{j,p} = 0$ ist diese Ungleichung trivial.

Zum Beweis der Umkehrung können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß für jedes $p \in N$ gilt: Zu $k > p$ existiert ein $n \in N$ und $C > 0$, so daß

$$Ca_{j,p+1}^{n+1} \geqslant a_{j,k} a_{j,p}^{n}.$$

Wir wählen nun $n(k) \in N$, $C_k \geqslant 1$ so groß, daß

$$C_k a_{j,\nu+1}^{n(k)+1} \geqslant a_{j,k} a_{j,\nu}^{n(k)} \quad \text{für alle } \nu < k \text{ und } j.$$

Wir definieren die Matrix $(b_{j,k})$ induktiv über k und setzen dazu $b_{j,1} = a_{j,1}$, $b_{j,2} = a_{j,2}$. Für $k \geqslant 2$ sei

$$b_{j,k+1} = \begin{cases} \dfrac{b_{j,k}^2}{b_{j,k-1}} & \text{falls } b_{j,k}^2 < a_{j,k+1} b_{j,k-1}, \\ a_{j,k+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man beachte, daß im ersten Falle $b_{j,k-1} > 0$ ist. Nach Definition ist

$$b_{j,k}^2 \geqslant b_{j,k-1} b_{j,k+1} \quad \text{und} \quad b_{j,k} \leqslant a_{j,k} \quad \text{für alle } j \text{ und } k.$$

Sei ν die größte ganze Zahl mit $\nu \leqslant k+n(k)$ und $b_{j,\nu} = a_{j,\nu}$. Dann gilt $\nu \geqslant 2$, ferner ist $\nu = k+n(k)$ oder $b_{j,\nu-1} > 0$. Im ersten Falle ist $b_{j,k+n(k)} = a_{j,n+n(k)} \geqslant a_{j,k}$, im zweiten gilt

$$b_{j,k+n(k)} = b_{j,\nu} \left(\frac{b_{j,\nu}}{b_{j,\nu-1}}\right)^{k+n(k)-\nu} = a_{j,\nu} \left(\frac{a_{j,\nu}}{b_{j,\nu-1}}\right)^{k+n(k)-\nu} \geqslant a_{j,\nu} \left(\frac{a_{j,\nu}}{a_{j,\nu-1}}\right)^{k+n(k)-\nu}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus $b_{j,\nu-1} \leqslant a_{j,\nu-1}$. Dies bewirkt, daß auch $a_{j,\nu-1} > 0$.

Ist nun $\nu \geqslant k$, so ist $a_{j,\nu} \geqslant a_{j,k}$ und wir haben $b_{j,k+n(k)} \geqslant a_{j,k}$, ist $\nu < k$, so erhalten wir auf Grund der Wahl von $n(k)$ mit $C_k \geqslant 1$

$$b_{j,k+n(k)} \geqslant a_{j,\nu} \left(\frac{a_{j,\nu}}{a_{j,\nu-1}}\right)^{n(k)} \geqslant \frac{1}{C_k} a_{j,k}.$$

In jedem Falle ist $a_{j,k} \leqslant C_k b_{j,k+n(k)}$. Dies beweist $\lambda(B) = \lambda(A)$.

Eine wichtige Klasse von Folgenräumen, auf die sich unsere Kriterien leicht anwenden lassen, bilden die folgenden. Sei $b = (b_1, b_2, \ldots)$ eine Folge reeller Zahlen mit $b_j \geqslant 1$ und sei $s \in \boldsymbol{R} \cup \{+\infty\}$. Wir setzen $E_{b,s} = \lambda(A)$ mit $a_{j,k} = b_j^{\sigma_k}$, wo $\sigma_k \nearrow s$. Die Definition hängt offenbar nicht von der Folge σ_k ab,

$$E_{b,s} = \Big\{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| b_j^{\sigma} < +\infty \text{ für alle } \sigma < s\Big\}.$$

Ist die Folge b_j monoton wachsend, $\sup_j b_j = +\infty$, so sprechen wir von

einem Potenzreihenraum. Einen solchen Raum können wir auch schreiben in der Form

$$\Lambda_r(\alpha) = \Big\{(x_1, x_2, \ldots) : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \varrho^{\alpha_j} < +\infty \text{ für alle } 0 < \varrho < r\Big\},$$

wo $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots$, $\sup \alpha_j = +\infty$, eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen ist und $0 < r \leqslant +\infty$. Ist $r = +\infty$, so heißt $\Lambda_\infty(\alpha)$ Potenzreihenraum vom Typ $+\infty$, sonst vom Typ kleiner $+\infty$.

Aus dem Nuklearitätskriterium für Folgenräume (s. [9]) folgt leicht, daß ein nichtendlichdimensionaler nuklearer Raum vom Typ $E_{b,s}$ bis auf eine Permutation notwendig ein Potenzreihenraum ist.

2.5. Satz. *Jeder Raum vom Typ $E_{b,s}$ (und damit jeder Potenzreihenraum) hat die Eigenschaft* (Ω).

Beweis. Einfache Anwendung von 2.4, man wähle dazu $\sigma_k = k$, bzw. $\sigma_k = s - 1/k$.

Hieraus ergibt sich mit 1.8:

2.6. Satz. *Jeder nukleare Potenzreihenraum ist Quotient von s.*

Im folgenden sollen nun die Folgenräume beschrieben werden, die die Eigenschaften (DN) und (Ω) haben. Die nuklearen (F)-Räume mit diesen beiden Eigenschaften sind ja nach 1.10 gerade die projizierten Unterräume von s.

2.7. Satz. *$\lambda(A)$ hat die Eigenschaften* (DN) *und* (Ω) *genau dann, wenn eine Folge $b_j \geqslant 1$ existiert mit $\lambda(A) \cong E_{b,+\infty}$.*

Beweis. $E_{b,+\infty}$ hat nach 2.5 die Eigenschaft (Ω) und nach [10], 2.4 die Eigenschaft (DN).

Hat umgekehrt $\lambda(A)$ die Eigenschaften (DN) und (Ω), so existiert wegen (DN) (s. [10], 2.3., (2')) eine Folge $a_j \in \lambda'(A)$, $a_j > 0$, und zu jedem $k \in N$ ein $K \in N$, $C > 0$, so daß $a_{j,k}^2 \leqslant Ca_j a_{j,K}$ für alle j. Durch wiederholte Anwendung erhalten wir zu jedem $k \in N$, $n \in N$ ein $K \in N$ und $C > 0$ mit $a_{j,k}^{n+1} \leqslant Ca_j^n a_{j,k}$ für alle j. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_j = a_{j,p}$ für geeignetes p wählen.

Wegen (Ω) existiert zu diesem p ein $q \in N$ $q > p$, mit den in 2.3 genannten Eigenschaften. Wir setzen $b_j = a_{j,q} a_{j,p}^{-1}$, dann ist $b_j \geqslant 1$, und wir behaupten $\lambda(A) = E_{b,+\infty}$.

Einerseits existiert nämlich nach Wahl von q (s. 2.3) zu jedem $k \in N$ ein $C > 0$ und $n \in N$ mit

$$a_{j,k} \leqslant Ca_{j,q} \left(\frac{a_{j,q}}{a_{j,p}}\right)^n = Ca_{j,p} b_j^{n+1},$$

andererseits existiert zu jedem $n \in N$ ein $Q \in N$ und $C > 0$ mit

$$a_{j,p} b_j^n = \frac{a_{j,q}^{n+1}}{a_j^n} \leqslant Ca_{j,Q}.$$

Die Diagonaltransformation

$$(x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_1 a_1, x_2 a_2, \ldots)$$

stellt also einen Isomorphismus von $\lambda(A)$ auf $E_{b,+\infty}$ her.

Bemerkung. Wir haben sogar bewiesen, daß $\lambda(A)$ bis auf Diagonaltransformation vom Typ $E_{b,+\infty}$ ist.

2.8. Satz. *Ist $\lambda(A)$ nuklear, so sind äquivalent*:

(1) $\lambda(A)$ *hat die Eigenschaften* (DN) *und* (Ω).

(2) $\lambda(A)$ *ist isomorph einem projizierten Unterraum von s.*

(3) $\lambda(A)$ *ist isomorph einem Potenzreihenraum vom Typ $+\infty$.*

(4) $\lambda(A)$ *ist bis auf eine Permutation der Indizes und eine Diagonaltransformation ein Potenzreihenraum vom Typ $+\infty$.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus dem vorausgegangenen und 1.10. Er kann aber auch ohne Heranziehung von 1.10 gegeben werden. Denn: (1) $\Rightarrow$ (4) ist 2.7, (4) $\Rightarrow$ (3) ist klar, (3) $\Rightarrow$ (2) ist elementar beweisbar (s. [6]), (2) $\Rightarrow$ (1) ergibt sich aus den Vererblichkeitseigenschaften von (DN) und (Ω), sowie aus der Tatsache, daß s beide Eigenschaften besitzt.

Beachten wir, daß auf Grund des Basissatzes für nukleare (F)-Räume (s. [9]) die nuklearen (F)-Räume mit Basis mittels der Koordinatenabbildungen identisch sind mit den nuklearen $\lambda(A)$, so erhalten wir den folgenden Satz von Bessaga [1]:

2.9. Satz. *Für einen nuklearen (F)-Raum mit Basis sind äquivalent*:

(1) E *ist isomorph einem projizierten Unterraum von s.*

(2) E *ist isomorph einem Potenzreihenraum vom Typ $+\infty$.*

In diesem Falle wird eine Isomorphie bei beliebig gegebener Basis nach geeigneter Numerierung und Normierung durch die Koordinatenabbildungen hergestellt. Man beachte außerdem, daß der Potenzreihenraum wegen [7] eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung. Die aus 2.4 und 1.8 sich ergebende Charakterisierung der nuklearen (F)-Räume mit Basis (= nukleare $\lambda(A)$), die Quotient von s sind, stimmt im wesentlichen mit dem in [4] Thm 2.4 angekündigten, offenbar auf einem anderen Beweis beruhenden Ergebnis von Dubinsky und Robinson überein (1). Ähnliches gilt für 2.7 und seine Folgerungen, wobei in dem 2.7 entsprechenden Cor. 3.2 in [4] statt der Bedingungen (DN) und (Ω) die im Falle der Folgenräume äquivalenten konkreten Bedingungen auftreten. Ferner wird in [4] ein Gegenbeispiel zur Martineauschen Vermutung, d.h. ein nuklearer (F)-Raum, der nicht Quotient von s ist, angegeben. Das erste Gegenbeispiel dieser Art ist in [12] enthalten.

(1) Zusatz bei der Korrektur: Inzwischen erschienen in E. Dubinsky, W. Robinson, *Quotient spaces of (s) with basis*, Studia Math. 63 (1978), pp. 267–281.

3. Von Martineau wurde vermutet ([6], s. auch [9], S. 161): Jeder nukleare (F)-Raum ist Quotient von s. Diese Vermutung können wir jetzt leicht widerlegen (vgl. [12]). Die folgenden Gegenbeispiele beruhen dabei nur auf den elementaren Sätzen 1.3 und 2.3.

3.1. Beispiele. *Die Räume $\lambda(A)$ mit $a_{j,k} = e^{k^j}$, e^{j^k}, j^{j^k}, $\underbrace{\exp(\exp(\ldots j))}_{k-\text{mal}}$ sind nuklear und nicht Quotient von s.*

Beweis. Wir zeigen allgemeiner, daß jeder Raum $\lambda(A)$ mit $a_{j,k} \geqslant 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j,1}}{a_{j,2}} < +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{j\to+\infty} \frac{a_{j,k}^n}{a_{j,k+1}} = 0$$

für alle n und k nuklear und nicht Quotient von s ist.

Die Nuklearität folgt induktiv aus

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+1}} \leqslant C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_{j,k}} \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{j,k-1}}{a_{j,k}}$$

wo $k \geqslant 2$ und $C = \sup_j (a_{j,k}^2\, a_{j,k+1}^{-1})$.

Wäre $\lambda(A)$ Quotient von s, so gäbe es wegen 1.3 und 2.3 (zu $p = 1$) ein q, sowie n und $C > 0$ mit

$$C a_{j,q}^{n+1} \geqslant a_{j,q+1} a_{j,1}^n \geqslant a_{j,q+1} \quad \text{für alle } j.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung.

Der Nachweis der Voraussetzungen im Falle der oben genannten konkreten Räume ist dann einfach.

Es ist somit nicht jeder nukleare (F)-Raum Quotient von s. Es bleibt die Frage, ob es einen nuklearen (F)-Raum E_0 gibt, so daß jeder nukleare (F)-Raum Quotient von E_0 ist. Wir werden im folgenden die Widerlegung der Martineauschen Vermutung verschärfen und zeigen, daß es einen solchen Raum E_0 nicht gibt.

Zum Beweis verwenden wir eine Modifikation von Bedingung (Ω) (vgl. in Analogie [11]). Sei dazu φ eine strikt positive, monoton wachsende Funktion auf $(0, +\infty)$.

3.2. Definition. E hat die Eigenschaft (Ω_φ) wenn folgendes gilt: Zu jedem $p \in N$ existiert ein $q \in N$, so daß es zu jedem $k \in N$ ein $C > 0$ gibt mit

$$U_q \subset C\varphi(r)\, U_k + \frac{1}{r} U_p \quad \text{für alle } r > 0.$$

Entsprechend zu 1.2 gilt dann wieder

3.3. Lemma. *Hat E die Eigenschaft (Ω_φ), so auch jeder Quotient von E.*

Wollen wir dieses Lemma auf einen gegebenen Raum E_0 anwenden, so müssen wir diesem eine Bedingung (Ω_φ) zuschreiben können. Dies sichert das folgende Lemma.

3.4. Lemma. *Zu jedem (FS)-Raum E existiert ein φ, so daß E die Eigenschaft (Ω_φ) hat.*

Beweis. Nach Voraussetzung ((FS)-Raum) existiert zu jedem $p \in N$ ein $q = q(p) \in N$, $q > p$, so daß die kanonische Abbildung $E_q \to E_p$ präkompakt ist. E_q, E_p sollen die den Nullumgebungen U_q, U_p zugeordneten normierten Räume sein.

Zu jedem $n = 1, 2, \ldots$ existiert also eine endliche Menge $e_n \subset E$, so daß

$$U_q \subset e_n + \frac{1}{n} U_p.$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen: $e_n \subset e_{n+1}$. Für jedes $k \in N$ und $r > 0$ setzen wir

$$\varphi_{p,k}(r) = \sup\{\|x\|_k;\ x \in e_n\}$$

wo $n \in N$ und $n-1 < r \leqslant n$. $\varphi_{p,k}$ ist dann monoton wachsend und es gilt

$$U_{q(p)} \subset \varphi_{p,k}(r)\, U_k + \frac{1}{r} U_p \quad \text{für alle } r > 0.$$

Sei φ eine strikt positive, monoton wachsende Funktion auf $(0, +\infty)$, so daß für alle p und k die Funktion $\varphi_{p,k}/\varphi$ beschränkt ist, z.B.

$$\varphi(r) = 1 + \sum_{p+k \leqslant r} \varphi_{p,k}(r).$$

Wir erhalten:

$$U_{q(p)} \subset C_{p,k}\varphi(r)\, U_k + \frac{1}{r} U_p \quad \text{für alle } r > 0$$

mit

$$C_{p,k} = \sup_r \frac{\varphi_{p,k}(r)}{\varphi(r)}.$$

Dies beweist die Behauptung.

Da jeder nukleare (F)-Raum ein (FS)-Raum ist genügt also insbesondere jeder nukleare (F)-Raum einer Bedingung (Ω_φ). Das folgende Lemma ist die für unsere Zwecke benötigte Teilaussage des Analogons zu 2.3. Es wird dabei kein Wert auf größtmögliche Allgemeinheit gelegt.

3.5. Lemma. *Ist $\lambda(A)$ nuklear und besitzt die Eigenschaft (Ω_φ), ist ferner $a_{j,1} \geqslant 1$ für alle j, so existiert ein q, so daß es zu jedem k ein $C > 0$ gibt mit*

$$a_{j,k} \leqslant C\varphi(a_{j,q})\, a_{j,q}.$$

Beweis. Wegen (Ω_φ) existiert (zu $p = 1$) ein $q \in N$ und zu jedem $k \in N$ ein $C_k > 0$, so daß

$$U_q \subset C_k\varphi(r)\, U_k + \frac{1}{r} U_1 \quad \text{für alle } r > 0.$$

Wie im Beweis von 2.1 folgt hieraus (mit denselben Bezeichnungen):

$$\|\ \|_{-q} \leqslant C_k\varphi(r)\|\ \|_{-k} + \frac{1}{r}\|\ \|_{-1}.$$

Setzen wir hier wieder die Koordinatenabbildungen $f_j\colon \xi \mapsto \xi_j$ ein, so erhalten wir

$$a_{j,q}^{-1} \leqslant C_k\varphi(r)\, a_{j,k}^{-1} + \frac{1}{r}$$

oder mit $r = 2a_{j,q}$ nach Multiplikation mit $2a_{j,q}a_{j,k}$:

$$a_{j,k} \leqslant 2C_k\varphi(2a_{j,q})\, a_{j,q}.$$

Wegen der Nuklearität von $\lambda(A)$ existiert ein Q und j_0, so daß $a_{j,q}a_{j,Q}^{-1} \leqslant \frac{1}{2}$ für $j > j_0$. Also gilt

$$a_{j,k} \leqslant C_k\varphi(a_{j,Q})\, a_{j,Q} \quad \text{für alle } j > j_0$$

und damit mit einer modifizierten Konstante C_k auch für alle j.

3.6. Lemma. *Zu jedem φ existiert ein nuklearer (F)-Raum, der die Eigenschaft (Ω_φ) nicht hat.*

Beweis. Wir setzen $a_{j,1} = 1$ für alle j und wählen induktiv $a_{j,k+1} \geqslant a_{j,k}$ so, daß

$$\lim_j \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+1}}\varphi(a_{j,k}) = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{a_{j,k+1}} < +\infty.$$

$\lambda(A)$ ist dann nuklear und hat wegen 3.5 nicht die Eigenschaft (Ω_φ).

Die Lemmata 3.3, 3.4, 3.6 ergeben nun das angekündigte Resultat:

3.7. Satz. *Es existiert kein nuklearer (F)-Raum E_0 mit der Eigenschaft, daß jeder nukleare (F)-Raum Quotient von E_0 ist.*

Beweis. Angenommen, es gäbe ein solches E_0, so würde nach 3.4 ein φ existieren derart, daß E_0 die Eigenschaft (Ω_φ) hätte. Dann hätten nach 3.3 alle nuklearen (F)-Räume die Eigenschaft (Ω_φ). Dies widerspricht 3.6.

Bemerkung. Aus 3.7 folgt natürlich insbesondere, daß es keinen nuklearen (F)-Raum E_0 gibt, der alle nuklearen (F)-Räume als projizierte Unterräume zuläßt. Da im Beweis von 3.7 Köthesche Folgenräume als Gegenbeispiele verwendet wurden, gibt es also auch kein E_0, das alle nuklearen Kötheräume als Quotienten oder projizierte Unterräume zuläßt.

Damit sind die von Pełczyński in Studia Math. 38 (1970), S. 476 vorgeschlagenen Probleme 38, 39, 40 vollständig gelöst.

Wir haben ferner sogar bewisen, daß es keinen (FS)-Raum gibt, der sämtliche nuklearen (F)-Räume als Quotienten hat (zur Nichtexistenz eines universellen (FS)-Raumes bzgl. Unterräumen s. [8]). Da wir die Konstruktion von $\lambda(A)$ in 3.6 ohne Schwierigkeiten so gestalten können, daß $\lambda(A)$ s-nuklear (s. [6], [9]) oder auch $\Lambda(\alpha)$-nuklear in einem beliebigen Sinne (s. z.B. [3]) ist, folgt, daß auch kein (FS)-Raum (und damit kein nuklearer, s-nuklearer usw. Raum) existiert, der alle diese Räume zu Quotienten hat.

Literatur

[1] C. Bessaga, *Some remarks on Dragilev's theorem*, Studia Math. 31 (1968), pp. 307–318.

[2] M. M. Dragilev, *On regular bases in nuclear spaces*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 93 (1970), pp. 61–82 (Engl. Übersetzung von Mat. Sb. 68 (110) (1965), pp. 153–173).

[3] E. Dubinsky and M. S. Ramanujan, *On λ-nuclearity*, Mem. Amer. Math. Soc. 128 (1972).

[4] — and W. Robinson, *Köthe Spaces Which are Quotient Spaces of* (s), preprint (summary).

[5] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).

[6] A. Martineau, *Sur une propriété universelle de l'espace des distributions de M. Schwartz*, C. R. Acad. Sci. Paris 259 (1964), pp. 3162–3164.

[7] B. S. Mityagin, *Approximative dimension and bases in nuclear spaces*, Russian Math. Surveys 16 (1961), No. 4, pp. 59–127 (Engl. Übersetzung von Usp. Math. Nauk 16 (1961), No 4, pp. 63–132).

[8] A. Pełczyński, *On the approximation of S-spaces by finite dimensional spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 5 (1957), pp. 879–881.

[9] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1969.

[10] D. Vogt, *Charakterisierung der Unterräume von s*, Math. Z. 155 (1977), pp. 109–117.

[11] — *Tensorprodukte von (F)-mit (DF)-Räumen und ein Fortsetzungssatz*, wird erscheinen.

[12] M. J. Wagner, *Über zwei spezielle Klassen von Stufenräumen*, Diplomarbeit, Mainz 1975.

[13] V. P. Zahariuta, *On the isomorphism of cartesian products of locally convex spaces*, Studia Math. 46 (1973), pp. 201–221.

Received August 8, 1977 (1336)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVII. (1980)

Tempered nontangential boundedness

by

B. MARSHALL (Princeton, N. J.)

Abstract. We prove results on the growth and convergence properties of distributions and their derivatives, with the help of results from our earlier paper [3].

The object of this article is to show that with certain necessary modifications all the standard results on nontangential boundedness of harmonic functions are true when any mollifier is used, not just the Poisson kernel.

Let $u(x,t)$ be a harmonic function of the upper half space $\Omega^* = \{(x,t): x\in \boldsymbol{R}^n,\ t>0\}$. u is said to be *nontangentially bounded at a point* x_0 if there exist constants $A>0$, $\alpha>0$, $h>0$ such that

$$\sup_{\Gamma_\alpha^h(x_0)} |u(x,t)| < \infty$$

where $\Gamma_\alpha^h(x_0) = \{(x,t): |x-x_0| < \alpha t,\ 0<t<h\}$. It has been shown that if u is nontangentially bounded at almost every point of a set E, then it is nontangentially convergent at almost every point of that set. In addition, every harmonic conjugate of u is nontangentially bounded almost everywhere in E.

With this in mind we attempt to apply the notion of nontangential boundedness to the study of a distribution f at a point x_0. Let φ be a C^∞ function such that $\int\varphi(x)\,dx \neq 0$. Define $u(x,t) = f*\varphi_t(x)$. If φ is the Poisson kernel, then the results quoted above are statements about the good behavior of f on the set E. In view of the work of Fefferman and Stein on the real variable theory of H^p spaces [2], it is reasonable to expect that any mollifier could be used, not only the Poisson kernel.

It is therefore surprising to discover that this is not the case. We will see in Chapter II that there exist a tempered distribution $f\in\mathscr{S}'$ and Schwartz functions φ and Φ with mean value one such that $f*\varphi_t(x)$ is nontangentially bounded almost everywhere but $f*\Phi_t(x)$ is nontangentially bounded almost nowhere.

It is possible to strengthen the definition of nontangential boundedness in such a way that we can eliminate this dependence on the molli-