Contents of volume LXVI, number 3

STUDIA MATHEMATICA

The journal prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers submitted should be typed on one side only and they should be accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies, one of them being the typed, not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

ARS POLONA

Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland

ISBN 83-01-01347-8 ISSN 0039-3223

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Über c_0-Modultensorprodukte

von

GERHARD RACHER* (Newcastle upon Tyne)

Abstract. Some results on operator ideals of diagonal mappings between sequence spaces are established by tensor product methods. Examples for the continuity of pointwise multiplication in the algebras l^p are given.

Im Anschluss an [6] wird für Banachmoduln über einer Banachalgebra und eine beliebige crossnorm ein Modultensorprodukt definiert. Im Falle der Banachalgebra der Nullfolgen komplexer Zahlen, c_0, können wir einige seiner Eigenschaften herleiten und erhalten daraus bekannte Beschreibungen von Räumen von Diagonalabbildungen (2). Der dritte Abschnitt enthält einige Beispiele für die Stetigkeit der punktweisen Multiplikation (im Sinne von [9]) in den c_0-Moduln l^p. Im ersten Abschnitt haben wir die wichtigsten Definitionen und Bezeichnungen zusammengestellt.

Darf ich die Gelegenheit benützen, um mich bei den Mitgliedern der School of Mathematics der Universität Newcastle upon Tyne, insbesondere ihrem Vorstand, Herrn Prof. J. R. Ringrose, und Herrn Prof. B. E. Johnson für ihre Gastfreundschaft herzlichst zu bedanken.

1. Eine crossnorm α ist eine für alle Paare von Banachräumen E und F definierte Norm auf dem algebraischen Tensorprodukt $E\otimes F$ mit $\alpha(x\otimes y) = \|x\|\|y\|$ ($x\in E$, $y\in F$). Bezeichnet $E\overset{\alpha}{\otimes}F$ die Vervollständigung des normierten Raumes $(E\otimes F, \alpha)$ und sind $f\in L(E, E_1)$, $g\in L(F, F_1)$ (d.h. beschränkte lineare Abbildungen), dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f\otimes g$ von $E\overset{\alpha}{\otimes}F$ in $E_1\overset{\alpha}{\otimes}F_1$ mit $f\otimes g(x\otimes y) = f(x)\otimes g(y)$ für $x\in E$, $y\in F$. Gilt $\alpha(f\otimes g(z)) \leqslant \|f\|\|g\|\alpha(z)$ für $z\in E\otimes F$, dann heißt α uniform. Ist zusätzlich die zu α duale Norm, α', eine crossnorm, dann heißt α eine Tensornorm. Durch ${}^t\alpha(x\otimes y) = \alpha(y\otimes x)$ ist die zu α transponierte Norm definiert. [2], S. 8–9.

Sei α eine Tensornorm.

Mit $L^\alpha(E, F)$ wird die Menge der beschränkten linearen Abbildungen

* Finanziert durch ein Stipendium der Österr. Akademie der Wissenschaften.

$f\colon E \to F$ bezeichnet, für die die Zusammensetzung mit der kanonischen Einbettung $\iota_F\colon F \to F''$ eine stetige Linearform auf $E \overset{\alpha'}{\otimes} F'$ definiert: $\langle x \otimes y', \iota_F \circ f \rangle = \langle f(x), y' \rangle$ $(x \in E,\ y' \in F')$. $L^\alpha(E, F)$ ist mit der Norm $L^\alpha(f) = \|\iota_F \circ f\|(E \overset{\alpha'}{\otimes} F')'$ ein Banachraum. Er hat die folgende Eigenschaft (α uniform): Für $h \in L(E_1, E)$ und $g \in L(F, F_1)$ ist $g \circ f \circ h \in L^\alpha(E_1, F_1)$, und $L^\alpha(g \circ f \circ h) \leqslant \|g\| L^\alpha(f) \|h\|$ für jedes $f \in L^\alpha(E, F)$. S. [2], S. 12.

Eine lineare Abbildung $f\colon E \to F$ heißt α-nuklear, wenn sie im Bild der kanonischen Abbildung $\varphi_\alpha\colon E' \overset{\alpha}{\otimes} F \to L^\alpha(E, F)$, $\varphi_\alpha(x' \otimes y)(x) = \langle x, x' \rangle y$ $(x \in E,\ x' \in E',\ y \in F)$, enthalten ist. Mit der Quotientennorm ausgestattet wird dieser Raum mit $L_\alpha(E, F)$ bezeichnet. Besitzt E' oder F die Approximationseigenschaft, dann können $E' \overset{\alpha}{\otimes} F$ und $L_\alpha(E, F)$ identifiziert werden, sodaß $L_\alpha(E, F)' = L^{\alpha'}(E', F')$ gilt[(1)]. [2], S. 16.

Zum Beispiel wird für $1 \leqslant r < \infty$ durch

$$\nu_r(u) = \inf\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^r\Big)^{1/r} \sup_{y' \in OF'} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle y_i, y' \rangle|^{r'}\Big)^{1/p'} : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\Big\}$$

$$(1/r + 1/r' = 1)$$

eine Tensornorm definiert. Das Bild von $E' \overset{\nu_r}{\otimes} F$ stimmt mit $N_r(E, F)$, dem Raum der r-nuklearen Abbildungen von E in F, überein, während $(E \overset{\nu_{r'}}{\otimes} F)'$ aus den absolut r-summierenden Abbildungen, $A_r(E, F')$, besteht, d.h. aus jenen $f\colon E \to F'$, für welche

$$\varepsilon_r(f) = \inf\Big\{\varrho : \Big(\sum_{i=1}^{n} \|f x_i\|^r\Big)^{1/r} \leqslant \varrho \sup_{x' \in OE'} \Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, x' \rangle|^r\Big)^{1/r};\ x_1, \ldots, x_n \in E;\ n \geqslant 1\Big\} < \infty$$

besteht. M.a.W.: $(\nu_{r'})' = {}^t(\varepsilon_r)$, $A_r(E, F) = L^{t(\varepsilon_r)}(E, F)$ und, besitzen E' oder F die Approximationseigenschaft, $L_{\nu_r}(E, F) = N_r(E, F)$. Ähnlich kann man die r-integralen Abbildungen, $I_r(E, F)$, und, wenn E' oder F die metrische Approximationseigenschaft besitzen, die quasi r-nuklearen Abbildungen $N_r^Q(E, F)$ beschreiben: $I_r(E, F) = L^{\pi_r}(E, F)$ und $N_r^Q(E, F) = L_{\varepsilon_r}(E, F)$. S. [4] und [7].

Für $r = 1$ stimmt ν_r mit der üblichen projektiven Tensornorm π überein, für $r = \infty$ ergibt sich $\varepsilon_\infty = \varepsilon$, die injektive Norm. Insbesondere ist also $L^\pi(E, F) = I(E, F)$ und $L^\varepsilon(E, F) = L(E, F)$ und, für E' oder F mit der Approximationseigenschaft, $L_\pi(E, F) = N(E, F)$ und $L_\varepsilon(E, F)$

(1) Weil $\alpha = \alpha''$, genügt es zu zeigen, daß $f \in (E' \overset{\alpha}{\otimes} F)'$ genau dann, wenn $\iota_{F'} f \in (E' \overset{\alpha}{\otimes} F'')'$. Das folgt aus [2], Théorème 4, S. 13 bzw. den zwei zugehör. Korollaren. (Zum Beweis von Theorem 4 benützt man das Prinzip der lok. Reflexivität.)

$= K(E, F)$, der Raum der kompakten linearen Abbildungen von E in F. Ist zum Beispiel E oder F reflexiv und haben E' oder F die metrische Approximationseigenschaft, dann gilt $I(E, F) = N(E, F)$ nach einem Satz von Grothendieck. Übrigens ist, für jede Tensornorm α, $\varepsilon \leqslant \alpha \leqslant \pi$, und, für $p_1 \leqslant p_2$, $\varepsilon_{p_1} \geqslant \varepsilon_{p_2}$.

Wir benötigen auch den folgenden Satz von Gelbaum und Gil de Lamadrid. Sei α eine uniforme crossnorm. Ist (x_i, f_i) eine Basis im Banachraum E — f_i die zugehörigen Koordinatenfunktionale —, (y_j, g_j) eine Basis im Banachraum F, dann bildet die Folge $w_k = x_i \otimes y_j$ eine Basis in $E \overset{\alpha}{\otimes} F$ in der folgenden Aufzählung

$$w_1 = x_1 \otimes y_1, \quad w_2 = x_1 \otimes y_2, \quad w_5 = x_1 \otimes y_3$$

$$w_4 = x_2 \otimes y_1, \quad w_3 = x_2 \otimes y_2 \quad \ldots$$

$(f_i \otimes g_j)_{i,j}$ ist in der selben Aufzählung die Folge der zugehörigen (stetigen) Koordinatenfunktionale.

Mit c_0 bezeichnen wir die Menge der Nullfolgen komplexer Zahlen $a = (a^i)$. Unter den punktweisen Operationen und der Supremumnorm ist c_0 eine Banachalgebra: $\|(a^i b^i)\| \leqslant \|a\| \|b\|$ für $a = (a^i)$ und $b = (b^i)$. Ist e_i, $i \geqslant 1$, der i-te Einheitsvektor $(e_i e_j = \delta_{ij})$ und $u_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$, dann bildet $(u_n)_{n \geqslant 1}$ eine durch 1 beschränkte approximierende Einheit in c_0, weil für jedes $a \in c_0$ $\lim_{n \to \infty} \|a - u_n a\| = \lim_{n \to \infty} \sup_{i > n} |a^i| = 0$.

Die Menge aller beschränkten Folgen wird mit l^∞ bezeichnet. Unter einem c_0-Banachideal verstehen wir einen linearen Teilraum m von l^∞ mit den folgenden Eigenschaften: 1. $(m, \|\cdot\|_m)$ ist ein vollständiger normierter Raum. 2. $ax := (a^i x^i) \in m$ und $\|ax\|_m \leqslant \|a\| \|x\|_m$ für alle $a \in c_0$, $x \in m$. 3. $e_i \in m$ und $\|e_i\|_m = 1$ für alle $i \geqslant 1$. Gilt 4. $\lim_n \|x - u_n x\|_m = 0$ für alle $x \in m$, dann heißt m ein wesentliches c_0-Banachideal ([6], 3.4). Ist m wesentlich, dann besitzt m die metrische Approximationseigenschaft (die Multiplikation mit u_n ist eine n-dimensionale lineare Abbildung mit Norm 1 für alle $n \geqslant 1$) und besitzt $(e_i)_{i \geqslant 1}$ als Basis. Der Dualraum m' kann mit der Menge aller beschränkten Folgen $x' = (x'^i)$ identifiziert werden, für die $|\langle x, x' \rangle| = |\sum_i x^i x'^i| < \infty$, wannimmer $x \in m$.

Zum Beispiel ist, für $1 \leqslant p < \infty$, l^p, die Menge aller Folgen x mit $\|x\|_p = (\sum_i |x^i|^p)^{1/p} < \infty$, ein wesentliches c_0-Banachideal. (Jedes wesentliche c_0-Banachideal ist eine Segalalgebra in c_0 [5]. Aus 2. und 3. folgt $\|x\| \leqslant \|x\|_m$ für $x \in m$. 4. besagt, daß m dicht ist in c_0.) Sind m und n c_0-Banachideale, dann wird mit $H_{c_0}(m, n)$ die Menge der c_0-Morphismen bezeichnet, d.h. derjenigen beschränkten linearen Abbildungen $f\colon m\to n$, für die $f(ax) = a\bigl(f(x)\bigr)$ $(a\in c_0,\ x\in m)$. Ist $f\in H_{c_0}(m,n)$, dann gibt es ein $a\in l^\infty$ mit $f(x) = xa$ für $x\in m$ und $\|a\|\leqslant\|f\|$. Es ist nämlich $f(e_i) = e_i f(e_i) = e_i a^i$, woraus $\|a\|\leqslant\|f\|$ und $e_i f(x) = f(x^i e_i) = x^i f(e_i) = x^i a^i e_i$ für $i\geqslant 1$ und $x\in m$, d.h. $f(x) = ax$, folgt.

Zum Beispiel gilt für $p>q$ $H_{c_0}(l^p,l^q) = l^{pq/p-q}$ und daher $K_{c_0}(l^p,l^q) = l^{pq/p-q}$, für $p\leqslant q$ $H_{c_0}(l^p,l^q) = l^\infty$ und $K_{c_0}(l^p,l^q) = c_0$.

Schließlich verallgemeinern wir die Definition des Modultensorproduktes von [6], 2.2 und 2.3.

Definition. Sei A eine Banachalgebra und α eine crossnorm. Für einen A-Rechtsbanachmodul V und einen A-Linksbanachmodul W sei $V\overset{\alpha}{\underset{A}{\otimes}}W$ der Quotientenraum von $V\overset{\alpha}{\otimes}W$ nach dem abgeschlossenen linearen Teilraum $K_{V,W;\alpha}$, der von den Tensoren $xa\otimes y - x\otimes ay$, $x\in V$, $a\in A$, $y\in W$, erzeugt wird, $p_{V,W;\alpha}$ die kanonische Projektion von $V\overset{\alpha}{\otimes}W$ auf $V\overset{\alpha}{\underset{A}{\otimes}}W$. $V\overset{\alpha}{\underset{A}{\otimes}}W$ heißt das $(\alpha-A)$-Modultensorprodukt von V und W.

Ist α eine uniforme crossnorm, V oder W ein A-Bimodul, dann kann der Banachraum $V\overset{\alpha}{\underset{A}{\otimes}}W$ zu einem A-Rechts- oder A-Linksbanachmodul gemacht werden.

Für $A = c_0$ konnten wir die folgenden Ergebnisse herleiten.

2. Proposition (vgl. Lemma in [3]). *Sind m und n wesentliche c_0-Banachideale, α eine uniforme crossnorm, dann gibt es eine Projektion, D_α, mit Norm 1 von $m\overset{\alpha}{\otimes}n$ auf $[e_i\overset{\alpha}{\otimes}e_i]_{i\geqslant 1}$, die abgeschlossene lineare Hülle der Tensoren $e_i\otimes e_i$, $i\geqslant 1$.*

Beweis. Sei $z = \sum_{i,j} z^{ij} e_i\otimes e_j \in m\overset{\alpha}{\otimes}n$ und $\varepsilon>0$ gegeben. Es gibt ein $N(\varepsilon)$, mit dem

$$\alpha\Bigl(z - \sum_{i,j=1}^{k} z^{ij} e_i\otimes e_j\Bigr) < \varepsilon \quad\text{und}\quad \alpha\Bigl(\sum_{i,j}^{k} z^{ij} e_i\otimes e_j - \sum_{i,j}^{l} z^{ij} e_i\otimes e_j\Bigr) < 2\varepsilon$$
$$\text{für alle } k,\ l\geqslant N(\varepsilon).$$

Bezeichnet für eine natürliche Zahl k $G(k)$ die Charaktergruppe der additiven Restklassengruppe $\boldsymbol{Z}(k)$, für $\chi\in G(k)$ d_χ die auf m bzw. n durch $d_\chi(x) = x\chi = \bigl(x^i\chi(i)\bigr)_{i\geqslant 1}$ definierte lineare Kontraktion, dann gilt aufgrund der Orthogonalitätsrelation (s. Lemma in 3): $\sum_{i=1}^{k} z^{ii} e_i\otimes e_i = \frac{1}{k}\sum_{\chi\in G(k)}\sum_{i,j=1}^{k}\chi(i)[z^{ij}e_i\otimes e_j]\chi^{-1}(j) = \frac{1}{k}\sum_{\chi\in G(k)} d_\chi\otimes d_{\chi^{-1}}\Bigl(\sum_{i,j=1}^{k} z^{ij} e_i\otimes e_j\Bigr)$, woraus

$\alpha\bigl(\sum_{i=1}^{k} z^{ii} e_i\otimes e_i\bigr) \leqslant \alpha\bigl(\sum_{i,j=1}^{k} z^{ij} e_i\otimes e_j\bigr) < \alpha(z)+\varepsilon$ für $k\geqslant N(\varepsilon)$ folgt. Für $k>l$ erhält man genauso

$$\alpha\Bigl(\sum_{i=l+1}^{k} z^{ii} e_i\otimes e_i\Bigr) \leqslant \alpha\Bigl(\sum_{i,j=1}^{k} z^{ij} e_i\otimes e_j - \sum_{i,j=1}^{l} z^{ij} e_i\otimes e_j\Bigr),$$

was für $l\geqslant N(\varepsilon)$ kleiner als 2ε ist. D.h. $\sum_{i=1}^{\infty} z^{ii} e_i\otimes e_i \in [e_i\overset{\alpha}{\otimes}e_i]_{i\geqslant 1}$ als Grenzwert der Cauchyfolge $\bigl(\sum_{i=1}^{n} z^{ii} e_i\otimes e_i\bigr)_{n\geqslant 1}$, und $\alpha\bigl(\sum_{i=1}^{\infty} z^{ii} e_i\otimes e_i\bigr)\leqslant\alpha(z)$. Sei $\sum_{i=1}^{\infty} z^{ii} e_i\otimes e_i = D_\alpha(z)$. Dann gilt weiter

Proposition. *Der Kern von D_α stimmt mit K_α überein.*

Beweis. Seien $x\in m$, $a\in c_0$, $y\in n$. Dann ist $xa\otimes y = \sum_{i,j=1}^{\infty} x^i a^i y^j e_i\otimes e_j$ und $x\otimes ay = \sum_{i,j=1}^{\infty} x^i a^j y^j e_i\otimes e_j$ die Darstellung in $m\overset{\alpha}{\otimes}n$, sodaß $D_\alpha(xa\otimes y) = D_\alpha(x\otimes ay)$. Weil D_α stetig und linear ist, folgt $K_\alpha\subseteq \operatorname{Ker} D_\alpha$.

Angenommen, $K_\alpha \subsetneqq \operatorname{Ker} D_\alpha$. Dann gäbe es ein $z = \sum_{i,j} z^{ij} e_i\otimes e_j$ in $m\overset{\alpha}{\otimes}n$ mit $z\notin K_\alpha$ und $D_\alpha(z) = 0$. Nach dem Satz von Hahn–Banach gibt es ein stetiges lineares Funktional $f\in(m\overset{\alpha}{\otimes}n)'$ mit $f(z)\neq 0$, aber $f|K_\alpha = 0$. Wird f durch die Gleichung $\langle x\otimes y, f\rangle = \langle y, F(x)\rangle$, $x\in m$, $y\in n$, die beschränkte $(\alpha\leqslant\pi)$ lineare Abbildung F von m in n' zugeordnet, so ist für alle $x\in m$, $a\in c_0$, $y\in n$,

$$\langle y, F(xa)\rangle = \langle xa\otimes y, f\rangle = \langle x\otimes ay, f\rangle = \langle ay, F(x)\rangle = \langle y, \bigl(F(x)a\bigr)\rangle,$$

d.h. F ist ein c_0-(Rechts) Morphismus. Daraus folgt

$$f(z) = f\Bigl(\sum_{i,j} z^{ij} e_i\otimes e_j\Bigr) = \sum_{i,j} z^{ij}\langle e_j, F(e_i)\rangle = \sum_{i,j} z^{ij}\langle e_j, F(e_i e_i)\rangle$$
$$= \sum_{i,j} z^{ij}\langle e_i e_j, F(e_i)\rangle = f\Bigl(\sum_{i} z^{ii} e_i\otimes e_i\Bigr) = f(D_\alpha z) = 0,$$

ein Widerspruch. Also stimmt der Kern von D_α mit $K_\alpha = K_{m,n;\alpha}$ überein.

Zusammengefaßt ergibt sich der

Satz. *Sind m und n wesentliche c_0-Banachideale, α eine uniforme crossnorm, dann ist $m\overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}}n$ isometrisch isomorph zum abgeschlossenen linearen Teilraum $[e_i\overset{\alpha}{\otimes}e_i]_i$ von $m\overset{\alpha}{\otimes}n$.*

Der Isomorphismus $i_\alpha\colon m\overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}}n\to[e_i\overset{\alpha}{\otimes}e_i]_i$ ist gegeben als die lineare

Abbildung, für welche $i_\alpha p_\alpha = D_\alpha$ und $p_\alpha = i_\alpha^{-1} D_\alpha$. Ist j_α die kanonische Einbettung von $[e_i \overset{\alpha}{\otimes} e_i]$ in $m \overset{\alpha}{\otimes} n$, dann ist $\mathrm{Id}([e_i \overset{\alpha}{\otimes} e_i]) = D_\alpha j_\alpha = i_\alpha p_\alpha j_\alpha$, woraus $p_\alpha j_\alpha i_\alpha = \mathrm{Id}(m \overset{\alpha}{\underset{\tau_0}{\otimes}} n)$ und $\mathrm{Id}\big((m \overset{\alpha}{\underset{\tau_0}{\otimes}} n)'\big) = (j_\alpha i_\alpha)' p_\alpha'$.

Korollar 1. *α eine uniforme crossnorm. l ein c_0-Banachideal, m und n wesentlich. Dann ist* $\mathrm{Id}(l) \overset{\alpha}{\otimes} p_{m,n}\colon l \overset{\alpha}{\otimes} (m \overset{\alpha}{\otimes} n) \to l \overset{\alpha}{\otimes} (m \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n)$ *eine Quotientenabbildung.*

Sind l und m wesentliche c_0-Banachideale, n beliebig, dann ist $p_{l,m} \overset{\alpha}{\otimes} \mathrm{Id}(n)\colon (l \overset{\alpha}{\otimes} m) \overset{\alpha}{\otimes} n \to (l \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} m) \overset{\alpha}{\otimes} n$ eine Quotientenabbildung.

Beweis der zweiten Behauptung: $p_{l,m} \overset{\alpha}{\otimes} \mathrm{Id}(n)$ ist genau dann eine Quotientenabbildung, wenn ihre duale $\big(p_{l,m} \overset{\alpha}{\otimes} \mathrm{Id}(n)\big)'\colon L^{\alpha'}(l \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} m, n') \to L^{\alpha'}(l \overset{\alpha}{\otimes} m, n')$, gegeben durch $f \to f p_{l,m}$, eine Isometrie ist: $L^{\alpha'}(f) = L^{\alpha'}\big(f \mathrm{Id}(m \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n)\big) \leqslant L^{\alpha'}(f p_{l,m}) \|j_\alpha i_\alpha\| \leqslant L^{\alpha'}(f p_{l,m}) \leqslant L^{\alpha'}(f) \|p_{l,m}\| \leqslant L^{\alpha'}(f)$ für jedes $f \in L^{\alpha'}(l \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} m, n')$.

Korollar 2 (Assoziativgesetz). *Sind l, m und n wesentliche c_0-Banachmoduln, α eine assoziative uniforme crossnorm, dann gilt* $l \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} (m \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n) = (l \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} m) \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n$ *isometrisch isomorph.*

Beweisskizze. Wir schreiben l als Rechts-, m als Bi- und n als Linksmodul, sodaß die beiden Ausdrücke definiert sind. Im Diagramm bedeutet λ den kanonischen Isomorphismus $\lambda\big(z \otimes (x \otimes y)\big) = (z \otimes x) \otimes y$, $z \in l$, $x \in m$, $y \in n$.

$$
\begin{tikzcd}
l \overset{\alpha}{\otimes} (m \overset{\alpha}{\otimes} n) \arrow[r, "\mathrm{Id}(l) \overset{\alpha}{\otimes} p_{m,n}"'] \arrow[d, shift right, "\lambda"'] & l \overset{\alpha}{\otimes} (m \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n) \arrow[r, "p_{l,\, m \overset{\alpha}{\underset{\tau_0}{\otimes}} n}"'] & l \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} (m \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n) \arrow[d, shift right, "\lambda_A"'] \\
(l \overset{\alpha}{\otimes} m) \overset{\alpha}{\otimes} n \arrow[r, "p_{l,m} \overset{\alpha}{\otimes} \mathrm{Id}(n)"] \arrow[u, shift right, "\lambda^{-1}"'] & (l \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} m) \overset{\alpha}{\otimes} n \arrow[r, "p_{l \overset{\alpha}{\otimes} m,\, n}^{\tau_0}"] & (l \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} m) \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n \arrow[u, shift right, "\lambda_A^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

Weil die Zusammensetzung der beiden waagrechten Abbildungen oben eine Quotientenabbildung ist und ihr Kern im Kern der Zusammensetzung der übrigen Pfeile enthalten ist, gibt es eine lineare Kontraktion λ_A, welche das Diagramm kommutativ ergänzt. Ebenso ergibt sich die Existenz einer dazu inversen linearen Kontraktion λ_A^{-1}.

Ist $_A^{*}\alpha = {}^t\alpha$, dann gilt für beliebige A-Banachmoduln ein Kommutativgesetz für das $(\alpha - A)$-Modultensorprodukt.

Korollar 3. *Sind m und n wesentliche c_0-Banachideale, dann ist die kanonische Abbildung* $\varphi_{c_0}\colon m \overset{\pi}{\underset{c_0}{\otimes}} n \to m \overset{\varepsilon}{\underset{c_0}{\otimes}} n$ *injektiv. Ebenso gibt es injektive kanonische Abbildungen von* $m \overset{\pi}{\underset{c_0}{\otimes}} n \to m \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n$ *und* $m \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n \to m \overset{\varepsilon}{\underset{c_0}{\otimes}} n$.

Beweis der ersten Behauptung. Die identische Abbildung von $(m \otimes n, \pi)$ in $m \overset{\varepsilon}{\otimes} n$ läßt sich zu einer linearen Kontraktion φ von $m \overset{\pi}{\otimes} n$ in $m \overset{\varepsilon}{\otimes} n$ fortsetzen ($\varepsilon \leqslant \pi$). φ_{c_0} ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung von $m \overset{\pi}{\underset{c_0}{\otimes}} n$ in $m \overset{\varepsilon}{\underset{c_0}{\otimes}} n$ mit $\varphi_{c_0} p_\pi = p_\varepsilon \varphi$ und $\|\varphi_{c_0}\| = \|p_\varepsilon \varphi\| \leqslant 1$. Da m oder n die Approximationseigenschaft besitzt, ist nach einem Satz von Grothendieck φ injektiv, daher auch $\varphi_1 = \varphi \,|\, [e_i \overset{\pi}{\otimes} e_i]$. Sind D_ε und D_π die jeweiligen Projektionen, dann ist $D_\varepsilon \varphi = \varphi_1 \circ D_\pi$, und, sind i_ε und i_π die zugehörigen Isomorphismen, $\varphi_1 i_\pi(\hat{z}) = \varphi_1\big(D_\pi(z)\big) = D_\varepsilon \varphi(z) = i_\varepsilon p_\varepsilon\big(\varphi(z)\big) = i_\varepsilon \varphi_{c_0}(\hat{z})$ für $\hat{z} = p_\pi(z) \in m \overset{\pi}{\underset{c_0}{\otimes}} n$, d.h. $\varphi_1 i_\pi = i_\varepsilon \varphi_{c_0}$, woraus die Injektivität von φ_{c_0} folgt.

Korollar 3-dual. *Sind m und n wesentliche c_0-Banachideale, dann hat die Einbettung φ_{c_0}' von $I^{c_0}(m, n')$ in $H^{c_0}(m, n')$* $\sigma\big(H^{c_0}(m, n'), m \overset{\pi}{\underset{c_0}{\otimes}} n\big)$ — *dichtes Bild.* ($I^{c_0}(\ ,\ )$ steht für die c_0-(Rechts) morphismen in $I(\ ,\ )$.)

Seien jetzt m und n wesentliche c_0-Banachideale, sodaß m' wesentlich ist (zum Beispiel m reflexiv). Da m' oder n die Approximationseigenschaft besitzt, kann man $m' \overset{\alpha}{\otimes} n$ mit dem Raum der α-nuklearen linearen Abbildungen $L_\alpha(m, n)$ via die kanonische Abbildung φ_α identifizieren. Wir behaupten: Den Elementen von $[e_i \overset{\alpha}{\otimes} e_i]$ entspricht dabei die Menge $L_{\alpha, c_0}(m, n)$ der α-nuklearen c_0-Morphismen. Ist nämlich $z \in [e_i \overset{\alpha}{\otimes} e_i]$, dann gibt es eine Folge (z^i), sodaß $z = \sum_i z^i e_i \otimes e_i$ in $m' \overset{\alpha}{\otimes} n$ und $\varphi_\alpha(z)(x) = \sum_i z^i \langle x, e_i \rangle e_i$ für jedes $x \in m$, d.h. $\varphi_\alpha(z)(x) = (x^i z^i)$. Ist, ungekehrt, $f \in L_{\alpha, c_0}(m, n)$, dann gibt es ein $a \in l^\infty$ mit $f(x) = xa$ für $x \in m$ und andererseits ein Element $z = \sum_{i,j} z^{ij} e_i \otimes e_j$ in $m' \overset{\alpha}{\otimes} n$ mit $\varphi_\alpha(z)(x) = \sum_{i,j} z^{ij} x^i e_j$ für $x \in m$ (die Reihe konvergiert in n, weil $\iota_m(x) \overset{\alpha}{\otimes} \mathrm{Id}(n)\colon m' \overset{\alpha}{\otimes} n \to n$ stetig ist). Für $x = e_k$, $k \geqslant 1$, ergibt sich $\sum_{i,j} z^{ij} e_k^i e_j = \sum_j z^{kj} e_j = a^k e_k$, woraus $z^{kj} = a^k \delta_{kj}$, d.h. $z = \sum_i z^{ii} e_i \otimes e_i$ ist in $[e_i \overset{\alpha}{\otimes} e_i]$.

Daraus folgt

Korollar 4. *Sei α eine Tensornorm. Sind m und n wesentliche c_0-*

Banachideale mit m' wesentlich, dann gibt es einen isometrischen Isomorphismus zwischen dem $(\alpha-c_0)$-Modultensorprodukt und den α-nuklearen c_0-Morphismen: $m' \overset{\alpha}{\underset{c_0}{\otimes}} n = L_{\alpha,c_0}(m, n)$.

BEISPIEL. m, m', n wie oben, $1 \leqslant r < \infty$,

$$m' \overset{\nu_r}{\underset{c_0}{\otimes}} n = L_{\nu_r,c_0}(m, n) = N_{r,c_0}(m, n) \quad \text{und} \quad m' \overset{\pi}{\underset{c_0}{\otimes}} n = N_{c_0}(m, n),$$

$$m' \overset{\varepsilon_r}{\underset{c_0}{\otimes}} n = L_{\varepsilon_r,c_0}(m, n) = N^Q_{r,c_0}(m, n) \quad \text{und} \quad m' \overset{\varepsilon}{\underset{c_0}{\otimes}} n = K_{c_0}(m, n).$$

KOROLLAR 5. *Sei α eine Tensornorm. Sind m und n wesentliche c_0-Banachideale mit m' wesentlich, dann gilt $L_{\alpha,c_0}(m, n)' = L^{\alpha',c_0}(m', n')$ isometrisch isomorph.*

BEISPIEL. m, m', n wie oben, $1 \leqslant r < \infty$, $1/r+1/r' = 1$,

$$N^Q_{r,c_0}(m, n)' = I^{c_0}_{r'}(m', n') \quad \text{und} \quad K_{c_0}(m, n)' = I^{c_0}(m', n'),$$

$$N_{r,c_0}(m, n)' = A^{c_0}_{r'}(m', n') \quad \text{und} \quad N_{c_0}(m, n)' = H^{c_0}(m', n').$$

Vergleiche damit Theorem 8 und 7 in [1].

KOROLLAR 6 [3]. *Sind m, m' und n wesentliche c_0-Banchideale, m oder n reflexiv, dann gilt $K_{c_0}(m, n)' = N^{c_0}(m', n')$. Sind m und n reflexive, wesentliche c_0-Banachideale, dann gilt $K_{c_0}(m, n)'' = H_{c_0}(m, n)$.*

[8] *Es ist $N^{c_0}(l^p, l^q) = l^{pq/pq-q+p}$ für $1 < p < q < \infty$ und $N^{c_0}(l^p, l^q) = l^1$ für $\infty > p \geqslant q \geqslant 1$* (²).

Sind m, m' und n wesentliche c_0-Banachideale, m kontraktiv enthalten in n, dann gilt $K_{c_0}(m, n) = c_0$ und, wenn m oder n reflexiv, $N^{c_0}(m', n') = l^1$.

Wir brauchen nur die vorletzte Behauptung zu beweisen: m ein wesentliches, n ein beliebiges Banachideal, m' oder n wesentlich, $m \subseteq n$ kontraktiv. Dann gilt $K_{c_0}(m, n) = c_0$.

Beweis (s. [1], Theorem 5). Für $a \in c_0$ ist d_a: $m \to n$ Grenzwert der endlichdimensionalen c_0-Morphismen $d_{u_n a}$ in der Supremumnorm, d.h. d_a kompakt, und $\|d_a\| \leqslant \|a\|$.

Sei f von m in n ein kompakter c_0-Morphismus und $\varepsilon > 0$ gegeben. Es gibt ein $a \in l^\infty$ mit $\|a\| \leqslant \|f\|$ und $f = d_a$ und eine endlichdimensionale lineare Abbildung h von m in n mit $\|h-f\| < \varepsilon$. Dazu kann man $a_1, \ldots$ $\ldots, a_n \in m'$ und $y_1, \ldots, y_n \in n$ finden mit $h = \sum_{i=1}^n a_i \otimes y_i$. Sei, zum Beispiel, n wesentlich und $N(\varepsilon)$ so gewählt, daß $\sup_{1\leqslant i \leqslant n} \|y_i - u_N y_i\| < \varepsilon$ für $N \geqslant N(\varepsilon)$. Sei $N \geqslant N(\varepsilon)$ fest und $h_N = \sum_{i=1}^n a_i \otimes u_N y_i$. Dann ist $\|h_N - f\| < \varepsilon\left(1 + \sum_{i=1}^n \|a_i\|_{m'}\right)$ $= \varepsilon'$. In der Matrixdarstellung bezüglich der Basis (e_i) in m sind alle Zeilen ab der $(N+1)$-ten null, sodaß die Diagonalmatrix von

$$h_N = d_c = \frac{1}{2^N} \sum_{g \in G_N} d_g h_N d_g,$$

wo G_N die Menge aller N-tupel von $\pm$ Einsen bezeichnet. Daraus folgt

$$\|c-a\| \leqslant \|d_c - d_a\| = \frac{1}{2^N} \Big\| \sum_{g \in G_N} d_g (h_N - d_a) d_g \Big\| \leqslant \|h_N - d_a\| < \varepsilon'.$$

D.h. a ist im Abschluß der endlichen Folgen in der Supremumnorm enthalten, oder $a \in c_0$.

Versteht man unter einem vollständigen Operatorideal (Pietsch) (A, α) einen für jedes Paar von Banchräumen (X, Y) definierten, in der Norm α vollständigen, linearen Raum von beschränkten linearen Abbildungen, $A(X, Y)$, welcher alle Abbildungen der Gestalt $x' \otimes y$, $x' \in X'$, $y \in Y$, enthält, mit $\alpha(x' \otimes y) = \|x'\|\|y\|$, sodaß für alle Banachräume X_1, Y_1 und $S \in L(X_1, X)$, $f \in A(X, Y)$, $T \in L(Y, Y_1)$, $TfS \in A(X_1, Y_1)$ und $\alpha(TfS) \leqslant \|T\|\alpha(f)\|S\|$ gilt — und führt man den obigen Beweis einen Schritt weiter, dann erhält man

PROPOSITION ([1], Theorem 5). *Sei m ein wesentliches und n ein beliebiges c_0-Banachideal, (A, α) ein vollständiges Operatorideal, in dem die endlichdimensionalen linearen Abbildungen dicht sind (also eine "Segalalgebra" in $K(\cdot, \cdot)$). Sind m' oder n wesentlich, dann ist $A_{c_0}(m, n)$ ein wesentliches c_0-Banachideal.*

Die entsprechende Aussage für α-Modultensorprodukte lautet allgemein: Sei A eine Banachalgebra mit einer beschränkten approximierenden Einheit, α eine uniforme crossnorm, V ein A-Rechts- und W eine A-Linksbanachmodul. Ist V ein wesentlicher A-Linksmodul, sodaß V ein A-Bimodul ist, dann ist $V \overset{\alpha}{\underset{A}{\otimes}} W$ ein wesentlicher A-Linksmodul. Der Beweis verläuft wie der von 3.9 Theorem in [6].

3. In leichter Verallgemeinerung der Definition 0.1 in [9] haben wir

DEFINITION (³). Sei α eine Tensornorm. (a) Eine Banachalgebra A heißt eine α-Algebra, wenn ihre Multiplikation von $(A \otimes A, \alpha)$ in A stetig ist. (b) Sei A eine Banachalgebra. Ein A-Banachmodul V heißt ein $(\alpha$-$A)$-Modul, wenn die Wirkung von $(A \otimes V, \alpha)$ in V stetig ist.

Für $\alpha = \varepsilon$ erhält man in (a) die Definition der injektiven Algebra in [9]. Unter der punktweisen Multiplikation sind l^1 (s. [9] und unten) und l^∞ (daher auch c_0) ε $(= \varepsilon_\infty)$-Algebren. Es gilt jedoch

(²) Vgl. W. H. Ruckle, Studia Math. 38 (1970), S. 43–49. Tabelle auf S. 48 und 3.3.

(³) Diese Definition wurde auch von A. M. Tonge in Proc. Cambridge Phil. Soc. 80 (1976), S. 465–473, gegeben.

Proposition 1. a. *Für kein* $1 < p < \infty$ *ist* l^p *eine* ε-*Algebra.*

b. *Für* $1 < p \leqslant 2$ *ist* l^p *eine* ε_r-*Algebra für jedes* $1 \leqslant r < \infty$.

c. *Für* $2 < p < \infty$ *ist* l^p *eine* ε_p-*Algebra, aber für kein* $\delta > 0$ *eine* $\varepsilon_{p+\delta}$-*Algebra.*

Beweis. Die zur punktweisen Multiplikation $m\colon l^p \overset{\pi}{\otimes} l^p \to l^p$, $m(x \otimes y) = xy$, duale Abbildung $m'\colon l^{p'} \to (l^p \overset{\pi}{\otimes} l^p)' = L(l^p, l^{p'})$ führt $a \in l^{p'}$ über in $m'a\colon l^p \to l^{p'}$, $m'a(x) = xa$ für $x \in l^p$. D.h. $m'\colon l^{p'} \to H_{c_0}(l^p, l^{p'})$. (Wir unterscheiden nicht mehr zwischen c_0-Rechts- und Linksmorphismen.)

a. Wäre l^p eine ε-Algebra, dann besäße m eine stetige Fortsetzung von $l^p \overset{\varepsilon}{\otimes} l^p$ in l^p, sodaß m' von $l^{p'}$ in $I_{c_0}(l^p, l^{p'})$ führte. Für $1 < p < 2$ ist aber nach Korollar 6 aus 2. $I_{c_0}(l^p, l^{p'}) = l^{p'/2} \subsetneqq l^{p'}$; ist $2 \leqslant p < \infty$ dann ließe sich für jedes $a \in l^{p'}$ $m'a$ von l^p in $l^{p'}$ zu einem integralen c_0-Morphismus von l^2 in l^2 fortsetzen. Es ist aber $I_{c_0}(l^2, l^2) = N_{c_0}(l^2, l^2) = l^1 \subsetneqq l^{p'}$.

b. $1 < p \leqslant 2$, $2 \leqslant p' < \infty$. Für alle $a \in l^{p'}$ faktorisiert $m'a$ von l^p in $l^{p'}$ durch die identische Abbildung $I_1^{p'}$ von l^1 in $l^{p'}$, welche nach [4], Satz 55 r'-integral ist für alle $1 < r'$. Daraus folgt: $m'a = I_1^{p'} \cdot d_a$ ist r'-integral für alle $1 < r'$ und $\underset{\varepsilon_r}{I}(m'a) \leqslant I(I_1^{p'}) \|a\|_{p'}$, d.h. $m'\colon l^{p'} \to (l^p \underset{\varepsilon_r}{\otimes} l^p)' = I_{r'}(l^p, l^{p'})$ und damit $m\colon l^p \otimes l^p \to l^p$ ist stetig für $1 \leqslant r < \infty$.

c. Zunächst zeigt man für $1 < p < \infty$: $A_{p',c_0}(l^p, l^{p'}) = N_{p',c_0}(l^p, l^{p'}) = l^{p'}$, woraus mit Hilfe von [4], Satz 34 und 40 $I_{p',c_0}(l\ , l^{p'}) = l^{p'}$ folgt: die Multiplikation mit einer Folge a ist genau dann p'-integral von l^p in $l^{p'}$, wenn $a \in l^{p'}$, und es gilt $I_{p'}(m'a) = \|a\|_{p'}$. D.h. m' ist eine Isometrie von $l^{p'}$ in $I_{p'}(l^p, l^{p'})$ und insbesondere m stetig von $l^p \overset{\varepsilon_p}{\otimes} l^p$ in l^p. Sei $2 < p < \infty$. Gäbe es ein $\delta > 0$, mit welchem m von $(l^p \otimes l^p, \varepsilon_{p+\delta})$ in l^p stetig wäre, dann wäre, für jedes $a \in l^{p'}$, $m'a$ eine $(p+\delta)'$-integrale und daher absolut $(p+\delta)'$-summierende Abbildung von l^p in $l^{p'}$. Das hieße nach [1], Theorem 9, (ii), daß für jedes $a \in l^{p'}$ $\sum_i |a^i|^{p'} \left|1 + \log\left|\frac{1}{a^i}\right|\right| < \infty$, was nicht der Fall ist.

Proposition 2. a. *Für* $1 \leqslant p < \infty$ *ist* l^p *kein* $(\varepsilon\text{-}c_0)$-*Modul.*

b. *Jedes wesentliche* c_0-*Banachideal ist ein* $(\varepsilon\text{-}l^1)$-*Modul unter der punktweisen Multiplikation.*

Beweis. a. $p = 1$. Wäre $m\colon (c_0 \otimes l^1, \varepsilon) \to l^1$ stetig, dann wäre $\mathrm{Id}(l^1) = m'\big((1, 1, \ldots)\big) \in (c_0 \overset{\varepsilon}{\otimes} l^1)' = I(l^1, l^1)$, was nach [4], Satz 19, 20 und Lemma 9 nicht möglich ist. Für $1 < p < \infty$ ergibt sich die Behauptung aus Proposition 1.a, weil $l^p \overset{\varepsilon}{\otimes} l^p$ in $c_0 \overset{\varepsilon}{\otimes} l^p$ kontraktiv enthalten ist.

Zum Beweis von b verwendet man das

Lemma (s. [9], S. 8). *Sei* k *eine natürliche Zahl,* $\mathbf{Z}(k)$ *die additive Restklassengruppe* mod k, $G(k)$ *ihre Charakterengruppe. Für jedes* $f = \big(f(1), \ldots, f(k)\big) \in m'$ (m *das wesentliche* c_0-*Banachideal*) *besitzt die Funktion* F, *definiert durch* $F(i,j) = \frac{1}{k} \sum_{\chi \in G(k)} \chi(i) f(j) \chi^{-1}(j)$, $i, j \in \mathbf{Z}(k)$ *die Eigenschaften:* $F(i,j) = 0$ *für* $i \neq j$, $F(i,i) = f(i)$ *und* $\|F\|_{l^\infty \overset{\pi}{\otimes} m'} \leqslant \|f\|_{m'}$.

Insbesondere sieht man ($m = l^1$), daß l^1 eine ε-Algebra ist, was schon von Grothendieck in Boletim Soc. Math. Sao Paulo 8 (1956), Seite 95, Corollaire 3, bewiesen worden ist und zur Aussage äquivalent ist, daß die identische Abbildung von l^1 in c_0 integral ist (ebendort, S. 93. Siehe auch Ende jenes Beweises.). Daraus folgt zum Beispiel $l^1 \underset{l^1}{\overset{\varepsilon}{\otimes}} l^1 = l^1$ und $l^1 \underset{c_0}{\overset{\varepsilon}{\otimes}} l^1 = l^1 \underset{c_0}{\overset{\pi}{\otimes}} l^1$.

Literatur

[1] D. J. H. Garling, *Diagonal mappings between sequence spaces*, Studia Math. 51, (1974). S. 129–138.

[2] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boletim Soc. Math. Sao Paulo 8 (1956), S. 1–79.

[3] J. R. Holub, *Diagonal nuclear mappings in sequence spaces*, Math. Ann. 191 (1971), S. 326–332.

[4] A. Persson und A. Pietsch, *p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, Studia Math. 33 (1969), S. 19–62.

[5] H. Reiter, *L^1-algebras and Segal algebras*, Lecture Notes 231, Springer-Verlag, 1971.

[6] M. A. Rieffel, *Induced Banach representations of Banach algebras and locally compact groups*, J. Funct. Anal. 1 (1967), S. 443–491.

[7] P. Saphar, *Produits tensoriels d'espaces de Banach et classes d'applications linéaires*, Studia Math. 38 (1970), S. 71–100.

[8] A. E. Tonge, *Diagonal nuclear mappings on l_p spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969), S. 235–247.

[9] N. Th. Varopoulos, *Some remarks on Q-algebras*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 22 (1972), S. 1–11.

Received December 8, 1975
Revised version July 7, 1977

(1101)