STUDIA MATHEMATICA, T. LXVI. (1979)

Homomorphismes discontinus des algèbres de Banach commutatives séparables

par

J. ESTERLE (Talence)

Abstract. We prove that if the continuum hypothesis is assumed, then there exists a discontinuous homomorphism from every separable commutative Banach algebra into $L^1_*(0, 1)\oplus \boldsymbol{C}e$. More generally, every prime non-maximal ideal I of a commutative unital Banach algebra $\mathscr{A}$ satisfying $\mathrm{Card}(\mathscr{A}/I) = \aleph_1$ is the kernel of a discon-inuous homomorphism from $\mathscr{A}$. We also prove that the weighted algebra $L^1(\boldsymbol{R}^+, w)$ s universal for the complex commutative non-unital algebras of cardinality $\aleph_1$ which are integral domains.

1. Introduction. On a montré dans [13]–[15] que si on assume l'hypothèse du continu il existe pour tout compact infini X un homomorphisme discontinu de $\mathscr{C}(X)$ dans une algèbre de Banach, ce qui résolvait un problème qui s'était posé naturellement quand I. Kaplansky a montré dans [24] que toute norme d'algèbre sur $\mathscr{C}(X)$ est minorée par la norme usuelle (ce problème a été également résolu par G. Dales dans [8]). On se propose ici d'étendre ce résultat à une vaste classe d'algèbres de Banach complexes commutatives incluant les algèbres de Banach commutatives séparables.

La première extension de ce type a été obtenue par G. Dales, qui annonçait dans [8] que sa construction d'un homomorphisme discontinu de $\mathscr{C}(X)$ permettait de construire un homomorphisme discontinu de toute algèbre de Banach commutative possédant une infinité de caractères. Sa méthode consiste à construire un homomorphisme φ de l'algèbre $\mathscr{A}$ considérée dans l^∞/I_p, I_p désignant l'idéal premier minimal de l^∞ associé à un point p du complémentaire de $\boldsymbol{N}$ dans son compactifié de Stone–Čech, et à modifier l'injection ψ de l^∞/I_p construite dans [8] de façon à avoir, pour un élément convenable a de A: $\exp\big((\psi\circ\varphi)(a)\big) \neq (\psi\circ\varphi)\big(\exp(a)\big)$ (voir [9]).

Après les Journées de continuité automatique de Leeds de juin 1976, l'attention s'est donc portée sur les algèbres de Banach commutatives radicales. En construisant de manière élégante un homomorphisme non-trivial de $L^1_*(0,1)$ et un homomorphisme injectif de $L^1(\boldsymbol{R}^+, w)$ dans l^∞/I_p, G. Dales a prouvé qu'il existait un homomorphisme discontinu de ces deux algèbres (voir également [9]; la construction de l'homomorphisme de $L^1_*(0,1)$ dans l^∞/I_p ne dépend pas de l'hypothèse du continu).

On obtient ici indépendamment des résultats plus généraux, mais les démonstrations font appel à de profonds résultats d'algèbre commutative dûs à I. Kaplansky: après avoir donné des conditions suffisantes pour que l'extension immédiate maximale d'un corps valué (K, v) soit unique à un isomorphisme préservant la valuation près, I. Kaplansky montrait dans sa thèse que l'on pouvait construire dans certaines conditions un homomorphisme ϱ préservant la valuation de K dans le corps de séries formelles à coefficients dans le corps résiduel $\mathscr{R}_{K,v}$ ayant le groupe des valeurs $v(K\setminus\{0\})$ pour groupe d'exposants ([23], théorème 8; les démonstrations de [23] utilisent la notion de "suite pseudo-Cauchy" introduite par Ostrowski dans [31]). En combinant ce résultat avec le théorème 7 de [23] on montre par récurrence transfinie que si $\mathrm{Card}(K) \leqslant \aleph_\alpha$ (avec $\alpha > 0$) on peut en fait construire ϱ de façon que le cardinal du support de tous les éléments de $\varrho(K)$ soit strictement inférieur à $\aleph_\alpha$ (théorème 3.3 et remarque 3.5), résultat qui semble présenter un certain intérêt en lui-même.

En utilisant le théorème d'immersion des ensembles ordonnés de Hausdorff–Sierpiński–Gillman et l'extension analogue du théorème d'immersion de Hahn obtenue par l'auteur dans [16] on montre alors que pour tout ordinal $\alpha > 0$ le corps valué $H^{(a)}_{\omega_\alpha}$ introduit dans [14] possède dans la catégorie des corps valués dont le corps résiduel est de caractéristique nulle des propriétés universelles semblebles à celles du corps ordonné $\mathscr{F}^{(a)}_{\omega_\alpha}$ introduit dans [13] dans la catégorie des corps ordonnés (les propriétés universelles de $\mathscr{F}^{(a)}_{\omega}$ n'étaient semble-t'il connues que quand α possède un prédecesseur, où elles résultent des propriété générales des "corps ordonnés de type η_α", voir [11] et [13]. On peut en fait établir ces propriétés pour tout ordinal $\alpha > 0$ par les méthodes de la section 3, voir remarque 3.5; d'autre part l'amélioration de Johnson du théorème d'isomorphisme d'Erdös, Gillman et Henriksen peut également se déduire de la thèse de Kaplansky, voir remarque 5.7).

Grâce à un résultat classique d'algèbre commutative qui permet de plonger de manière convenable un anneau unitaire et intègre dans un anneau de valuation de son corps des fractions, on en déduit à la section 4 que l'idéal maximal C'_{ω_α} de l'anneau de valuation de $H^{(a)}_{\omega_\alpha}$, muni de sa structure d'algèbre naturelle, contient une copie de toute algèbre complexe commutative intègre non unitaire de cardinal inférieur on égal à $\aleph_\alpha$. Comme on a montré dans [15] que les algèbres de Banach complexes commutatives à unité approchée bornée contiennent une copie de l'algèbre C'_{ω_1} (qui est isomorphe aux algèbres l^∞/I_p considérées par G. Dales si on assume l'hypothèse du continu) on obtient au corollaire 5.2 une curieuse propriété universelle de l'algèbre de convolution pondérée $L^1(\boldsymbol{R}^+, w)$ qui implique que toute algèbre complexe commutative unitaire et intègre de cardinal $\aleph_1$ possédant un caractère est normable.

On voit ainsi que tout idéal premier I non fermé du d'une algèbre de Banach complexe commutative $\mathscr{A}$ tel que $\mathrm{Dim}(\mathscr{A}/I) > 1$ et $\mathrm{Card}(\mathscr{A}/I) = 2^{\aleph_0}$ est le noyau d'un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $L^1_*(0,1) \oplus \boldsymbol{C}e$, $L^1(\boldsymbol{R}^+, w) \oplus \boldsymbol{C}e, \ldots$ si on assume l'hypothèse du continu. Pour étendre ce résultat aux idéaux premiers fermés on montre que si une algèbre normée $\mathscr{B}$ contient une copie de C'_{ω_1} il existe un homomorphisme injectif ψ de C'_{ω_1} dans $\mathscr{B}$ tel que la norme induite par $\mathscr{B}$ via ψ sur C'_{ω_1} prenne des valeurs positives arbitrairement fixées sur une partie de C'_{ω_1} dont les éléments ne sont liés sur $\boldsymbol{C}$ par aucune relation poynômiale non triviale. Ce résultat présente des liens avec le "changement de l'image de l'exponentielle" utilisé par G. R. Allan dans [1] et par G. Dales dans [9], mais la démonstration donnée ici est purement algébrique et on n'a pas besoin de supposer que $\mathscr{B}$ est complète. On en déduit qu'il existe un homomorphisme discontinu de toute algèbre normée intègre de cardinal $\aleph_1$ dont le corps des fractions a un degré de transcendance infini sur $\boldsymbol{C}$, ce qui est le cas de l'algèbre quotient $\mathscr{A}/I$ considérée plus haut.

On voit donc que tout idéal premier non-maximal d'une algèbre de Banach commutative séparable unitaire $\mathscr{A}$ est le noyau d'un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $L^1_*(0,1) \oplus \boldsymbol{C}e$, $L^1(\boldsymbol{R}^+, w) \oplus \boldsymbol{C}e$, etc., si on assume l'hypothèse du continu, et de tels idéaux existent dans toute algèbre de Banach commutative dont le nilradical est de codimension infinie. Le cas d'une algèbre de Banach commutative $\mathscr{A}$ de dimension infinie dont le nilradical est de codimension finie est traité par avance au section 2 par des méthodes élémentaires: on fait apparaître dans une telle algèbre un idéal maximal $\mathscr{M}$ dont le carré est de codimension infinie, et on est alors ramené à un problème linéaire (une application linéaire de l'"algèbre" $\mathscr{M}/\mathscr{M}^2$ dans une algèbre de carré nul est évidemment un homomorphisme d'algèbre).

Il est alors facile de construire un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $L^1_*(0,1) \oplus \boldsymbol{C}e$.

Il est curieux de constater que les algèbres complexes commutatives non unitaires et intègre de cardinal $\aleph_1$ peuvent etre utilisées de la même façon que les algèbres triviales de carré nul pour construire des homomorphismes discontinus des algèbres de Banach commutatives (dans le second cas il existe une "norme d'algèbre" prenant des valeurs positives arbitrairement fixées sur une base de Hamel donnée et dans le premier cas il existe une norme d'algèbre prenant des valeurs arbitrairement fixées sur une base de transcendance donnée). En fait si les carrés de tous les idéaux maximaux d'une algèbre de Banach complexe commutative séparable unitaire $\mathscr{A}$ sont de codimension finie (c'est-à-dire si les méthodes triviales de construction d'homomorphismes discontinus ne s'appliquent pas à $\mathscr{A}$) et si $\mathscr{A}$ ne possède aucun idéal premier fermé non maximal, on peut montrer que construire un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dont le noyau est un idéal premier nonmaximal est le seul moyen de construire un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ (voir [4]; les premiers résultats de ce type ont été obtenus par A. M. Sinclair dans [39] puis indépendamment par l'auteur dans [12] pour $\mathscr{C}(X)$).

Il est facile de voir que les constructions de [8] restent valables indépendamment de l'hypothèse du continu à condition de remplacer les algèbres quotient l^∞/I_p par l'algèbre C'_{ω_1}. Tous les résultats des sections 5 et 6 restent donc valables si on remplace l'algèbre $L^1_*(0, 1)$ par l'algèbre de convolution $C^*(0, 1)$ (qui ne possède pas d'unité approchée bornée), voir la remarque 6.7. Je signale d'ailleurs que A. M. Sinclair a très récemment donné dans [38] une méthode qui permet de déduire de la construction de G. Dales l'existence d'un homomorphisme discontinu de $\mathscr{C}(X)$ dans l'algèbre obtenue en adjoignant l'unité à une algèbre de Banach radicale commutative possédant une unité approchée bornée.

Je remercie les professeurs Allan, Curtis, Dales, McClure et Sinclair et tous les participants aux Journées de continuité automatique de Leeds pour les fructueuses discussions que j'ai eues avec eux en Juin 1976, et je remercie d'autre part les professeurs P. C. Curtis, G. Dales, P. G. Dixon, R. C. Loy et A. M. Sinclair de m'avoir communiqué des preprints ([4], [8]–[10], [27] et [38]). Je remercie également F. J. Rayner qui m'a fait connaître les travaux de Hahn, Krull et Kaplansky sur les corps valués lors de son séjour à Bordeaux en 1976.

2. Construction élémentaire d'homomorphismes discontinus de certaines algèbres de Banach. Le but essentiel de cet article est de prouver (moyennant l'hypotèse du continu) que tout idéal premier non maximal I d'une algèbre de Banach complexe commutative unitaire $\mathscr{A}$ est le noyau d'un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ si l'algèbre quotient $\mathscr{A}/I$ a la puissance du continu (théorème 6.2). Mais si le nilradical de $\mathscr{A}$ est de codimension finie dans $\mathscr{A}$ il est facile de voir que tout idéal premier de $\mathscr{A}$ est maximal. On va donner ici une méthode élémentaire permettant cependant de construire un homomorphisme discontinu d'une telle algèbre.

Toutes les algèbres considérées dans cet article sont des algèbres sur le corps $\boldsymbol{C}$ des complexes. Pour toute algèbre A et tout entier positif n on notera A^n l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des produits de n éléments de A.

Soit $\mathscr{A}$ une algèbre normée (non unitaire!) telle que $\mathscr{A}^2$ soit de codimension infinie dans $\mathscr{A}$ et soit p une norme vectorielle sur $\mathscr{A}/\mathscr{A}^2$ strictement plus fine que la semi-norme quotient induite sur $\mathscr{A}/\mathscr{A}^2$ par la norme de $\mathscr{A}$; l'application canonique de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{A}/\mathscr{A}^2$ est évidemment un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans l'"algèbre normée" obtenue en munissant $\mathscr{A}/\mathscr{A}^2$ de p (ceci est bien connu, voir par exemple [3]). Le lemme suivant est basé sur une variante de cette méthode:

LEMME 2.1. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre normée et soit B une algèbre de Banach possédant un élément nilpotent non nul. Si $\mathscr{A}^2$ est de codimension infinie dans $\mathscr{A}$, il existe un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans B.*

Démonstration. Soit z un élément de norme 1 de B dont le carré est nul, soit $\mathscr{T}$ une base de Hamel de $\mathscr{A}$ module $\mathscr{A}^2$ et soit f une application de $\mathscr{T}$ dans l'ensemble $\boldsymbol{R}^+$ des réels strictement positifs. Il existe une unique application linéaire φ de $\mathscr{A}$ dans B vérifiant: $\operatorname{Ker}(\varphi) \subseteq \mathscr{A}^2$, $\varphi(x) = f(x)z$ $(x \in \mathscr{T})$. L'application φ est en fait un homomorphisme d'algèbre de $\mathscr{A}$ dans B et on a: $\|\varphi(x)\| = f(x)$ $(x \in \mathscr{T})$. On peut donc construire pour toute suite (x_n) d'éléments de $\mathscr{A}$ linéairement indépendants modulo $\mathscr{A}^2$ un homomorphisme d'algèbre φ de $\mathscr{A}$ dans B vérifiant: $\|\varphi(x_n)\| = n\|x_n\|$ $(n \in \boldsymbol{N})$, et ceci établit le lemme.

Remarque 2.2. Le lemme 2.1 reste valable quand $\mathscr{A}^2$ n'est pas fermé dans $\mathscr{A}$. P. G. Dixon a très récemment construit une algèbre de Banach (non commutative) dont le carré n'est pas fermé et est de codimension finie (voir [10]), mais Christensen a montré dans [7] en utilisant la théorie des espaces de Souslin que si $\mathscr{A}$ est une algèbre de Banach séparable et si $\mathscr{A}^2$ est de codimension finie dans $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^2$ est fermé dans $\mathscr{A}$ (on peut déduire plus généralement d'un résultat établi par R. C. Loy dans [27] que si $\mathscr{A}$ est une algèbre de Banach séparable et si $\mathscr{A}^2$ est de codimension finie dans $\mathscr{A}$, tout homomorphisme φ de $\mathscr{A}$ dans une algèbre de Banach B tel que l'application bilinéaire $(x, y) \to \varphi(xy)$ soit continue est lui-même continu).

Conformément à la terminologie utilisée par Bonsall et Duncan dans [5] nous dirons qu'une algèbre A est nilpotente quand il existe $n \in \boldsymbol{N}$ tel que $A^n = \{0\}$, et nous dirons qu'une algèbre est une nilalgèbre quand tous ses éléments sont nilpotents. Grabiner a montré qu'une nilalgèbre de Banach est nécessairement nilpotente (voir [19] ou [5], § 46, théorème 3). On a alors le lemme suivant:

LEMME 2.3. *Soit $\mathscr{A}$ une nilalgèbre de Banach. Si $\mathscr{A}^2$ est de codimension finie dans $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}$ est de dimension finie.*

Démonstration. Soit n un entier positif, soit S un supplémentaire de $\mathscr{A}^n$ dans $\mathscr{A}$ et soit $(y_1, \ldots, y_n)$ une famille de n éléments de $\mathscr{A}$. On a pour $1 \leqslant i \leqslant n$: $y_i = u_i + v_i$ avec $u_i \in S$, $v_i \in \mathscr{A}^n$. Il vient: $y_1 \ldots y_n - u_1 \ldots u_n \in \mathscr{A}^{n+1}$ d'où $\mathscr{A}^n \subseteq S^n + \mathscr{A}^{n+1}$ et $\mathscr{A} = S + S^n + \mathscr{A}^{n+1}$. On voit donc que $\mathscr{A}^n$ est pour tout n de codimension finie dans $\mathscr{A}$, et le lemme se déduit du résultat de Grabiner cité plus haut.

On va maintenant établir le:

THÉORÈME 2.4. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative de dimension infinie et soit $\mathscr{B}$ une algèbre de Banach unitaire possédant un élément nilpotent non nul. Si le nilradical de $\mathscr{A}$ est de codimension finie dans $\mathscr{A}$, il existe un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$*

Démonstration. Soit $\mathscr{R}_1$ le nilradical de $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{R}_1$ coincide avec $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^2$ est de codimension infinie dans $\mathscr{A}$ (lemme 2.3) et la théorème se déduit immédiatement du lemme 2.1. Si $\mathscr{R}_1$ ne coincide pas avec $\mathscr{A}$, le nilradical de l'algèbre quotient $\mathscr{A}/\mathscr{R}_1$ est réduit à $\{0\}$ et puisque $\mathscr{A}/\mathscr{R}_1$ est de dimension finie ceci implique comme bien connu que c'est une algèbre semi-simple. On a alors: $\mathscr{R}_1 = \operatorname{Rad}(\mathscr{A})$ et d'après l'extension de Feldmann du théorème de structure de Wedderburn (voir [17]) il existe une sous-algèbre $\mathscr{A}_1$ de $\mathscr{A}$ (isomorphe à $\mathscr{A}/\mathscr{R}_1$) telle que l'on ait: $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \oplus \mathscr{R}_1$. Comme $\mathscr{A}_1$ est semi-simple elle possède une unité f et il existe une famille $(f_1, \ldots, f_k)$ d'idempotents minimaux de $\mathscr{A}_1$ orthogonaux deux à deux formant une base de $\mathscr{A}_1$ (voir [37]). Si $f\cdot\mathscr{R}_1$ est de codimension finie dans $\mathscr{R}_1$, l'un au moins des espaces $f_1\cdot\mathscr{R}_1, \ldots, f_k\cdot\mathscr{R}_1$, disons $f_1\cdot\mathscr{R}_1$, est de dimension infinie. Posons: $\mathscr{M}_1 = \{y \in \mathscr{A}\colon f_1\cdot y = 0\}$. $\mathscr{M}_1$ est un idéal fermé de $\mathscr{A}$ et on a: $\mathscr{A} = f_1\cdot\mathscr{R}_1 \oplus Cf_1 \oplus \mathscr{M}_1$. L'idéal $f_1\cdot\mathscr{R}_1$ est une nilalgèbre de Banach de dimension infinie et il existe d'après les lemmes 2.1 et 2.3 un homomorphisme discontinu ψ de $f_1\cdot\mathscr{R}_1$ dans $\mathscr{B}$ Posons, e désignant l'unité de $\mathscr{B}$: $\varphi(f_1\cdot y + \lambda\cdot f_1 + z) = \psi(f_1\cdot y) + \lambda\cdot e$ $(y \in \mathscr{R}_1, \lambda \in C, z \in \mathscr{M}_1)$ Il est clair que l'on définit ainsi un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$. Si $f\cdot\mathscr{R}_1$ est de codimension infinie dans $\mathscr{A}$, posons: $\mathscr{M} = \{y \in \mathscr{A}\colon f\cdot y = 0\}$. $\mathscr{M}$ est une nilalgèbre de Banach de dimension infinie et on peut construire de même que plus haut un homomorphisme discontinu ψ de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{B}$, que l'on prolonge par un homomorphisme discontinu φ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$ en posant: $\varphi(f\cdot x + y) = \psi(y)$ $(x \in \mathscr{A}, y \in \mathscr{M})$ et ceci achève la démonstration.

Soit $L^1_*(0,1)$ l'"algèbre de Volterra" obtenue en munissant l'espace des classes de fonctions intégrables de $[0,1]$ dans C égales presque partout de la norme $\|\cdot\|_1$ et du produit de convolution défini par la relation

$$(g*h)(s) = \int_0^s g(s-t)h(t)\,dt \qquad (g, h \in L^1_*(0,1),\ s \in [0,1]).$$

Il est bien connu que $L^1_*(0,1)$ est une algèbre de Banach radicale possédant une unité approchée bornée (voir par exemple [34], A. 2.11). Comme $L^1_*(0,1)$ possède des éléments nilpotents non nuls (considérer des fonctions nulles presque partout sur $[0,t]$ avec $0<t<1$) on a le:

COROLLAIRE 2.5. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative de dimension infinie. Si le nilradical de $\mathscr{A}$ est de codimension finie dans $\mathscr{A}$, il existe un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $L^1_*(0,1) \oplus Ce$.*

3. Remarques sur le théorème d'immersion de Kaplansky. Soit (K, v) un corps valué, c'est-à-dire un corps K (commutatif) muni d'une applica-

tion v de $K\setminus\{0\}$ dans un groupe totalement ordonné vérifiant: $v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y))$, $v(xy) = v(x)+v(y)$ $(x, y \in K\setminus\{0\})$. Conformément à l'usage, on pose: $v(0) = \infty$. Si $v(y) > v(x)$, on a comme bien connu: $v(x+y) = v(x)$. On notera $\mathscr{A}_{K,v} = \{x \in K\colon v(x) \geqslant 0\}$ l'anneau de valuation de K pour v, $\mathscr{M}_{K,v} = \{x \in K\colon v(x) > 0\}$ l'unique idéal maximal de $\mathscr{A}_{K,v}$, $\mathscr{R}_{K,v} = \mathscr{A}_{K,v}/\mathscr{M}_{K,v}$ le corps résiduel de K pour v, et on notera $\theta_{K,v}$ l'application canonique de $\mathscr{A}_{K,v}$ sur $\mathscr{R}_{K,v}$ (sur les corps valués, voir par exemple [35] ou [6], Chapitre VI). Soit K_1 un sous-corps de K et soit v_1 la restriction de v à K_1. Le corps résiduel $\mathscr{R}_{K_1,v_1}$ s'identifie canoniquement à un sous-corps de $\mathscr{R}_{K,v}$ et on dira que K_1 a même corps résiduel que K pour v si l'application canonique de $\mathscr{R}_{K_1,v_1}$ dans $\mathscr{R}_{K,v}$ est surjective.

Soit maintenant K' un sur-corps de K. Si v' est un prolongement de v à K, c'est-à-dire une valuation sur K' à valeurs dans un groupe totalement ordonné contenant $v(K\setminus\{0\})$ dont la restriction à K coincide avec v, on dit que (K', v') est une extension de (K, v) (un tel prolongement de v est possible pour tout sur-corps de K, voir [25]). On dit qu'une extension (K', v') de (K, v) est immédiate si $v'(K'\setminus\{0\})$ coincide avec $v(K\setminus\{0\})$ et si K et K' ont "même corps résiduel" pour v' au sens défini plus haut. Un corps valué est dit maximal s'il ne possède d'autre extension immédiate que lui-même ([23] et [26]). Il est bien connu que tout corps valué possède une extension immédiate maximale (voir [26] et également [32] où ce résultat est obtenu par une méthode très courte et élégante).

Soient maintenant L un corps commutatif et G un groupe abélien totalement ordonné. On note $\mathscr{F}(G, L)$ le "corps des séries formelles à coefficients dans L ayant G pour groupe d'exposants", c'est-à-dire le corps obtenu en munissant le groupe additif des fonctions de G dans L à support bien ordonné du produit défini pour un couple (x, y) de la manière suivante (la notation $\operatorname{Supp}(z)$ désignant pour $z \in \mathscr{F}(G, L)$ l'ensemble $(z^{-1})(L\setminus\{0\})$): $(xy)(t) = 0$ si $t \notin \operatorname{Supp}(x)+\operatorname{Supp}(y)$, $(xy)(t) = \sum_{\substack{r\in\operatorname{Supp}(x)\\ s\in\operatorname{Supp}(y)\\ r+s=t}} x(r)y(s)$ si $t \in \operatorname{Supp}(x)+\operatorname{Supp}(y)$. $\mathscr{F}(G, L)$ est bien un corps, voir [29] et [30], et c'est un corps valué maximal pour la "valuation canonique" V qui à un élément non nul de $\mathscr{F}(G, L)$ associe le plus petit terme de son support (voir [26]). Pour tout ordinal α on note $\mathscr{F}_\alpha(G, L)$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{F}(G, L)$ dont le cardinal du support est strictement inférieur à $\aleph_\alpha$. $\mathscr{F}(G, L)$ est muni de manière naturelle d'une structure d'algèbre sur L, et le corps résiduel de $\mathscr{F}(G, L)$ pour V est évidemment isomorphe à L.

Soient maintenant (K, v) un corps valué et φ un homomorphisme de K dans $\mathscr{F}(G, L)$. Si G contient $v(K\setminus\{0\})$, on dira conformément à [23] que l'homomorphisme φ est analytique si on a: $v = V\circ\varphi$. Soit θ l'application canonique de l'anneau de valuation de $\mathscr{F}(G, L)$ pour V sur le corps résiduel de $\mathscr{F}(G, L)$ pour V. Si φ est analytique il existe une unique application $\overline{\varphi}$ de $\mathscr{R}_{K,v}$ dans le corps résiduel de $\mathscr{F}(G, L)$ pour V vérifiant: $\theta\circ\varphi = \overline{\varphi}\circ\theta_{K,v}$. Il est clair que $\overline{\varphi}$ est un homomorphisme injectif et on dira que φ est résiduellement surjectif quand $\overline{\varphi}$ est surjectif.

Le lemme suivant, qui est la clef de la partie algébrique de cet article, est une simple reformulation, dans un cas particulier, de deux profonds théorèmes de Kaplansky:

LEMME 3.1 (Kaplansky [23], théorèmes 7 et 8). *Soit (K, v) un corps valué dont le corps résiduel est de caractéristique nulle, soit G un groupe abélien totalement ordonné contenant $v(K\setminus\{0\})$, soit L un corps isomorphe au corps résiduel $\mathscr{R}_{K,v}$ et soit φ_1 un homomorphisme analytique résiduellement surjectif d'un sous-corps K_1 de K dans $\mathscr{F}(G, L)$. Si K_1 a même corps résiduel que K pour v et si chaque élément de $\mathscr{R}_{K,v}$ possède une racine n^e pour tout n, il existe un homomorphisme analytique φ de K dans $\mathscr{F}(G, L)$ prolongeant φ_1.*

Démonstration. Le corps valué (K, v) possède une extension immédiate maximale, et il résulte du théorème 8 de [23] que cette extension immédiate maximale est nécessairement analytiquement isomorphe à $\mathscr{F}\big(v(K\setminus\{0\}), \mathscr{R}_{K,v}\big)$, ce qui signifie qu'il existe un homomorphisme analytique résiduellement surjectif ψ de K dans $\mathscr{F}\big(v(K\setminus\{0\}), L\big)$. Soit i l'injection naturelle de $\mathscr{F}\big(v(K\setminus\{0\}), L\big)$ dans $\mathscr{F}(G, L)$ et soit ψ_1 la restriction de $i\circ\psi$ à K_1. Comme K_1 a même corps résiduel que K pour v, ψ_1 est résiduellement surjective. Compte tenu des hypothèses faites sur L on voit que l'on se trouve dans les conditions d'application du théorème 7 de [23] que l'on peut interpréter de la manière suivante: il existe un isomorphisme analytique ϱ de $\mathscr{F}(G, L)$ sur lui-même rendant commutatif le diagramme suivant (où j désigne l'application identité sur K_1):

$$\begin{array}{ccc} K_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathscr{F}(G, L) \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \varrho} \\ K_1 & \xrightarrow{\psi_1} & \mathscr{F}(G, L) \end{array}$$

Il est alors clair que $\varrho\circ i\circ\psi$ est l'homomorphisme analytique cherché de K dans $\mathscr{F}(G, L)$.

Nous utiliserons également le lemme élémentaire suivant:

LEMME 3.2. *Soit (K, v) un corps valué, soit k un sous-corps de K et soit A une partie de K. Si tous les éléments non nuls de k sont de valuation nulle, on a: $\operatorname{Card}\big(v(k[A]\setminus\{0\})\big) \leqslant \max\big(\aleph_0, \operatorname{Card}(A)\big)$.*

Démonstration. Remarquons tout d'abord que pour tout sous-corps K_1 de K et pour tout élément y de K on a: $\operatorname{Card}\big(v(K_1\setminus\{0\})\big) = \operatorname{Card}\big(v\big(K_1(y)\setminus\{0\}\big)\big)$ si $v(K_1\setminus\{0\}) \neq \{0\}$ (et $\operatorname{Card}\big(v\big(K_1(y)\setminus\{0\}\big)\big) \leqslant \aleph_0$ si $v(K_1\setminus\{0\}) = \{0\}$). En effet on peut d'après le résultat de Krull rappelé plus haut trouver un prolongement $\tilde{v}$ de v à une clôture algébrique $\tilde{K}$ de K qui contient nécessairement une clôture algébrique $\tilde{K}_1$ de K_1. Pour

tout élément non nul x de $\tilde{K}_1$ il existe $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K_1$ et $a_n \in K_1\setminus\{0\}$ vérifiant: $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n = 0$ et d'après une propriété élémentaire bien connue des valuations ([6], Chapitre VI, corollaire de la proposition 1) il existe deux entiers distincts m, m' tels que: $\tilde{v}(a_mx^m) = \tilde{v}(a_{m'}x^{m'})$ avec $a_m \neq 0$, $a_{m'} \neq 0$, d'où, en supposant par exemple $m > m'$: $(m-m')\tilde{v}(x) = v(a_{m'}/a_m)$. Posons, pour $p \in N$: $\varphi_p(t) = pt$ $(t \in \tilde{v}(\tilde{K}_1\setminus\{0\})$. Comme $\tilde{v}(\tilde{K}_1\setminus\{0\})$ est totalement ordonné, il est sans torsion et φ_p est injective sur $\tilde{v}(\tilde{K}_1\setminus\{0\})$ (c'est en fait un isomorphisme); on a: $\tilde{v}(\tilde{K}_1\setminus\{0\}) = \bigcup_{p=1}^{\infty} (\varphi_p)^{-1}\big(v(K_1\setminus\{0\})\big)$ d'où évidemment: $\operatorname{Card}\big(\tilde{v}(\tilde{K}_1\setminus\{0\})\big) = \operatorname{Card}\big(v(K_1\setminus\{0\})\big)$. Soit $y \in K$, $y \notin K_1$. Si y est algébrique sur K_1, on a: $K_1(y) \subseteq \tilde{K}_1$ d'où: $\operatorname{Card}\big(v\big(K_1(y)\setminus\{0\}\big)\big) = \operatorname{Card}\big(v(K_1\setminus\{0\})\big)$. Si y est transcendant sur K_1, tout élément z non nul de $K_1(y)$ s'écrit: $z = \gamma(y-\lambda_1)\ldots(y-\lambda_k)(y-\mu_1)^{-1}\ldots(y-\mu_{k'})^{-1}$ avec $\gamma \in \tilde{K}_1\setminus\{0\}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, $\mu_1, \ldots, \mu_{k'} \in \tilde{K}_1$. Posons: $D = \{y-a\}_{a\in\tilde{K}_1}$. On a évidemment: $D \subseteq \tilde{K}\setminus\{0\}$. Soit s un élément de $\tilde{v}(D)$ distinct de l'éventuel plus grand élément u de $\tilde{v}(D)$. On a: $s = \tilde{v}(y-a)$ avec $a \in \tilde{K}_1$ et il existe $b \in \tilde{K}_1$ vérifiant: $\tilde{v}(b-y) = \tilde{v}(y-b) > \tilde{v}(y-a)$ d'où: $\tilde{v}(y-a) = \tilde{v}(b-a)$ soit: $s \in v(\tilde{K}_1\setminus\{0\})$. Par conséquent si $\tilde{v}(D)$ n'a pas de plus grand élément on a: $v\big(K_1(y)\setminus\{0\}\big) \subseteq v(\tilde{K}_1\setminus\{0\})$ et si $\tilde{v}(D)$ possède un plus grand élément u on a: $v\big(K_1(y)\setminus\{0\}\big) \subseteq v(\tilde{K}_1\setminus\{0\}) + Zu$, ce qui établit notre assertion.

Revenons maintenant au lemme. Soit α l'ordinal vérifiant: $\aleph_\alpha = \max\big(\operatorname{Card}(A), \aleph_0\big)$. Quitte à compter plusiers fois le même élément, on peut indexer A par $[0, \omega_\alpha[$, ω_α désignant l'ordinal initial d'indice α. Pour $\xi \leqslant \omega_\alpha$, posons: $k_\xi = k(\{x_\eta\}_{\eta<\xi})$. On a évidemment: $v(k_0\setminus\{0\}) = v(k\setminus\{0\}) = \{0\}$. Soit $\xi \in]0, \omega_\alpha]$ tel que pour $\eta < \xi$ on ait: $\operatorname{Card}\big(v(k_\eta\setminus\{0\})\big) \leqslant \aleph_\alpha$. Si ξ possède un prédecesseur δ, on a: $k_\xi = k_\sigma(x_\sigma)$ d'où, d'après la propriété établie plus haut: $\operatorname{Card}\big(v(k_\xi\setminus\{0\})\big) \leqslant \max(\aleph_\alpha, \aleph_0) = \aleph_\alpha$. Si ξ est un ordinal limite, on a: $k_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} k_\eta$ d'où:

$$\begin{aligned} \operatorname{Card}\big(v(k_\xi\setminus\{0\})\big) &\leqslant \operatorname{Card}([0, \xi[\times[0, \omega_\alpha[) \\ &\leqslant \operatorname{Card}([0, \omega_\alpha[\times[0, \omega_\alpha[) = \operatorname{Card}([0, \omega_\alpha[) = \aleph_\alpha. \end{aligned}$$

Le lemme résulte alors immédiatement du principe de récurrence transfinie.

On dira qu'un sous-corps k d'un corps valué (K, v) est une copie de $\mathscr{R}_{K,v}$ dans K si et seulement si on a: $k \subseteq \mathscr{A}_{K,v}$, $k \cap \mathscr{M}_{K,v} = \{0\}$ et $\theta_{K,v}(k) = \mathscr{R}_{K,v}$ (un tel sous-corps ne peut évidemment exister que si K et $\mathscr{R}_{K,v}$ ont même caractéristique). On va maintenant donner l'amélioration annoncée du "théorème d'immersion" de Kaplansky:

THÉORÈME 3.3. *Soit (K, v) un corps valué contenant une copie k de son corps résiduel $\mathscr{R}_{K,v}$, soit L un corps isomorphe à $\mathscr{R}_{K,v}$, soit φ_0 un isomorphisme de k sur la copie naturelle L_0 de L dans $\mathscr{F}\big(v(K\setminus\{0\}), L\big)$ et soit $a > 0$ un* *ordinal. Si $\mathcal{R}_{K,v}$ est de caractéristique nulle, si chacun de ses éléments possède une racine n^e pour tout n et si* $\mathrm{Card}(K) \leqslant \aleph_\alpha$, *il existe un homomorphisme analytique φ de K dans $\mathcal{F}_\alpha(v(K\setminus\{0\}), L)$ prolongeant φ_0.*

Démonstration. On peut indexer les éléments de K par $[0, \omega_\alpha[$. Pour $\xi \leqslant \omega_\alpha$, posons: $K_\xi = k(\{x_\eta\}_{\eta<\xi})$. Pour $\xi < \xi' \leqslant \omega_\alpha$, on note $i_{\xi,\xi'}$ l'injection naturelle de $\mathcal{F}(v(K_\xi\setminus\{0\}), L)$ dans $\mathcal{F}(v(K_{\xi'}\setminus\{0\}), L)$ et on pose $\psi_0 = (i_{0,\omega_\alpha})^{-1}\circ\varphi_0$. Soit $\xi \leqslant \omega_\alpha$ et supposons qu'on aie construit pour tout $\eta < \xi$ un homomorphisme analytique ψ_η de K_η dans $\mathcal{F}(v(K_\eta\setminus\{0\}), L)$ de façon que pour $0 \leqslant \eta < \eta' < \xi$ la restriction à K_η de $\psi_{\eta'}$ coincide avec $i_{\eta,\eta'}\circ\psi_\eta$. Posons: $K'_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} K_\eta$, et pour $\eta < \xi$ notons $i'_{\eta,\xi}$ l'injection naturelle de $\mathcal{F}(v(K_\eta\setminus\{0\}), L)$ dans $\mathcal{F}(v(K'_\xi\setminus\{0\}), L)$. Soit ψ'_ξ l'homomorphisme analytique de K'_ξ dans $\mathcal{F}(v(K'_\xi\setminus\{0\}), L)$ défini par les relations: $\psi'_\xi|K_\eta = i'_{\eta,\xi}\circ\psi_\eta\,(\eta < \xi)$. Comme K_ξ et K'_ξ contiennent k ils ont même corps résiduel pour v ce qui prouve que $j_\xi\circ\psi'_\xi$ est un homomorphisme analytique résiduellement surjectif de K'_ξ dans $\mathcal{F}(v(K_\xi\setminus\{0\}), L)$, j_ξ désignant l'injection naturelle de $\mathcal{F}(v(K'_\xi\setminus\{0\}), L)$ dans $\mathcal{F}(v(K_\xi\setminus\{0\}), L)$. D'après le lemme 3.1 il existe alors un homomorphisme analytique ψ_ξ de K_ξ dans $\mathcal{F}(v(K_\xi\setminus\{0\}), L)$ prolongeant $j_\xi\circ\psi'_\xi$, et pour $\eta < \xi$ la restriction de ψ_ξ à K_η coincide avec $j_\xi\circ i'_{\eta,\xi}\circ\psi_\eta$ c'est-à-dire avec $i_{\eta,\xi}\circ\psi_\eta$. D'après le principe de récurrence transfinie on peut donc construire pour tout ordinal $\eta \leqslant \omega_\alpha$ un homomorphisme analytique ψ_ξ de K_ξ dans $\mathcal{F}(v(K_\xi\setminus\{0\}), L)$ de façon à avoir pour $\xi < \xi' \leqslant \omega_\alpha$: $\psi_{\xi'}|K_\xi = i_{\xi,\xi'}\circ\psi_\xi$. D'après le lemme 3.2 on a pour tout $\xi < \omega_\alpha$: $\mathrm{Card}(v(K_\xi\setminus\{0\})) < \max(\aleph_0, \mathrm{Card}(\{x_\eta\}_{\eta<\xi})) = \max(\aleph_0, \mathrm{Card}([0, \xi[)) < \aleph_\alpha$, d'où pour $\xi < \omega_\alpha$:

$$\mathcal{F}(v(K_\xi\setminus\{0\}), L) = \mathcal{F}_\alpha(v(K_\xi\setminus\{0\}), L);$$

$$i_{\xi,\omega_\alpha}[\mathcal{F}(v(K_\xi\setminus\{0\}), L)] \subseteq \mathcal{F}_\alpha(v(K\setminus\{0\}, L)).$$

Comme on a: $K = K_{\omega_\alpha} = \bigcup_{\xi<\omega_\alpha} K_\xi$ il vient: $\psi_{\omega_\alpha}(K) \subseteq \mathcal{F}_\alpha(v(K\setminus\{0\}), L)$ et, comme la restriction de ψ_{ω_α} à k coincide avec φ_0, ceci achève la démonstration.

Pour tout ordinal α, on note S_{ω_α} l'ensemble des suites transfinies dyadiques $(k_\xi)_{\xi<\omega_\alpha}$ dont l'ensemble des rangs des termes égaux à 1 possède un plus grand élément (voir [18], [21] et [36]), que l'on munit de l'ordre lexicographique, et on note $G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$ le groupe additif des fonctions de S_{ω_α} dans $\boldsymbol{R}$ à support bien ordonné de cardinal strictement inférieur à $\aleph_\alpha$, que l'on munit de son ordre total naturel (un élément non nul de $G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$ est dit positif s'il prend une valeur positive sur le plus petit terme de son support). Posons:

$$\mathcal{F}^{(\alpha)}_{\omega_\alpha} = \mathcal{F}_\alpha(G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}, \boldsymbol{R}), \quad H^{(\alpha)}_{\omega_\alpha} = \mathcal{F}_\alpha(G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}, \boldsymbol{C}), \quad T_{\omega_\alpha} = \{s \in G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}:\ s \geqslant 0\},$$
$$T'_{\omega_\alpha} = \{s \in G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}:\ s > 0\}, \quad C_{\omega_\alpha} = \{x \in H^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}:\ V(x) \geqslant 0\},$$
$$C'_{\omega_\alpha} = \{x \in H^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}:\ V(x) > 0\}.$$

On munit $H^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$, C_{ω_α} et C'_{ω_α} de leur structure d'algèbre complexe naturelle.

On dira qu'une structure d'algèbre complexe sur un corps valué (K, v) est compatible avec la valuation si $\mathcal{A}_{K,v}$ est une sous-algèbre de K et si $\mathcal{M}_{K,v}$ est le noyau d'un caractère de $\mathcal{A}_{K,v}$, c'est-à-dire le noyau d'un homomorphisme d'algèbre de $\mathcal{A}_{K,v}$ dans $\boldsymbol{C}$ (ceci implique évidemment que le corps résiduel $\mathcal{R}_{K,v}$ est isomorphe à $\boldsymbol{C}$). On va maintenant établir le corollaire suivant:

Corollaire 3.4. *Soit (K, v) un corps valué possédant une structure d'algèbre complexe compatible avec sa valuation et soit $\alpha > 0$ un ordinal. Si* $\mathrm{Card}(K) \leqslant \aleph_\alpha$, *on peut identifier $v(K\setminus\{0\})$ avec un sous-groupe de $G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$ et il existe alors un homomorphisme d'algèbre analytique de K dans $H^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$.*

Démonstration. On a évidemment: $\mathrm{Card}(v(K\setminus\{0\})) \leqslant \aleph_\alpha$. Le fait que l'on peut identifier $v(K\setminus\{0\})$ à un sous-groupe de $G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$ a été établi par N. Alling dans [2] (voir également [12]) dans le cas où α possède un prédecesseur et par l'auteur dans [16] pour tout ordinal α. Compte tenu de cette identification il existe un homomorphisme analytique ψ de $\mathcal{F}_\alpha(v(K\setminus\{0\}), \boldsymbol{C})$ dans $H^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$ compatible avec les structures d'algèbre naturelles. Posons: $k = \{\lambda e\}_{\lambda\in C}$, e désignant l'unité de K. L'application $\lambda\cdot e \to \lambda\cdot 1$ définit un homomorphisme d'algèbre φ_0 de k sur C_0, et il est clair que k est une copie du corps résiduel de K au sens précisé plus haut. D'après le théorème 3.3, il existe un homomorphisme analytique φ de K dans $\mathcal{F}_\alpha(v(K\setminus\{0\}), \boldsymbol{C})$ prolongeant φ_0. L'homomorphisme φ est un homomorphisme d'algèbre de K dans $\mathcal{F}_\alpha(v(K\setminus\{0\}), \boldsymbol{C})$, et $\psi\circ\varphi$ fournit l'homomorphisme d'algèbre cherché de K dans $H^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$.

Remarque 3.5. L'hypothèse que K contient une copie de son corps résiduel n'est pas essentielle pour obtenir le résultat d'"immersion" du théorème 3.3. En effet le théorème 7 de [23], qui est à la base du lemme 3.1 permet d'obtenir une "équivalence analytique" pour des extensions d'un corps valué donnant lieu à un "accroissement du corps résiduel". La seule précaution à prendre pour étendre le lemme 3.1 dans cette direction si K_1 n'a pas même corps résiduel que K pour v est de s'assurer que φ_1 "laisse de la place" pour ajouter les éléments de $\mathcal{R}_{K,v}$ ne figurant pas dans $\mathcal{R}_{K_1,v_1}$. On pourrait donc prouver que si $\mathcal{R}_{K,v}$ vérifie les autres hypothèses du théorème 3.3 et si $\mathrm{Card}(K) \leqslant \aleph_\alpha$ avec $\alpha > 0$, il existe un homomorphisme analytique résiduellement surjectif de K dans $\mathcal{F}_\alpha(v(K\setminus\{0\}), \mathcal{R}_{K,v})$ (et pour obtenir est énoncé on n'a pas besoin du lemme 3.2). D'autre part il est possible de remplacer l'hypothèse que $\mathcal{R}_{K,v}$ est de caractéristique nulle par l'hypothèse suivante: K et $\mathcal{R}_{K,v}$ ont même caractéristique $p \neq 0$ et vérifient "l'hypothèse A" de [23], c'est-à-dire que $v(K\setminus\{0\})$ coincide avec $p\cdot v(K\setminus\{0\})$ et que pour toute famille finie $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ d'éléments de $\mathcal{R}_{k,v}$ l'équation $a_0 + a_1x^p + a_2x^{p^2} + \ldots + x^{p^n} = 0$ possède au moins une solution dans $\mathcal{R}_{K,v}$.

Notons enfin que si $\mathcal{R}_{K,v}$ est de caractéristique nulle et si $\mathrm{Card}(K) = \aleph_1$ il existe un homomorphisme analytique de K dans $H^{(1)}_{\omega_1}$. On peut en effet prolonger v à une clôture algébrique $\tilde{K}$ de K, et $\tilde{K}$ contient une copie de son corps résiduel (il suffit pour le voir de reprendre l'argument utilisé par MacLane dans [29], lemme 2 et par Kaplansky dans [23], lemme 12, car le fait que K est algébriquement clos permet d'éviter le recours au lemme de Hensel). On voit de même qu'au corollaire 3.4 qu'il existe un homomorphisme analytique de $\tilde{K}$ dans $\mathscr{F}_1(G^{(1)}_{\omega_1}, \mathscr{R}_{\tilde{K},\tilde{v}})$ et comme d'après les résultats classiques de Steinitz $\mathscr{R}_{\tilde{K},\tilde{v}}$ peut être identifié à un sous-corps de C il existe un homomorphisme analytique de $\mathscr{F}_1(G^{(1)}_{\omega_1}, \mathscr{R}_{\tilde{K},\tilde{v}})$ dans $H^{(1)}_{\omega_1}$, d'où notre assertion.

F. J. Rayner a montré dans [33], en utilisant la "valuation de l'ordre" introduite par Krull dans [26], que l'on peut utiliser les résultats de Kaplansky pour construire un homomorphisme compatible avec l'ordre d'un corps totalement ordonné F dans $\mathscr{F}(v(F\setminus\{0\}), \boldsymbol{R})$, v désignant la valuation de l'ordre sur F, pourvu que les éléments du corps résiduel de F pour la valuation de l'ordre possèdent une racine n^e pour tout n (si cette condition n'est pas vérifiée on peut cependant de même que dans [22] obtenir un résultat d'immersion analogue à condition d'introduire des "factors sets" dans le corps de séries formelles). On peut de même que plus haut montrer que si $\mathrm{Card}(F) \leqslant \aleph_\alpha$ il est possible en fait d'immerger F dans $\mathscr{F}_\alpha(v(F\setminus\{0\}), \boldsymbol{R})$ si $\alpha > 0$. Ceci permet en particulier d'étendre au cas d'un ordinal limite $\alpha > 0$ les propriétés universelles de $\mathscr{F}^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$ établies par l'auteur dans [13] dans le cas où α possède un prédecesseur.

4. Propriétés universelles de C_{ω_α}. Rappelons qu'un sous-anneau unitaire d'un corps commutatif K est appelé anneau de valuation quand l'ensemble de ses idéaux principaux est totalement ordonné par inclusion. A tout anneau de valuation $\mathscr{B}$ de K on peut associer une valuation v sur K telle que $\mathscr{B}$ coincide avec $\mathscr{A}_{K,v}$. J'énonce comme un lemme le classique résultat d'algèbre commutative suivant (je pense que ce résultat est dû à Chevalley, mais je l'ai trouvé dans Bourbaki où il est donné sans références):

LEMME 4.1 (Bourbaki [6], Chapitre VI, § 1, théorème 2). *Soit K un corps et soit h un homomorphisme d'un sous-anneau A de K dans un corps algébriquement clos L. Il existe alors un anneau de valuation $\mathscr{B}$ pour K et un homomorphisme h' de $\mathscr{B}$ dans L tel que $\mathscr{B}$ contienne A et que h' prolonge h.*

Démonstration. Voir [6], Chapitre VI.

On a alors le théorème suivant (χ_0 désignant l'unique caractère de C_{ω_α}):

THÉORÈME 4.2. *Soit A une algèbre complexe commutative intègre et unitaire possédant un caractère χ et soit α un ordinal > 0. Si $\mathrm{Card}(A) \leqslant \aleph_\alpha$, il existe un homomorphisme d'algèbre injectif φ de A dans C_{ω_α} vérifiant: $\chi_0\circ\varphi = \chi$.*

Démonstration. Soit K le corps des fractions de A, muni de la structure d'algèbre complexe induite par celle de A. D'après le lemme 4.1, il existe un anneau de valuation $\mathscr{B}$ de K contenant A et un homomorphisme χ' de $\mathscr{B}$ dans C prolongeant χ. Soit e l'unité de K. On a: $e \in \mathscr{B}$ et pour $\lambda \in C$, $b \in \mathscr{B}$: $\lambda\cdot b = (\lambda e)\cdot b \in \mathscr{B}$ ce qui prouve que $\mathscr{B}$ est une sous algèbre de K. En outre on a également pour $\lambda \in C$, $b \in \mathscr{B}$: $\chi'(\lambda\cdot b) = \chi'[(\lambda e)\cdot b] = \chi'(\lambda\cdot e)\chi'(b) = \chi(\lambda e)\cdot\chi'(b) = \lambda\chi'(b)$ et χ' est un homomorphisme d'algèbre de $\mathscr{B}$ dans C, c'est-à-dire un caractère de $\mathscr{B}$. D'autre part $\mathrm{Ker}\,\chi'$ est évidemment un idéal maximal de B et c'est donc l'unique idéal maximal de $\mathscr{B}$. Soit v une valuation sur K telle que l'anneau de valuation de K pour v coincide avec $\mathscr{B}$. Il est clair que la structure d'algèbre de K est compatible avec v au sens précisé au paragraphe précédent, et, $v(K\setminus\{0\})$ étant identifié à un sous groupe de $G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$ (on a: $\mathrm{Card}\,K = \mathrm{Card}\,A \leqslant \aleph_\alpha$), on peut considérer que v prend ses valeurs dans $G^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$. Il existe d'après le corollaire 3.4 un homomorphisme d'algèbre analytique ψ de K dans $H^{(\alpha)}_{\omega_\alpha}$ et on a pour $x \in A$: $V[\psi(x)] = v(x) \geqslant 0$ (A est inclus dans $\mathscr{B}$) d'où: $\psi(A) \subseteq C_{\omega_\alpha}$. D'autre part $\chi_0\circ\psi$ est un caractère non trivial de B qui coincide donc avec χ', c'est-à-dire que sa restriction à A coincide avec χ. Il suffit alors de poser: $\varphi = \psi|A$ pour obtenir l'homomorphisme cherché de A dans C_{ω_α}.

On a alors le corollaire suivant, α désignant toujours un ordinal > 0:

COROLLAIRE 4.2. *L'algèbre C'_{ω_α} contient une copie de toute algèbre complexe intègre non unitaire dont le cardinal est inférieur ou égal à $\aleph_\alpha$.*

Démonstration. Soit A une algèbre vérifiant les hypothèses du corollaire. On "adjoint l'unité" à A selon le procédé classique (voir [34], Chapitre 1); e désignant l'unité de l'algèbre $\tilde{A}$ ainsi obtenue, tout élément x de $\tilde{A}$ s'écrit de manière unique: $x = \lambda e + y$ avec $\lambda \in C$, $y \in A$; l'application $x \to \lambda$ est un caractère χ de $\tilde{A}$ dont le noyau coincide avec A et on a: $\mathrm{Card}(\tilde{A}) = \mathrm{Card}(A)$. Soient $x_1 = \lambda_1 e + y_1$ et $x_2 = \lambda_2 e + y_2$ deux éléments de $\tilde{A}$ dont le produit est nul. On a:

$$\lambda_1\lambda_2 e + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1 + y_1\cdot y_2 = 0 \quad \text{d'où: } \lambda_1\cdot\lambda_2 = 0,\ \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1 + y_1\cdot y_2 = 0.$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ on a: $y_1\cdot y_2 = 0$ et y_1 ou y_2 est nul, ce qui implique que x_1 ou x_2 est nul. Sinon supposons par exemple $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$. Comme A n'a pas d'unité, on peut trouver $z \in A$ vérifiant: $z + (y_2/\lambda_2)z \neq 0$ et comme $y_1(\lambda_2 z + y_2 z)$ est nul on a: $y_1 = 0$, $x_1 = 0$ et on voit que $\tilde{A}$ est intègre. D'après le théorème 4.1 il existe un homomorphisme d'algèbre injectif φ de $\tilde{A}$ dans C_{ω_α} vérifiant: $\chi = \chi_0\circ\varphi$ d'où: $\varphi(A) \subseteq \mathrm{Ker}(\chi_0) = C'_{\omega_\alpha}$, ce qui achève la démonstration.

5. Propriétés universelles de $L^1(\boldsymbol{R}^+, w)$ et normabilité de certaines algèbres intègres. On a montré dans [15] que toute algèbre de Banach complexe commutative radicale possédant une unité approchée bornée contient une copie de C'_{ω_1}. On déduit alors immédiatement du corollaire 4.3

le résultat suivant (qui n'a évidemment de sens que si on assume l'hypothèse du continu):

Théorème 5.1. *Soit $\mathscr{B}$ une algèbre de Banach complexe commutative et radicale. Si $\mathscr{B}$ possède une unité approchée bornée, $\mathscr{B}$ contient une copie de toute algèbre complexe commutative intègre non unitaire de cardinal $\aleph_1$.*

Soit $w\colon \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ une application mesurable possédant les propriétés suivantes: $(w(t))^{1/t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$; $w(s+t) \leqslant w(s)w(t)$ $(s, t \in \boldsymbol{R}^+)$ (l'application $t \to e^{-t^2}$ donne un exemple d'une telle fonction). Conformément à l'usage on note $L^1(\boldsymbol{R}^+, w)$ l'algèbre obtenue en munissant l'espace des classes de fonctions mesurables de $\boldsymbol{R}^+$ dans $\boldsymbol{C}$ égales presque partout vérifiant $\int_0^\infty |f(t)|w(t)\,dt < +\infty$ du produit de convolution sur $\boldsymbol{R}^+$ et de la norme $\|\cdot\|$ définie par la relation: $\|f\| = \int_0^\infty |f(t)|w(t)\,dt$. Il est bien connu que $L^1(\boldsymbol{R}^+, w)$ est une algèbre de Banach commutative séparable à unité approchée bornée, et c'est d'autre part une algèbre intègre en vertu du théorème de convolution de Titchmarsh. On a donc le curieux résultat suivant:

Corollaire 5.2. *Si on assume l'hypothèse du continu, $L^1(\boldsymbol{R}^+, w)$ est universelle dans la classe des algèbres complexes commutatives intègres non unitaires ayant la puissance du continu.*

On a d'autre part le:

Corollaire 5.3. (i) *Toute algèbre complexe commutative non unitaire et intègre de cardinal $\aleph_1$ possède une structure d'algèbre normée.*

(ii) *Pour qu'une algèbre complexe unitaire et intègre commutative de cardinal $\aleph_1$ possède une structure d'algèbre normée il faut et il suffit qu'elle possède un caractère non trivial.*

Démonstration. Il est bien connu que toute algèbre de Banach commutative unitaire, et par conséquent toute algèbre normée commutative unitaire, possède un caractère non trivial, ce qui fait que la condition de (ii) est bien nécessaire. Les autres assertions sont des conséquences immédiates du théorème 5.1 (le noyau d'un caractère non trivial d'une algèbre complexe commutative unitaire et intègre ne possède pas d'unité).

On va maintenant préciser le corollaire 5.3 dans certains cas. Soit $C[X_1, \ldots, X_n]$ l'algèbre das polynômes de n variables à coefficients dans $\boldsymbol{C}$. On dira qu'une partie $\mathscr{S}$ d'une algèbre complexe commutative A est algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$ si pour tout entier n et pour toute famille $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de n éléments distincts de $\mathscr{S}$ l'application $P[X_1, \ldots, X_n] \to P[x_1, \ldots, x_n]$ de $C[X_1, \ldots, X_n]$ dans A est injective. Il est facile de voir que toute partie de A algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$ est contenue dans une partie algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$ maximale et que une partie algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$ maximale de A est une base de transcendance du corps K des fractions de A sur la copie naturelle de $\boldsymbol{C}$ dans K si A est intègre. On va utiliser certains résultats de [13] pour établir le théorème suivant:

Théorème 5.4. *Soit $\mathscr{S}$ une partie algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$ maximale de C'_{ω_1} et soit $\mathscr{B}$ une algèbre normée. Si $\mathscr{B}$ contient une copie de C'_{ω_1} il existe pour toute application f de $\mathscr{S}$ dans $\boldsymbol{R}$ à valeurs strictement positives un homomorphisme d'algèbre injectif ψ de C'_{ω_1} dans $\mathscr{B}$ vérifiant: $\|\psi(x)\| = f(x)$ $(x \in \mathscr{S})$.*

Démonstration. Soit ψ_1 un homomorphisme injectif de C'_{ω_1} dans $\mathscr{B}$ et soit p la norme induite sur C'_{ω_1} via ψ_1 par la norme de $\mathscr{B}$. D'après le théorème 5.3 de [13] il existe une sous-algèbre $\mathscr{D}$ de C'_{ω_1} qui est topologiquement simple pour la topologie induite par p. Autrement dit il existe un homomorphisme injectif ψ_2 de C'_{ω_1} dans lui-même tel que C'_{ω_1} soit topologiquement simple pour la topologie définie par $p \circ \psi_2$.

D'autre part d'après le théorème 2.3 de (13) le groupe $G^{(1)}_{\omega_1}$ ne possède aucune suite coinitiale et cofinale et il existe une famille $(G_\xi)_{\xi<\omega_1}$ de sous-groupes totalement ordonnés de $G^{(1)}_{\omega_1}$ dont toute partie possède une suite coinitiale et cofinale telle que l'on ait: $G_0 = \{0\}$, $G^{(1)}_{\omega_1} = \bigcup_{\xi<\omega_1} G_\xi$; $G_\xi \subseteq G_{\xi'}$ $(0 \leqslant \xi \leqslant \xi' < \omega_1)$. Posons, pour $\xi < \omega_1$: $H_\xi = \mathscr{F}(G_\xi, \boldsymbol{C})$; $C_\xi = \{y \in H_\xi\colon V(y) \geqslant 0)$; $C'_\xi = \{y \in H_\xi\colon V(y) > 0\}$. On identifie H_ξ à sa copie canonique dans $H^{(1)}_{\omega_1}$ et on a alors: $H^{(1)}_{\omega_1} = \bigcup_{\xi<\omega_1} H_\xi$. D'autre part on notera K_ξ la clôture algébrique dans $H^{(1)}_{\omega_1}$ du sous-corps de $H^{(1)}_{\omega_1}$ engendré par $C_0 \cup [\mathscr{S} \cap H_\xi]$, ξ désignant toujours un ordinal dénombrable. De même que dans [14] on déduit de [28] que H_ξ est algébriquement clos pour $\xi < \omega_1$. Par conséquent $H^{(1)}_{\omega_1}$ est algébriquement clos et K_ξ l'est également pour $\xi < \omega_1$. Posons en outre: $L_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} K_\eta$ $(0 < \xi < \omega_1)$. Il est facile de voir que $\mathscr{S} \cap [K_\xi \setminus L_\xi]$ est une base de transcendance de K_ξ sur L_ξ. Comme $\mathscr{S}$ est inclus dans le corps algébriquement clos $\bigcup_{\xi<\omega_1} K_\xi$ et que $\mathscr{S}$ est une base de transcendance de $H^{(1)}_{\omega_1}$ sur C_0, on a: $H^{(1)}_{\omega_1} = \bigcup_{\xi<\omega_1} K_\xi$.

Soit $\xi > 0$ un ordinal dénombrable et supposons qu'on ait associé à tout élément η de $[0, \xi[$ un ordinal dénombrable $\mu(\eta)$ et un homomorphisme φ_η préservant la valuation de K_η dans $H_{\mu(\eta)}$ de façon que φ_0 soit l'identité sur $C_0 = H_0$ et que l'on ait pour $\eta < \eta' < \xi$: $\mu(\eta) < \mu(\eta')$; $\varphi_{\eta'}|K_\eta = \varphi_\eta$ et $\|\psi_1 \circ \psi_2 \circ \varphi_\eta(x)\| = f(x)$ $(x \in K_\eta, \eta < \xi)$.

Comme $[0, \omega_1[$ ne possède aucune suite cofinale il existe un ordinal dénombrable $\gamma > \xi$ vérifiant: $\gamma > \mu(\eta)$ $(\eta < \xi)$. Soit φ'_ξ l'homomorphisme de L_ξ dans H_γ défini par les relations: $\varphi'_\xi|K_\eta = \varphi_\eta$ $(\eta < \xi)$. On a: $V(K_\xi \setminus \{0\}) \subseteq G_\xi \subset G_\gamma$ et d'après le lemme 3.1 il existe un homomorphisme injectif φ''_ξ de K_ξ dans H_γ préservant la valuation qui prolonge φ'_ξ. Comme G_ξ ne possède aucune suite cofinale il existe $y \in C'_{\omega_1}$ tel que $V(y)$ majore strictement tous les éléments de G_ξ. Soit maintenant (y_n) une suite d'éléments de C'_γ

telle que la suite $(V(y_n))$ soit coinitiale dans l'ensemble des éléments strictement positifs de G_γ. Comme $y\cdot C'_{\omega_1}$ est partout dense dans C'_{ω_1} pour $p\circ\psi_2$ on peut construire pour tout n une suite $(z_{n,m})$ d'éléments de $y\cdot C'_{\omega_1}$ vérifiant: $\|\psi_1\circ\psi_2(y_n+z_{n,m})\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. Soit $\mu(\xi)$ un ordinal dénombrable supérieur à γ vérifiant: $z_{n,m}\in H_{\mu(\xi)}$ $(n, m\in \boldsymbol{N})$. Pour $x\in\mathscr{S}\cap(K_\xi\setminus L_\xi)$ il existe $n(x)\in\boldsymbol{N}$ et $u(x)\in C'_\gamma\subset C'_{\mu(\xi)}$ vérifiant: $\varphi''_\xi(x) = y_{n(x)}\cdot u(x)$ d'où:

$$\|(\psi_1\circ\psi_2)(\varphi''_\xi(x)-z_{n(x),m}\cdot u(x))\| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

On peut donc trouver un réel $\lambda(x)$ vérifiant:

$$\|(\psi_1\circ\psi_2)(\varphi''_\xi(x)-\lambda(x)\cdot z_{n(x),m(x)}\cdot u(x))\| = f(x),$$

$m(x)$ désignant un entier tel que $\|(\psi_1\circ\psi_2)(\varphi''_\xi(x)-z_{n(x),m(x)}\cdot u(x))\| < f(x)$.

Comme l'ensemble $\mathscr{S}\cap(K_\xi\setminus L_\xi)$ est algébriquement libre sur L_ξ il existe un unique homomorphisme φ'''_ξ de l'anneau $\mathscr{R}_\xi$ engendré par $L_\xi\cup[\mathscr{S}\cap(K_\xi\setminus L_\xi)]$ dans $H_{\mu(\xi)}$ vérifiant: $\varphi'''_\xi|L_\xi = \varphi'_\xi$; $\varphi'''_\xi(x) = \varphi''_\xi(x)+$ $+\lambda(x)\cdot z_{n(x),m(x)}\cdot u(x)$ $(x\in\mathscr{S}\cap[K_\xi\setminus L_\xi])$.

Pour $r\in\mathscr{R}_\xi$, on a: $\varphi'''_\xi(r)-\varphi''_\xi(r)\in y\cdot C'_{\omega_1}$ d'où: $V(\varphi'''_\xi(r)-\varphi''_\xi(r))$ $> V(y) > V(r) = V(\varphi''_\xi(r))$ soit: $V(\varphi'''(r)) = V(\varphi''(r)) = V(r)$ et φ'''_ξ, qui préserve la valuation, est injectif. On peut alors canoniquement prolonger φ'''_ξ par un homomorphisme préservant la valuation du corps engendré par $L_\xi\cup[\mathscr{S}\cap(K_\xi\setminus L_\xi)$ dans $H_{\mu(\xi)}$ et puisque $G_{\mu(\xi)}$ contient G_ξ il existe d'après le lemme 3.1 un homomorphisme préservant la valuation φ_ξ de K_ξ dans $H_{\mu(\xi)}$ prolongeant φ'''_ξ. On a $\varphi_\xi|K_\eta = \varphi_\eta$ $(\eta<\xi)$ et $\|(\psi_1\circ\psi_2\circ$ $\circ\varphi_\xi)(x)\| = f(x)$ $(x\in\mathscr{S}\cap K_\xi)$. D'après le principe de récurrence transfinie on peut donc associer à tout ordinal dénombrable ξ un homomorphisme préservant la valuation φ_ξ: $K_\xi\to H^{(1)}_{\omega_1}$ de façon que φ_0 soit l'identité sur $\boldsymbol{C}_0$ et que l'on ait: $\varphi_{\xi'}|K_\xi = \varphi_\xi$ $(\xi<\xi'<\omega_1)$, $\|(\psi_1\circ\psi_2\circ\varphi_\xi)(x)\| = f(x)$ $(x\in\mathscr{S}\cap H_\xi,\ \xi<\omega_1)$. Soit φ_{ω_1} l'homomorphisme de $H^{(1)}_{\omega_1} = \bigcup_{\xi<\omega_1} K_\xi$ dans lui-même défini par les relations: $\varphi_{\omega_1}|K_\xi = \varphi_\xi$ $(\xi<\omega_1)$. On a $\varphi_{\omega_1}(C'_{\omega_1})$ $\subseteq C'_{\omega_1}$ et φ_{ω_1} est un homomorphisme d'algèbre. Posons: $\varphi = \varphi_{\omega_1}|C'_{\omega_1}$ et $\psi = \psi_1\circ\psi_2\circ\varphi$. On a $\|\psi(x)\| = f(x)$ $(x\in\mathscr{S})$, et ceci achève la démonstration.

On a alors le:

Corollaire 5.5. *Soit A une algèbre complexe commutative intègre non unitaire de cardinal $\aleph_1$. Pour toute partie $\mathscr{S}$ algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$ de A il existe une norme d'algèbre sur A prenant des valeurs positives arbitrairement fixées sur $\mathscr{S}$.*

Démonstration. D'après le corollaire 4.2 il existe un homomorphisme injectif φ de A dans C'_{ω_1}, et $\varphi(\mathscr{S})$ est contenue dans une partie algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$ maximale $\mathscr{S}_1$ de C'_{ω_1}. Soit $\mathscr{B}$ une algèbre de Banach complexe commutative radicale possédant une unité approchée bornée.

D'après le résultat de [15] rappelé plus haut, $\mathscr{B}$ contient une copie de C'_{ω_1} et le corollaire se déduit immédiatement du théorème 5.4.

On appellera degré de transcendance sur $\boldsymbol{C}$ d'un corps K possédant une structure d'algèbre complexe le cardinal des bases de transcendance de K sur la copie naturelle de $\boldsymbol{C}$ dans K. On a le:

Corollaire 5.6. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre normée intègre de cardinal $\aleph_1$ et soit $\mathscr{B}$ une algèbre de Banach complexe commutative radicale possédant une unité approchée bornée. Si le degré de transcendance sur $\boldsymbol{C}$ du corps des fractions de $\mathscr{A}$ est infini, il existe un homomorphisme injectif discontinu de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}\oplus\boldsymbol{C}e$.*

Démonstration. Supposons $\mathscr{A}$ non unitaire, et soit $\mathscr{S}$ une partie algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$ maximale de A. Comme $\mathscr{S}$ est une base de transcendance sur $\boldsymbol{C}$ du corps des fractions de $\mathscr{A}$, $\mathscr{S}$ est infinie et, (y_n) désignant une suite quelconque d'éléments distincts de $\mathscr{S}$, il existe d'après la démonstration du corollaire précédent un homomorphisme injectif ψ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}$ vérifiant: $\|\psi(y_n)\| = n\|y_n\|$ $(n\in\boldsymbol{N})$. Si $\mathscr{A}$ est unitaire elle possède un caractère non trivial χ et le corps des fractions de $\mathrm{Ker}(\chi)$ coincide avec celui de $\mathscr{A}$. D'après ce qui précède il existe un homomorphisme injectif discontinu de $\mathrm{Ker}(\chi)$ dans $\mathscr{B}$ que l'on peut prolonger par un homomorphisme injectif de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}\oplus\boldsymbol{C}e$, et ceci achève la démonstration.

Remarque 5.7. (i) Le théorème 5.4 reste valable en remplaçant C'_{ω_1} par C'_{ω_α}, α désignant un ordinal possédant un prédecesseur arbitraire. Cette observation est sans intérêt si on assume l'hypothèse du continu car l'argument utilisé pour établir le théorème 7.1 de [12] montre que C'_{ω_2} n'est pas normable dans ce cas. Par contre si on suppose $2^{\aleph_0}>\aleph_1$ il n'y a *à priori* aucune raison pour que C'_{ω_α} ne soit pas normable pour certains ordinaux $\alpha\geqslant 2$.

(ii) En appliquant le lemme 3.1 de même que dans la démonstration du théorème 5.4 et en utilisant le fait que H_ξ est un corps valué maximal pour $\xi<\omega_1$, on voit aisément que pour toute copie $\boldsymbol{C}_1$ dans $H^{(1)}_{\omega_1}$ du corps résidual de $H^{(1)}_{\omega_1}$ pour V et pour tout isomorphisme φ_0 de $\boldsymbol{C}_0$ sur $\boldsymbol{C}_1$ il existe un isomorphisme de corps φ préservant la valuation de $H^{(1)}_{\omega_1}$ sur lui-même dont la restriction à $\boldsymbol{C}_0$ coincide avec φ_0. De même pour toute copie $\boldsymbol{R}_1$ de $\boldsymbol{R}$ dans $\mathscr{F}^{(1)}_{\omega_1}$ et pour tout isomorphisme ψ_0 de $\boldsymbol{R}_0$ sur $\boldsymbol{R}_1$ il existe un isomorphisme préservant l'ordre ψ de $\mathscr{F}^{(1)}_{\omega_1}$ sur lui-même dont la restriction à $\boldsymbol{R}_0$ coincide avec ψ_0. Compte tenu du fait que $\mathscr{F}^{(1)}_{\omega_1}$ est un corps ordonné maximal de type η_1, l'amélioration de Johnson du théorème d'isomorphisme d'Erdös, Gillman et Henriksen (voir [11], [13] et [22]) peut donc se déduire directement de l'énoncé d'Erdös, Gillman et Henriksen et de la thèse de Kaplansky, moyennant une récurrence transfinie de routine.

(iii) Soit x un élément non nul d'une algèbre complexe commutative non unitaire et intègre A de cardinal $\aleph_1$ et soit $\mathfrak{b}$ un "élément de Cohen" ([15], définition 2.4) d'une algèbre de Banach commutative séparable et radicale $\mathscr{B}$ possédant une unité approchée bornée. On peut construire l'homomorphisme injectif φ de A dans $\mathscr{B}$ obtenu au théorème 5.1 de façon à avoir: $\varphi(x) = \mathfrak{b}$.

En effet soit v une valuation sur le corps des fractions K de A compatible avec la structure d'algèbre complexe de K et vérifiant: $A \subseteq \mathscr{M}_{K,v}$. La notation X^d désignant pour $d \in v(K\setminus\{0\})$ l'élément de $\mathscr{F}(v(K\setminus\{0\}), C)$ égal à 1 en d et nul hors de $\{d\}$, il résulte immédiatement de la démonstration du théorème 3.3 qu'il existe un homomorphisme d'algèbre analytique φ_1 de K dans $\mathscr{F}(v(K\setminus\{0\}), C)$ vérifiant: $\varphi_1(x) = X^{v(x)}$. Il existe donc un homomorphisme d'algèbre injectif φ_2 de A dans C'_{ω_1} vérifiant: $\varphi_2(x) = X^\delta$, δ désignant un élément convenable de T'_{ω_1}.

Soit ξ un ordinal dénombrable tel que T'_ξ contienne δ. D'après le lemme 3.5 de [15] il existe une application injective ψ_ξ de T'_ξ dans l'ensemble des éléments de Cohen de $\mathscr{B}$ vérifiant: $\psi_\xi(\delta) = \mathfrak{b}$, $\psi_\xi(rd+r'd') = \psi_\xi(d)^r\cdot\psi_\xi(d')^{r'}$ $(d, d' \in T'_\xi, r, r' \in \boldsymbol{Q}^+)$. En procédant comme dans la démonstration du théorème 3.6 de [15] on obtient alors une application injective ψ de T'_{ω_1} dans l'ensemble des éléments de Cohen de $\mathscr{B}$ vérifiant: $\psi(d+d') = \psi(d)\cdot\psi(d')$ $(d, d' \in T'_{\omega_1})$; $\psi|T'_\xi = \psi_\xi$. D'après le théorème 3.1 de [14], il existe un homomorphisme d'algèbre injectif φ_3 de C'_{ω_1} dans $\mathscr{B}$ vérifiant: $\varphi_3(X^d) = \psi(d)$ $(d \in T'_{\omega_1})$.

Posons: $\varphi = \varphi_3\circ\varphi_2$. On a $\varphi(x) = \varphi_3(X^\delta) = \psi(\delta) = \psi_\xi(\delta) = \mathfrak{b}$. Ceci établit notre assertion.

6. Homomorphismes discontinus des algèbres de Banach commutatives séparables. On va tout d'abord établir le lemme élémentaire suivant:

LEMME 6.1. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative et soit I un idéal premier de $\mathscr{A}$. Si $\dim(\mathscr{A}/I) > 1$, le degré de transcendance sur $\boldsymbol{C}$ du corps des fractions de $\mathscr{A}/I$ est au moins $2^{\aleph_0}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{A}(D)$ l'algèbre des fonctions holomorphes à l'intérieur et continues à la frontière du disque unité du plan complexe et soit $\mathscr{T}$ une base de Hamel de $\boldsymbol{R}$ sur $\boldsymbol{Q}$ dont tous les éléments sont positifs. Pour $t \in \mathscr{T}$, soit x_t l'élément de $\mathscr{A}(D)$ défini par la relation: $x_t(z) = \exp(tz)$ $(z \in D)$. Soit $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ une famille de n éléments distincts de $\mathscr{T}$ et soit $P[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme de n variables à coefficients complexes non réduit à une constante. L'application qui à un monôme $X_{i_1}^{n_1}\ldots X_{i_k}^{n_k}$ $(n_1, \ldots, n_k \in \boldsymbol{N}, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n)$ de $P[X_1, \ldots, X_n]$ associe $n_1\cdot t_{i_1} + \ldots + n_k\cdot t_{i_k}$ est injective et, les fonctions $x_1, \ldots, x_{t_n}$ étant canoniquement prolongées au plan complexe on voit qu'il existe un monôme de $P[x_{t_1}(z), \ldots, x_{t_n}(z)]$ qui domine tous les autres quand z tend vers l'infini sur la demi-droite des réels positifs. Par conséquent $P[x_{t_1}(z), \ldots, x_{t_n}(z)]$

ne s'annule sur aucun ouvert de C et $P[x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}]$ est un élément non nul de $\mathscr{A}(D)$. La famille $\{x_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ est donc algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$.

Soit maintenant $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach commutative complexe quelconque et soit I un idéal premier de $\mathscr{A}$ de codimension supérieure à 1. Si $\mathscr{A}/I$ n'est pas unitaire, I est un idéal premier de $\mathscr{A}\oplus Ce$ et le corps des fractions de $\mathscr{A}\oplus Ce/I$ s'identifie à celui de $\mathscr{A}/I$. On peut donc se limiter au cas où $\mathscr{A}$ possède une unité e_1 modulo I.

Dans ce cas I est contenu dans un idéal "maximal modulaire" J qui est le noyau d'un caractère non trivial χ de $\mathscr{A}$, qui induit un caractère $\overline{\chi}$ sur l'algèbre quotient $\mathscr{A}/I$ (voir [34], Ch. III, § 1). On a: $\chi(e_1) = 1$; I est strictement inclus dans J et il existe $a \in \mathscr{A}$ vérifiant: $\chi(a) = 0$, $a \notin I$, $\|a\| < 1$. Soit θ l'application canonique de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{A}/I$. Pour $x \in \mathscr{A}(D)$ on notera $(\lambda_n(x))_{n\geqslant 0}$ la suite d'éléments de $\boldsymbol{C}$ vérifiant: $x(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n(x)\cdot z^n$ $(|z| < 1)$. Posons: $\psi(x) = \theta[\lambda_0(x)(e_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x)a^n]$. On définit ainsi un homomorphisme d'algèbre de $\mathscr{A}(D)$ dans $\mathscr{A}/I$. Pour $x \in \operatorname{Ker}(\psi)$, on a:

$$\lambda_0(x)e_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x)a^n \in I \subset \operatorname{Ker}(\psi) \qquad \text{d'où:}\quad \lambda_0(x) = \lambda_0(x)\cdot\chi(e_1) = 0$$

soit:

$$a\Big(\lambda_1(x)\cdot e_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n(x)\cdot a^{n-1}\Big) \in I, \qquad \text{et} \qquad \lambda_1(x)e_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\lambda_n(x)\cdot a^{n-1} \in I,$$

d'où de même: $\lambda_1(x) = 0$. En itérant ce procédé on voit que $\lambda_n(x)$ est nul pour tout n et par conséquent que x est nul. L'homomorphisme ψ est donc injectif et la famille $(\psi(x_t))_{t\in\mathscr{T}}$ est algébriquement libre sur $\boldsymbol{C}$, ce qui établit le lemme.

On a alors le théorème suivant (le fait qu'il existe un homomorphisme discontinu de toute algèbre de Banach commutative possédant une infinité de caractères avait été établi avant moi par G. Dales, voir [9]):

THÉORÈME 6.2. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative et soit $\mathscr{B}$ une algèbre de Banach complexe commutative radicale possédant une unité approchée bornée;*

(i) *Si on assume l'hypothèse du continu, tout idéal premier I de $\mathscr{A}$ tel que* $\operatorname{Card}(\mathscr{A}/I) = 2^{\aleph_0}$, $\dim(\mathscr{A}/I) > 1$ *est le noyau d'un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{B}\oplus Ce$.*

(ii) *De tels idéaux existent si $\mathscr{A}$ possède une infinité de caractères, ou si $\mathscr{A}$ est séparable et si son nilradical est de codimension infinie.*

Démonstration. (i) Si l'algèbre quotient $\mathscr{A}/I$ est unitaire elle possède un caractère d'après le résultat classique rappelé plus haut. Compte tenu du lemme 6.1, la première assertion est une conséquence immédiate du théorème 5.1 si I n'est pas fermé et du corollaire 5.6 si I est fermé.

(ii) On peut se limiter au cas où $\mathscr{A}$ possède une unité (l'adjonction de l'unité ne change pas le nilradical et n'ajoute qu'un caractère, et si I est un idéal premier nonmaximal de l'algèbre obtenue en adjoignant l'unité à $\mathscr{A}$, I est de codimension infinie d'après le lemme 6.1 et $\mathscr{A}\cap I$ est un idéal premier de $\mathscr{A}$ de codimension infinie dans $\mathscr{A}$). Si $\mathscr{A}$ possède une infinité de caractères il existe d'après un résultat bien connu de Kaplansky ([25], Lemme 7) un élément y de $\mathscr{A}$ dont le spectre est infini et, quitte à retrancher à y le produit de l'unité par un scalaire convenable, on peut supposer que 0 est un point d'accumulation de $\mathrm{Spec}(y)$. Il existe alors une suite (χ_n) de caractères de $\mathscr{A}$ vérifiant: $\chi_n(y)\neq 0$ $(n\in \boldsymbol{N})$; $\chi_n(y)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Soit χ un point d'accumulation de la suite (χ_n) dans $\mathrm{Spec}(\mathscr{A})$. Posons: $J=\bigcap_{n\in\boldsymbol{N}}\mathrm{Ker}(\chi_n)$; $S=\{sy^k\}_{\substack{s\notin\mathrm{Ker}(\chi)\\ k\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}}}$. Comme $\chi(y)$ est un point d'accumulation de la suite $(\chi_n(y))$, y appartient à $\mathrm{Ker}(\chi)$. Soit $s\notin\mathrm{Ker}(\chi)$. Comme $\chi(s)$ est un point d'accumulation de la suite $(\chi_n(s))$, il existe un entier n tel que $\chi_n(s)$ soit non nul et on a, pour tout entier $k\geqslant 0$: $\chi_n(sy^k)=\chi_n(s)[\chi_n(y)]^k\neq 0$ d'où: $S\cap J=\emptyset$. Comme S est stable par produit il existe d'après un résultat bien connu d'algèbre commutative un idéal premier I de $\mathscr{A}$ contenant J et ne rencontrant pas S. On a donc: $I\subseteq\mathrm{Ker}(\chi)$, $y\notin I$ et puisque y appartient à $\mathrm{Ker}(\chi)$ l'idéal I n'est pas maximal. L'application $x\to\{\chi_n(x)\}_{n\in\boldsymbol{N}}$ est un homomorphisme de $\mathscr{A}$ dans l^∞ dont le noyau coincide avec J et on a: $\mathrm{Card}(\mathscr{A}/I)\leqslant\mathrm{Card}(\mathscr{A}/J)\leqslant\mathrm{Card}(l^\infty)=2^{\aleph_0}$ d'où: $\mathrm{Card}(\mathscr{A}/I)=2^{\aleph_0}$ ce qui achève la démonstration quand $\mathscr{A}$ possède une infinité de caractères.

Supposons maintenant que $\mathscr{A}$ est séparable et que son nilradical $\mathscr{R}_1$ est de codimension infinie. On peut se limiter au cas où $\mathscr{A}$ ne possède qu'un nombre fini de caractères. Comme $\mathscr{R}_1$ coincide avec l'intersection des idéaux premiers de $\mathscr{A}$ ([6], Chapitre II, §2, proposition 13), $\mathscr{A}$ possède alors un idéal premier I non-maximal et puisque $\mathscr{A}$ est séparable on a: $\mathrm{Card}(\mathscr{A}/I)=\mathrm{Card}(\mathscr{A})=2^{\aleph_0}$, ce qui achève la démonstration.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les algèbres de Banach commutatives séparables dont tout homomorphisme dans $L^1(\boldsymbol{R}^+,w)\oplus\boldsymbol{C}e$ est continu:

Corollaire 6.3. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative séparable. Si on assume l'hypothèse du continu, les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Tout homomorphisme de $\mathscr{A}$ dans $L^1(\boldsymbol{R}^+,w)\oplus\boldsymbol{C}e$ est continu.*

(b) *Le nilradical de $\mathscr{A}$ est de codimension finie dans $\mathscr{A}$.*

Démonstration. D'après le théorème 6.2, il suffit de vérifier que (b) implique (a). Si le nilradical $\mathscr{R}_1$ de $\mathscr{A}$ est de codimension finie dans $\mathscr{A}$

on voit de même qu'au section 2 que l'on a: $\mathscr{R}_1=\mathrm{Rad}(\mathscr{A})$, et $\mathscr{R}_1$ est fermé dans $\mathscr{A}$. Soit φ un homomorphisme de $\mathscr{A}$ dans $L^1(\boldsymbol{R}^+,w)\oplus Ce$. Comme $L^1(\boldsymbol{R}^+,w)$ est intègre, $\varphi(\mathscr{R}_1)$ est réduit à $\{0\}$ et on a: $\varphi=\psi\circ Q$, Q désignant l'application canonique de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{A}/\mathscr{R}_1$ et ψ un homomorphisme de $\mathscr{A}/\mathscr{R}_1$ dans $L^1(\boldsymbol{R}^+,w)\oplus Ce$. L'homomorphisme ψ est automatiquement continu puisque $\mathscr{A}/\mathscr{R}_1$ est de dimension finie et φ l'est aussi, ce qui achève la démonstration (on pourrait déduire du théorème de Feldman cité au section 2 que l'on a en fait soit $\varphi(\mathscr{A})=Ce$, soit $\varphi(\mathscr{A})=\{0\}$).

On a en particulier le:

Corollaire 6.4. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative radicale et séparable. Si on assume l'hypothèse du continu, les trois conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Tout homomorphisme de $\mathscr{A}$ dans $L^1(\boldsymbol{R}^+,w)$ est continu.*

(b) *L'image de $\mathscr{A}$ par tout homomorphisme de $\mathscr{A}$ dans $L^1(\boldsymbol{R}^+,w)$ est réduite à $\{0\}$.*

(c) *$\mathscr{A}$ est nilpotente.*

Démonstration. L'implication (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) est triviale. D'autre part si $\mathscr{A}$ n'est pas nilpotente ce n'est pas une nilalgèbre d'après le résultat de S. Grabiner cité au section 2 et le quotient de $\mathscr{A}$ par son nilradical $\mathscr{R}_1$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Si $\mathscr{A}/\mathscr{R}_1$ etait de dimension finie on aurait $\mathscr{R}_1=\mathrm{Rad}(\mathscr{A})$ et $\mathscr{A}/\mathscr{R}_1$ qui serait semi-simple possèderait une unité d'après le théorème de structure de Wedderburn, ce qui est absurde puisque $\mathscr{A}$ ne peut avoir d'idéal modulaire. Par conséquent $\mathscr{A}$ possède un idéal premier I de codimension infinie et puisque I n'est pas modulaire c'est le noyau d'un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $L^1(\boldsymbol{R}^+,w)$, ce qui établit le corollaire.

On a enfin le:

Théorème 6.5. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative séparable de dimension infinie. Si on assume l'hypothèse du continu, il existe un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $L^1_*(0,1)\oplus Ce$.*

Démonstration. Comme $L^1_*(0,1)$ possède une unité approchée bornée, le théorème résulte immédiatement du corollaire 2.5 et du théorème 6.2.

De même que plus haut, on déduit du théorème 6.5 le:

Corollaire 6.6. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre de Banach complexe commutative radicale et séparable de dimension infinie. Si on assume l'hypothèse du continu, il existe un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ dans $L^1_*(0,1)$.*

Remarque 6.7. (i) Compte tenu de la remarque faite dans l'introduction, on peut déduire de la construction de G. Dales que les résultats ci-dessus restent valables en remplaçant $L^1_*(0,1)$ par l'algèbre de convolution $C^*(0,1)$.

(ii) Il ressort clairement des démonstrations des théorèmes 2.4 et 6.2 que si une algèbre de Banach commutative complexe $\mathscr{A}$ vérifie l'hypothèse du théorème 2.4 ou l'une des hypothèses du théorème 6.2 on peut moyennant l'hypothèse du continu trouver une suite (y_n) d'éléments de $\mathscr{A}$ telle que pour toute suite (β_n) de réels positifs on puisse construire un homomorphisme φ de $\mathscr{A}$ dans $L^1_*(0,1)\oplus Ce$ vérifiant: $\|\varphi(y_n)\| = \beta_n$ $(n \in \boldsymbol{N})$. Ceci permet en fait de construire pour toute norme p définie sur $\mathscr{A}$ un homomorphisme discontinu de $\mathscr{A}$ munie de p dans $L^1_*(0,1)\oplus Ce$.

References

[1] G. R. Allan, *Embedding the algebra of formal power series in a Banach algebra*, Proc. London Math. Soc. 25 (1972), pp. 329–340.

[2] N. L. Alling, *On ordered divisible groups*, Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1960), pp. 498–514.

[3] W. G. Bade and P. C. Curtis, *Homomorphisms of commutative Banach algebras*, Amer. J. Math. 82 (1960), pp. 598–608.

[4] —, — *Prime ideals and automatic continuity problems for Banach algebras*, J. Func. Analysis 29 (1978), pp 88–103.

[5] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Ergebnisse Math. 80, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973.

[6] N. Bourbaki, *Algèbre commutative*, Acta Sci. Ind., Hermann, Paris 1960.

[7] J. P. R. Christensen, *Codimension of some subspaces in a Fréchet algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), pp. 276-278.

[8] H. G. Dales, *A discontinuous homomorphism from $C(X)$*, Amer. J. Math., (3) 101 (1979), pp. 647–734.

[9] — *Discontinuous homomorphisms from topological algebras*, (3) 101 (1979), pp. 635–646.

[10] P. G. Dixon, *Non-separable Banach algebras whose squares are pathological*, J. Func. Analysis 26 (1977), pp. 190–200.

[11] P. Erdös, L. Gillman, and M. Henriksen, *An isomorphism theorem for real-closed fields*, Ann. of Math. 6 (1955), pp. 542–554.

[12] J. Esterle, *Semi-normes sur $\mathscr{C}(K)$*, Proc. London Math. Soc., (3) 36 (1978), pp. 27–45.

[13] — *Solution d'un problème d'Erdös, Gillman et Henriksen et applications à l'étude des homomorphismes de $\mathscr{C}(K)$*, Acta Math. (Hungarica), 30 (1977), pp. 113–127.

[14] — *Sur l'existence d'un homomorphisme discontinu de $\mathscr{C}(K)$*, Proc. London Math. Soc., (3) 36 (1978), pp. 46–58.

[15] — *Injection de semi-groupes divisibles dans des algèbres de convolution et construction d'homomorphismes discontinus de $\mathscr{C}(K)$*, ibid. (3) 36 (1978), pp. 59–85.

[16] — *Remarque sur les théorèmes d'immersion de Hahn et Hausdorff et sur les corps de séries formelles*, à paraître.

[17] C. Feldman, *The Wedderburn principal theorem in Banach algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 2 (1951), pp. 771–777.

[18] L. Gillman, *Some remarks on η_α-sets*, Fund. Math. 43 (1956), pp. 77–82.

[19] S. Grabiner, *The nilpotency of Banach nil algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), p. 510.

[20] H. Hahn, *Über die nichtarchimedischen Grössensysteme*, S. B. Akad. Wiss. Wien, IIa. 116 (1907), pp. 601–655.

[21] F. Hausdorff, *Grunzüge der Mengenlehre*, Leipzig 1914.

[22] B. J. E. Johnson, *Norming $\mathscr{C}(\Omega)$ and related algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976), pp. 37–58.

[23] I. Kaplansky, *Maximal fields with valuations*, Duke Math. J. 9 (1942), pp. 303–321.

[24] — *Normed algebras*, ibidem 16 (1949), pp. 399–418.

[25] — *Ring isomorphisms of Banach algebras*, Canadian J. Math. 6 (1954), pp. 374–381.

[26] W. Krull, *Allgemeine Bewertungstheorie*, J. für Math. 167 (1932), pp. 160–196.

[27] R. J. Loy, *Multilinear mappings and Banach algebras*, J. London Math. Soc. (2) 14 (1976), pp. 423–429.

[28] S. MacLane, *The universality of power series fields*, Bull. Amer. Math. Soc. 45 (1939), pp. 888–890.

[29] — *The uniqueness of the power series representations of certain fields with valuations*, Ann. of Math. 39 (1938), pp. 370–382.

[30] B. H. Neumann, *On ordered division rings*, Trans. Amer. Math. Soc. 66 (1949), pp. 202–252.

[31] A. Ostrowski, *Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper*, Math. Z. 39 (1935), pp. 384–385.

[32] F. J. Rayner, *Gravett's proof of a theorem of Krull*, Quart. J. Math. Oxford (3) 26 (1975), pp. 384–385.

[33] — *Corps ordonnés*, Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, année 1975–1976.

[34] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, New York 1960.

[35] O. F. G. Schilling, *The theory of valuation*, Mathematical Surveys 4 (1950).

[36] W. Sierpiński, *Sur une propriété des ensembles ordonnés*, Fund. Math. 5 (1949), pp. 14–19.

[37] A. W. Tullo, *Conditions on Banach algebras which imply finite dimensionality*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 20 (1976), pp. 1–5.

[38] A. M. Sinclair, *Bounded approximate identities, factorization, and a convolution algebra*, J. Func. Analysis 29 (1978), pp. 308–318.

[39] — *Homomorphisms from $C_0(\boldsymbol{R})$*, J. London Math. Soc. 11 (1975), pp. 165–174.

LABORATOIRE ASSOCIE AU C.N.R.S.
U.E.R DE MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
341, cours de la Libération
33405 — Talence, France

Received January 3, 1977
Revised version November 2, 1977 (1242)