STUDIA MATHEMATICA, T. LXVI. (1979)

Ein Homotopieerweiterungssatz für konzentrierende mengenwertige Abbildungen in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen

von

SIEGFRIED HAHN (Dresden)

Abstract. In this paper we state a Homotopy Extension Theorem for concentrative multivalued mappings in locally convex spaces which are in general not necessarily metrizable. With this theorem we can prove the Theorem on Antipodes for concentrative multivalued mappings in (non-metrizable) locally convex spaces.

1. Einleitung. Bekanntlich gibt es zu der von J. Leray und J. Schauder [21] 1934 geschaffenen Theorie nichtlinearer Operatorengleichungen in unendlichdimensionalen normierten Räumen zwei Zugänge. Der eine benutzt den Begriff des Abbildungsgrades (oder der Drehung im Sinne von [23]) und dem anderen liegt ein Homotopieerweiterungssatz zugrunde. Der erste Zugang ist der klassische, er wurde von Leray und Schauder verwendet. Der zweite wurde 1958 von A. Granas entwickelt [3]. Granas konnte damit ohne Verwendung des Abbildungsgrades alle wichtigen Ergebnisse der Leray–Schauder-Theorie beweisen (vgl. [4]). Die in [21], [4] betrachteten Abbildungen sind kompakte Vektorfelder in normierten Räumen. In den letzten Jahren konnte der Abbildungsgrad einerseits für allgemeine topologische Vektorräume eingeführt werden ([18], [8], [10], [14]), und andererseits wurde er für umfangreichere Klassen von Abbildungen bereitgestellt. Dies gelang z.B. für mengenwertige kompakte Vektorfelder (s. z.B. [16], [22]), für limeskompakte bzw. verdichtende Vektorfelder in lokalkonvexen Räumen (s. z.B. [26]) und für mengenwertige verdichtende Vektorfelder in metrisierbaren lokalkonvexen Räumen [(24], [20]). Die Entwicklung der Granas-Theorie verlief indessen nicht so stürmisch. Sie wurde für kompakte Vektorfelder auf allgemeine topologische Vektorräume in [15] teilweise und in [6] vollständig übertragen. Für mengenwertige kompakte Vektorfelder konnte der Granas-Zugang zur Leray–Schauder-Theorie (für lokalkonvexe Räume) ebenfalls durchgeführt werden [2], [17], während für verdichtende Abbildungen dies bisher nicht bekannt ist. In der vorliegenden Arbeit werden wir einen Homotopieerweiterungssatz für verdichtende (bei uns "konzentrierende") mengenwertige Abbildungen vorstellen, der die Übertragung einiger Ergebnisse der Leray–Schauder-Theorie auf diese Klasse von Abbildungen in (nicht notwendig metrisierbaren) lokalkonvexen Räumen ohne Verwendung des Abbildungsgrades möglich macht. Da bisher keine Arbeit bekannt ist, in der Begriff des Abbildungsgrades für mengenwertige verdichtende Abbildungen in nichtmetrisierbaren lokalkonvexen Räumen eingeführt wurde, können wir mit unserem Homotopieerweiterungssatz auch neue Ergebnisse beweisen, die bisher nur für metrisierbare Räume bekannt waren.

2. Bezeichnungen und Begriffe. Es seien X und Y zwei separierte topologische Räume, Y Teilmenge eines Vektorraumes und $\mathfrak{R}(Y)$ das System aller nichtleeren, abgeschlossenen und konvexen Teilmengen von Y. Eine Abbildung $F\colon X \to \mathfrak{R}(Y)$ nennen wir mengenwertig. $F\colon X \to \mathfrak{R}(Y)$ heißt nach oben halbstetig auf X, wenn für jedes $x_0 \in X$ folgendes gilt. Zu jeder offenen Teilmenge W von Y mit $F(x_0) \subset W$ existiert eine Umgebung U von x_0, so daß $F(U) \subset W$ gültig ist. Die (mengenwertige) Abbildung $F\colon X \to \mathfrak{R}(Y)$ heiße kompakt, wenn F auf X nach oben halbstetig und $F(X)$ eine relativ kompakte Teilmenge von Y ist. Für ein genaueres Studium von nach oben halbstetigen und kompakten mengenwertigen Abbildungen verweisen wir auf [1], [16].

Für die nächsten zwei Definitionen orientieren wir uns vor allem an den Arbeiten [26], [24], [13].

Definition 1. Es seien E ein reeller, separierter lokalkonvexer topologischer Vektorraum, $\mathfrak{M}$ ein System von Teilmengen von E, das mit jeder Menge $M \in \mathfrak{M}$ auch deren abgeschlossene, konvexe Hülle $\overline{\mathrm{co}}[M]$ enthält. Weiter sei $(A, \leqslant)$ eine halbgeordnete Menge. Als Nichtkompaktheitsmaß (im folgenden NKM abgekürzt) in E bezeichnet man jede Funktion $\psi\colon \mathfrak{M} \to A$, für die $\psi(\overline{\mathrm{co}}[\Omega]) = \psi(\Omega)$ $(\Omega \in \mathfrak{M})$ gilt.

Wir nennen das NKM ψ monoton, wenn mit Ω auch jede Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ zu $\mathfrak{M}$ gehört und $\psi(\Omega') \leqslant \psi(\Omega)$ gilt, symmetrisch, wenn aus $\Omega \in \mathfrak{M}$ auch $(-\Omega) \in \mathfrak{M}$ folgt und $\psi(\Omega) = \psi(-\Omega)$ ist. Das NKM ψ heiße in unserer Arbeit regulär, wenn für beliebiges $\Omega \in \mathfrak{M}$ und $x \in E$ die Menge $\{x\} \cup \Omega$ zu $\mathfrak{M}$ gehört und die Gleichheit $\psi(\{x_0\} \cup \Omega) = \psi(\Omega)$ besteht. ψ heiße vereinigungstreu, wenn mit Ω_1 und Ω_2 auch $\Omega_1 \cup \Omega_2$ zu $\mathfrak{M}$ gehört und $\psi(\Omega_1 \cup \Omega_2) = \max\{\psi(\Omega_1), \psi(\Omega_2)\}$ gilt. Die wichtigsten Beispiele für NKM mit allen genannten Eigenschaften bilden das Kuratowskische und das Hausdorffsche NKM (s. z.B. [26]) sowie das in der Arbeit [9] eingeführte NKM.

Definition 2. Es seien E, $\mathfrak{M}$, A wie in Definition 1 gegeben. Weiter sei $\psi\colon \mathfrak{M} \to A$ ein NKM in E, M eine Teilmenge von E und B eine beliebige Menge. Die auf $M \times B$ nach oben halbstetige Funktion $F\colon M \times B \to \mathfrak{R}(E)$ heiße (ψ)-konzentrierend, wenn für jedes $\Omega \subset M$ sowohl Ω als auch $F(\Omega \times B)$ zu $\mathfrak{M}$ gehört und wenn die Ungleichung $\psi(\Omega) \leqslant \psi(F(\Omega \times B))$ nur für relativ kompakte Mengen $F(\Omega \times B)$ bestehen kann.

In unseren weiteren Ausführungen werden wir für B nur das Intervall $[0, 1]$ oder die Menge $\{0\}$ (0 bezeichne das Nullelement von E) setzen und im letzteren Falle $M \times \{0\}$ mit M identifizieren.

Bekanntlich enthält die Klasse der konzentrierenden Abbildungen echt die der kompakten. Genauere Informationen erhält man hierzu z.B. in [26]. Sei wieder E ein lokalkonvexer Raum, M, S Teilmengen von E sowie B eine beliebige Menge. Wir bezeichnen mit $C(M \times B, S, \mathfrak{R}(E))$ bzw. mit $V^{(\psi)}(M \times B, S, \mathfrak{R}(E))$ die Klasse aller kompakten bzw. (ψ)-konzentrierenden Abbildungen $H\colon M \times B \to \mathfrak{R}(E)$, für die $H(M \times B) \subset S$ gilt. Unter den Symbolen $C_0(M \times B, S, \mathfrak{R}(E))$ bzw. $V_0^{(\psi)}(M \times B, S, \mathfrak{R}(E))$ verstehen wir die jeweiligen Teilklassen der fixpunktfreien Abbildungen (d.h., für die $x \notin H(x, t)$ für alle $x \in M$, $t \in B$ gilt). Zwei Abbildungen F_1 und F_2 aus $C_0(M, S, \mathfrak{R}(E))$ bzw. aus $V_0^{(\psi)}(M, S, \mathfrak{R}(E))$ heißen homotop in $C_0(M, S, \mathfrak{R}(E))$ bzw. in $V_0^{(\psi)}(M, S, \mathfrak{R}(E))$, wenn es eine Abbildung H aus $C_0(M \times [0, 1], S, \mathfrak{R}(E))$ bzw. aus $V_0^{(\psi)}(M \times [0, 1], S, \mathfrak{R}(E))$ gibt, so daß die Beziehungen $H(x, 0) = F_1(x)$ $(x \in M)$, $H(x, 1) = F_2(x)$ $(x \in M)$ und $x \notin H(x, t)$ $(x \in M, t \in [0, 1])$ gelten.

3. Der Homotopieerweiterungssatz und Anwendungen. Wir stellen zunächst einige notwendige Hilfsaussagen zusammen.

Hilfssatz 1. *Es seien E ein lokalkonvexer Raum, A eine abgeschlossene und S eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E sowie $F \in C_0(A, S, \mathfrak{R}(E))$. Dann gilt:*

(1) *Es existiert eine sternförmige, symmetrische Nullumgebung V aus E (d.h. mit $x \in V$ gilt auch $tx \in V$ für jedes $t \in [-1, 1]$), so daß $[x - F(x)] \cap \cap V = \emptyset$ für alle $x \in A$ gilt.*

(2) *Zu jeder Nullumgebung U aus E existiert ein endlichdimensionaler (linearer) Teilraum E_U von E mit $S \cap E_U \neq \emptyset$ und eine kompakte Abbildung $F_U \in C_0(A, S \cap E_U, \mathfrak{R}(E))$ derart, daß $F_U(x) \subset F(x) + V$ $(x \in A)$ gilt.*

(3) *Sei G ein weiteres Element aus $C_0(A, S, \mathfrak{R}(E))$, das zu F homotop in $C_0(A, S, \mathfrak{R}(E))$ ist. Wenn $F(A)$ und $G(A)$ Teilmengen eines endlichdimensionalen Teilraums von E sind, so existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E mit $S \cap E_0 \neq \emptyset$ derart, daß F und G homotop in $C_0(A \cap E_0, S \cap E_0, \mathfrak{R}(E_0))$ sind.*

(4) *Sei V eine (nach (1) existierende) sternförmige, symmetrische Nullumgebung aus E, für die $[x - F(x)] \cap V = \emptyset$ $(x \in A)$ gilt. Dann ist jedes $G \in C(A, S, \mathfrak{R}(E))$ mit $G(x) \subset F(x) + V$ $(x \in A)$ fixpunktfrei und zu F in $C_0(A, S, \mathfrak{R}(E))$ homotop.*

Diese Ergebnisse sind im wesentlichen bekannt. (1) folgt aus der leicht zu zeigenden Abgeschlossenheit der Menge $\bigcup_{x \in A} (x - F(x))$, (2) wurde z.B. in [5] bewiesen. Die Aussage (3) stammt für den Spezialfall $S = E$ von T. W. Ma [16] (Theorem 4.2). Der dort angegebene Beweis läßt sich auch für den allgemeinen Fall verwenden. Die Aussage (4) beweist man leicht durch Verwendung der Homotopie $H(x, t) = tF(x) + (1-t)G(x)$ $(x \in A, t \in [0, 1])$.

Eine wichtige Grundlage für unsere Betrachtungen ist der Homotopieerweiterungssatz von Granas für mengenwertige kompakte Abbildungen, der von A. Cellina [2] bewiesen wurde. Wir benötigen ihn für endlichdimensionale Räume in einer verschärften Fassung, die von G. Kayser stammt.

Hilfssatz 2. *Es seien E ein endlichdimensionaler normierter Raum, S eine nichtleere konvexe und M eine beliebige Teilmenge von E sowie M_0 eine (in M) abgeschlossene Teilmenge von M_0. Weiter seien F und G zwei Elemente aus $C_0(M_0, S, \mathfrak{R}(E))$, die in $C_0(M_0, S, \mathfrak{R}(E))$, homotop sind. Besitzt F eine Erweiterung $\tilde{F} \in C_0(M, S, \mathfrak{R}(E))$, so hat auch G eine Erweiterung $\tilde{G} \in C_0(M, S, \mathfrak{R}(E))$.*

Schließlich benötigen wir einen wichtigen Sachverhalt, der das Wesen der konzentrierenden Abbildungen widerspiegelt. Die ihn beschreibende Aussage ist im Prinzip bekannt. Wir beweisen sie trotzdem, weil wir dabei ohne transfinite Induktion und Zornsches Lemma auskommen (s. auch [13], [27]).

Hilfssatz 3. *Es seien E ein lokalkonvexer Raum, M eine Teilmenge von E, $(A, \leqslant)$ eine halbgeordnete und B eine beliebige Menge. Weiter sei ψ: $E \to A$ ein monotones, reguläres NKM in E, $H: M \times B \to \mathfrak{R}(E)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung und x_0 ein beliebiges Element aus M. Dann existiert eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge S von E derart, daß $x_0 \in S$ ist, $F((M \cap S) \times B) \subset S$ gilt und $F((M \cap S) \times B)$ relativ kompakt in E ist.*

Falls sogar ψ vereinigungstreu (und dann auch monoton), regulär und symmetrisch ist, kann S als symmetrisch angenommen werden.

Beweis. Sei $\mathfrak{S}$ das System aller abgeschlossenen und konvexen (und für den 2. Fall auch symmetrischen) Teilmengen T von E, die x_0 enthalten mit $F((M \cap T) \times B) \subset T$. Da E zu $\mathfrak{S}$ gehört, ist $\mathfrak{S} \neq \emptyset$. Sei nun $S = \bigcap_{T \in \mathfrak{S}} T$. Offenbar gehört S zu $\mathfrak{S}$. Weil $x_0 \in S$, $F((M \cap S) \times B) \subset S$ ist, gilt die Relation $\overline{\mathrm{co}}\,[\{x_0\} \cup \{F((M \cap S) \times B)\}] \subset S$. (Im 2. Fall ist auch $-x_0 \in S$, $-F((M \cap S) \times B) \subset S$ und daher

$$\overline{\mathrm{co}}\,[\{x_0\} \cup \{-x_0\} \cup \{F((M \cap S) \times B)\} \cup \{-F(M \cap S) \times B)\}] \subset S).$$

Weil die links stehende Menge zu $\mathfrak{S}$ gehört, gilt sogar $S = \overline{\mathrm{co}}\,[\{x_0\} \cup \cup \{F((M \cap S) \times B)\}]$ (bzw. die entsprechende Gleichheit im zweiten Fall). Dann folgt $\psi(M \cap S) \leqslant \psi(S) = \psi(F((M \cap S) \times B))$. Weil F (ψ)-konzentrierend ist, muß $F((M \cap S) \times B)$ relativ kompakt sein.

Definition 3. Es seien E, A, B, M, ψ und H wie in Hilfssatz 3 erklärt. Eine abgeschlossene und konvexe Telimenge S von E mit $M \cap S \neq \emptyset$ und $H((M \cap S) \times B) \subset S$, für die $H((M \cap S) \times B)$ relativ kompakt ist, heiße charakteristische Menge für H.

Man vergleiche hierzu auch den Begriff der Fundamentalmenge ([24], [25]).

Sind zwei Elemente F_1, F_2 aus $V_0^{(\psi)}(X, E, \mathfrak{R}(E))$ homotop in $V_0^{(\psi)}(X, E, \mathfrak{R}(E))$ durch die (ψ)-konzentrierende Abbildung $H: X \times [0, 1] \to \mathfrak{R}(E)$, so ist offensichtlich jede für H charakteristische Menge S sowohl für F_1 als auch für F_2 charakteristisch.

Definition 4. Es seien E ein lokalkonvexer Raum, X und Y zwei abgeschlossene Teilmengen von E mit $X \subset Y$, ψ ein monotones, reguläres NKM in E, $F: X \to \mathfrak{R}(E)$ eine (ψ)-konzentrierende fixpunktfreie Abbildung sowie S eine charakteristische Menge für F. Die Abbildung F heiße approximationsunwesentlich bezüglich $(X \cap S, Y \cap S, S, E)$, wenn zu jeder Nullumgebung V aus E ein endlichdimensionaler Teilraum E_V von E mit $S \cap E_V \neq \emptyset$ und eine kompakte Abbildung $F_V \in C_0(X \cap S, S \cap \cap E_V, \mathfrak{R}(E))$ existiert, so daß $F_V | X \cap S \cap E_V$ eine Erweiterung F_V aus $C_0(Y \cap S \cap E_V, S \cap E_V, \mathfrak{R}(E_V))$ besitzt.

Ist F kompakt, so können wir $S = E$ wählen. Für punktwertige Abbildungen ist dann der soeben erklärte Begriff in unserer Arbeit [6] eingeführt worden (dort aber für allgemeine TVR). Für mengenwertige kompakte Abbildungen ist unsere Definition verwandt zur Terminologie "non-singular" aus der Arbeit von Ma [17], der einen Homotopieerweiterungssatz für mengenwertige kompakte Abbildungen in lokalkonvexen Räumen aufstellte.

Hilfssatz 4. *Es seien E ein lokalkonvexer Raum, E_1 und E_0 zwei Teilräume von E mit $E_1 \subset E_0$, X und Y zwei abgeschlossene Teilmengen von E mit $X \subset Y$, S eine abgeschlossene und konvexe Teilmenge von E mit $X \cap S \neq \emptyset$ und $G \in C_0(X \cap S, S \cap E_1, \mathfrak{R}(E))$. Besitzt $G_1 = G | X \cap S \cap E_1$ eine Erweiterung $\tilde{G}_1$ aus $C_0(Y \cap S \cap E_1, S \cap E_1, \mathfrak{R}(E_1))$, so hat auch $G_0 = G | X \cap S \cap E_0$ eine Erweiterung $\tilde{G}_0 \in C_0(Y \cap S \cap E_0, S \cap E_0, \mathfrak{R}(E_0))$.*

Beweis. Wir definieren durch die Vorschrift

$$F(x) = \begin{cases} G_0(x), & x \in X \cap S \cap E_0, \\ \tilde{G}_1(x), & x \in Y \cap S \cap E_1, \end{cases}$$

eine Abbildung $F: (X \cap S \cap E_0) \cup (Y \cap S \cap E_1) \to \mathfrak{R}(E)$. Die Abbildung F ist kompakt, fixpunktfrei und hat ihre Werte in $S \cap E_1$. Die Menge $(X \cap S \cap \cap E_0) \cup (Y \cap S \cap E_1) = M$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $Y \cap S \cap E_0$ und daher existiert nach dem Erweiterungssatz von Dugundji, der für mengenwertige Abbildungen von T. W. Ma bewiesen wurde ([16], Theorem 2.1), eine nach oben halbstetige Erweiterung $\tilde{G}_0$ von F auf $Y \cap S \cap E_0$ weil $\tilde{G}_0(Y, S, E_0) \subset \mathrm{conv}(F(M))$ gilt und $F(M)$ relativ kompact ist, muß dies auch $\tilde{G}_0(Y \cap S \cap E_0)$ sein. Offenbar gilt $\tilde{G}_0 | X \cap S \cap E_0 = G_0$ und $\tilde{G}_0(Y \cap S \cap$

$\cap E_0) \subset (S \cap E_1)$. $\tilde{G}_0$ ist auch fixpunktfrei, denn jeder Fixpunkt müßte in $S \cap E_1$ liegen und wäre dann auch Fixpunkt von F. Somit ist $\tilde{G}_0$ eine gewünschte Erweiterung von G_0.

SATZ 1. *Es seien E, X, Y, ψ und F wie in Definition 4 erklärt. Dann gilt:*

(1) *Hat F eine Erweiterung $\tilde{F} \in V_0^{(\psi)}(Y, E, \Re(E))$, so ist für jede charakteristische Menge S von F die Abbildung F approximationsunwesentlich bezüglich $(X \cap S, Y \cap S, S, \Re(E))$.*

(2) *Sei T eine charakteristische Menge von F und F approximationsunwesentlich bezüglich $(X \cap T, Y \cap T, T, \Re(E))$. Ist $F(X)$ in einem endlichdimensionalen Teilraum E_1 von E enthalten, so existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E mit $E_0 \supset E_1$ und $E_0 \cap T \neq \emptyset$, so daß $F|X \cap T \cap E_0$ eine Erweiterung $\tilde{F} \in C_0(Y \cap T \cap E_0, T \cap E_0, \Re(E_0))$ besitzt.*

Beweis. (1) Sei V eine beliebige Nullumgebung aus E. Dann gibt es nach Hilfssatz 1 (2) einen endlichdimensionalen Teilraum E_V von E mit $E_V \cap S \neq \emptyset$ und eine kompakte Abbildung $\tilde{F}_V \in C_0(Y \cap S, S \cap E_V, \Re(E))$ mit $\tilde{F}_V(x) \subset \tilde{F}(x) + V$ $(x \in Y \cap S)$. Also ist $\tilde{F}_V|Y \cap S \cap E_V$ eine kompakte fixpunktfreie Erweiterung von $\tilde{F}_V|X \cap S \cap E_V$.

(2) Wegen Hilfssatz 1 (1) existiert eine sternförmige, symmetrische Nullumgebung V mit $[x - F(x)] \cap V = \emptyset$ $(x \in X \cap T)$. Zu V gibt es n.V. einen endlichdimensionalen Teilraum E_1 von E und eine kompakte Abbildung $F_V \in C_0(X \cap T, T \cap E_1, \Re(E))$ derart, daß $F_V(x) \subset F(x) + V$ $(x \in X \cap T)$ gilt und $F_V|X \cap T \cap E_1$ eine Erweiterung $\tilde{F}_V \in C_0(Y \cap T \cap E_1, T \cap E_1, \Re(E_1))$ hat. Nach Hilfssatz 1 (4) und 1 (3) existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E mit $E_0 \supset E_1$, so daß $F|X \cap T \cap E_0$ und $F_V|X \cap T \cap E_0$ homotop in $C_0(X \cap T \cap E_0, T \cap E_0, \Re(E_0))$ sind. $F_V|X \cap T \cap E_1 = F_0$ hat (unter Beachtung von Hilfssatz 4) eine Erweiterung $\tilde{F}_0 \in C_0(Y \cap T \cap E_0, T \cap E_0, \Re(E_0))$. Wegen Hilfssatz 2 existiert dann auch eine Erweiterung $F \in C_0(Y \cap T \cap E_0, T \cap E_0, \Re(E_0))$ von $F|X \cap T \cap E_0$.

Wir stellen nun unseren Homotopieerweiterungssatz vor.

SATZ 2. *Es seien E ein lokalkonvexer Raum, X und Y zwei abgeschlossene Teilmengen von E mit $X \subset Y$, ψ ein monotones, reguläres NKM in E sowie F_1 und F_2 zwei Elemente aus $V_0^{(\psi)}(X, E, \Re(E))$, die in $V_0^{(\psi)}(X, E, \Re(E))$ homotop sind. Sei S eine charakteristische Menge für die Homotopie H. Ist F_1 approximationsunwesentlich bezüglich $(X \cap S, Y \cap S, S, E)$, so gilt das auch für F_2.*

Beweis. Sei U eine beliebige Nullumgebung aus E. Nach Hilfssatz 1 (1) existiert eine sternförmige, symmetrische Nullumgebung $V \subset U$ mit $[x - F_i(x)] \cap V \neq \emptyset$ $(x \in X \cap S, i = 1, 2)$. N.V. gibt es einen endlichdimensionalen Teilraum E_1 von E mit $E_1 \cap S \neq \emptyset$ und eine kompakte Abbildung $G_1 \in C_0(X \cap S, S \cap E_1, \Re(E_1))$ mit $G_1(x) \subset F_1(x) + V$ $(x \in X \cap S)$, deren Einschränkung auf $X \cap S \cap E_1$ eine Erweiterung $G_1 \in C_0(Y \cap S \cap E_1, S \cap E_1, \Re(E_1))$ besitzt.

Nach Hilfssatz 1 (2) existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_2 von E mit $S \cap E_2 \neq \emptyset$ und eine kompakte Abbildung $G_2 \in C_0(X \cap S, S \cap E_2, \Re(E))$ mit $G_2(x) \subset F_2(x) + V$ $(x \in X \cap S)$. Nach Hilfssatz 1 (4) sind die Abbildungen F_1 und G_1 sowie F_2 und G_2 und n.V. auch F_1 und F_2 in $C_0(X \cap S, S, \Re(E))$ homotop. Daraus und aus Hilfssatz 1 (3) folgt die Existenz eines endlichdimensionalen Teilraums $E_0 \supset E_1$ derart, daß $G_1|X \cap S \cap E_0$ und $G_2|X \cap S \cap E_0$ homotop in $C_0(X \cap S \cap E_0, S \cap E_0, \Re(E_0))$ sind. $G_1|X \cap S \cap E_0$ hat eine Erweiterung $\tilde{G}_1 \in C_0(Y \cap S \cap E_0, S \cap E_0, \Re(E_0))$ (man beachte dabei Hilfssatz 4) und dann liefert Hilfssatz 2 eine Erweiterung $\tilde{G}_2 \in C_0(Y \cap S \cap E_0, S \cap E_0, \Re(E_0))$ von $G_2|X \cap S \cap E_0$. Wegen $G_2(x) \subset F_2(x) + U$ $(x \in X \cap S)$ ist Satz 2 bewiesen.

Satz 2 wurde vom Verfasser für (punktwertige) kompakte Abbildungen in TVR für $S = E$ in [6] vorgestellt.

Dieser Homotopieerweiterungssatz gestattet nun die Übertragung gewisser Ergebnisse der Leray–Schauder-Theorie auf mengenwertige konzentrierende Abbildungen in lokalkonvexen Räumen. Wir wollen dafür hier zwei Beispiele anführen. Weitere Anwendungen finden sich in [28].

SATZ 3. *Es seien E ein lokalkonvexer Raum, W eine abgeschlossene Nullumgebung aus E, ψ ein reguläres monotones NKM in E und $F: W \to \Re(E)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung. Es gelte $\beta x \notin F(x)$ $(x \in \partial W, \beta > 1)$. Dann hat F einen Fixpunkt.*

Beweis. O.B.d.A. sei $x \notin F(x)$ für alle x des Randes ∂W von W. Wir setzen $F_0 = F|\partial W$ und $H(x, t) = tF(x)$ $(x \in W, t \in [0, 1])$. Wegen $H(\Omega \times [0, 1]) \in \overline{\mathrm{co}}\,[F(\Omega) \cup \{0\}]$ $(\Omega \subset W)$ folgt aus den Eigenschaften von ψ, daß H: $W \to \Re(E)$ (ψ)-konzentrierend ist. Aus den Voraussetzungen folgt $x \notin H(x, t)$ $(x \in \partial W, t \in [0, 1])$, so daß die durch die Vorschrift $G_0(x) = \{0\}$ $(x \in \partial W)$ erklärte (ψ)-konzentrierende Abbildung G_0 zu F_0 in $V_0^{(\psi)}(\partial W, E, \Re(E))$ homotop ist. Sei S eine charakteristische Menge für H. Dann ist auch S charakteristisch für F, F_0 und G_0. Angenommen, F hätte keinen Fixpunkt. Dann wäre F eine Erweiterung von F_0 aus $V_0^{(\psi)}(W, E, \Re(E))$ und nach Satz 1 (1) ist F_0 approximationsunwesentlich bezüglich $(\partial W \cap S, W \cap S, S, \Re(E))$. Nach Satz 2 muß dann auch G_0 approximationsunwesentlich bezüglich $(\partial W \cap S, W \cap S, S, \Re(E))$ sein. Wegen Satz 1 (2) existiert damit ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E derart, daß $G_0|\partial W \cap S \cap E_0$ eine Erweiterung $\tilde{G}_0 \in C_0(W \cap T \cap E_0, T \cap E_0, \Re(E_0))$ besitzt. Wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{G}_0(x), & x \in W \cap T \cap E_0, \\ 0, & x \in (T \cap E_0) \setminus W. \end{cases}$$

Offenbar ist f eine kompakte fixpunktfreie Abbildung von $T\cap E_0$ in $\mathfrak{R}(E_0)$ mit $f(T\cap E_0)\subset (T\cap E_0)$. Dies ist aber ein Widerspruch zum bekannten Fixpunktsatz von Kakutani [11], womit Satz 3 bewiesen ist.

Satz 3 stammt von G. Kayser [12] und ist eine Übertragung eines Ergebnisses von W. V. Petryshin und P. M. Fitzpatrick [20] auf nichtnotwendig metrisierbare lokalkonvexe Räume. Der Satz mußte bisher durch Benutzung eines Existenzsatzes für kompakte Abbildungen in lokalkonvexen Räumen bewiesen werden, den man seinerseits über relativ langwierige Approximationsbetrachtungen aus dem entsprechenden Ergebnis in endlichdimensionalen Räumen erhielt. Der Approximationsvorgang ist in einfacher Weise nun in Satz 2 enthalten.

In [24] wurde der Antipodensatz von Borsuk für mengenwertige konzentrierende Abbildungen in metrisierbaren lokalkonvexen Räumen bewiesen, indem der entsprechende Sachverhalt für kompakte mengenwertige Abbildungen in endlichdimensionalen Räumen und das Hilfsmittel der Drehung eines konzentrierenden mengenwertigen Vektorfeldes ([24]) benutzt wurde. Wir zeigen nun, daß sich diese Übertragung des Antipodensatzes für mengenwertige kompakte Abbildungen in endlichdimensionalen Räumen auf konzentrierende mengenwertige Abbildungen in (nichtnotwendig metrisierbaren) lokalkonvexen Räumen mit Hilfe unseres Homotopieerweiterungssatzes durchführen läßt, womit dieser Satz nun auch für den Fall nichtmetrisierbarer lokalkonvexer Räume gültig ist.

Satz 4. *Es seien E ein lokalkonvexer Raum, W eine offene und symmetrische Nullumgebung aus E sowie ψ ein reguläres, vereinigungstreues und symmetrisches* NKM *in E. Ferner sei $F\colon \partial W\to\mathfrak{R}(E)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung für die $[x-F(x)]\cap[\lambda(-x-F(-x))]=\emptyset$ für alle $\lambda\in[0,1]$ und alle $x\in\partial W$ gilt. Dann hat F keine Erweiterung $\tilde F\in V_0^{(\psi)}(\overline{W},E,\mathfrak{R}(E))$.*

Beweis. Angenommen, F habe eine solche Erweiterung $\tilde F\in V_0^{(\psi)}(\overline{W},E,\mathfrak{R}(E))$. Es sei $G(x)=\frac12[\tilde F(x)-\tilde F(-x)]$ $(x\in\overline{W})$. Dann ist $\tilde G\colon \overline{W}\to\mathfrak{R}(E)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung, denn es gilt $G(\overline{W})\subset\overline{co}[\{\tilde F(\Omega)\}\cup\{-\tilde F(-\Omega)\}]$ für jedes $\Omega\subset\overline{W}$ und durch $T(x)=-\tilde F(-x)$ $(x\in\overline{W})$ ist eine (ψ)-konzentrierende Abbildung $T\colon\overline{W}\to\mathfrak{R}(E)$ erklärt. Dann ist auch die durch $\tilde H(x,t)=t\tilde F(x)+(1-t)\tilde G(x)$ $(x\in\overline{W},\ t\in[0,1])$ definierte Abbildung $H\colon\overline{W}\times[0,1]\to\mathfrak{R}(E)$ (ψ)-konzentrierend. Aus den Voraussetzungen folgt sofort, daß $x\notin\tilde H(x,t)$ $(x\in\partial W,\ t\in[0,1])$ gilt. Daher sind die Abbildungen F und $G=\tilde G|\partial W$ mittels $H=\tilde H|\partial W\times[0,1]$ homotop in $V_0^{(\psi)}(\partial W,E,\mathfrak{R}(E))$. Sei S eine symmetrische charakteristische Menge für H. Dann ist auch S charakteristisch für $\tilde F,F,G,H$. Nach Satz 1 (1) ist F approximationsunwesentlich bezüglich $(\partial W\cap S,\overline{W}\cap S,S,\mathfrak{R}(E))$ und nach Satz 2 ist dies dann auch G. Es existieren sternförmige, symmetrische Nullumgebungen V_1 und V mit $[x-G(x)]\cap V=\emptyset$

$(x\in\partial W\cap S)$ und $V_1+V_1\subset V$. Zu V_1 gibt es einen endlichdimensionalen Teilraum E_1 von E und eine Abbildung $G_1\in C_0(\partial W\cap S,S\cap E_1,\mathfrak{R}(E))$ derart, daß $G_1(x)\subset G(x)+V_1$ $(x\in\partial W\cap S)$ gilt und $G_1|\partial W\cap S\cap E_1$ eine Erweiterung $\tilde G_1$ aus $C_0(\overline{W}\cap S\cap E_1,S\cap E_1,\mathfrak{R}(E_1))$ besitzt. Wir setzen $G_0(x)=\frac12[G_1(x)-G_1(-x)]$ $(x\in\partial W\cap S)$. Offenbar ist G_0 aus $C(\partial W\cap S,S\cap E_1,\mathfrak{R}(E))$ und es gilt $G_0(x)\subset G(x)+V$ $(x\in\partial W\cap S)$. Wegen Hilfssatz 1 (4) sind G_1 und G sowie G und G_0 und damit G_0 und G_1 homotop in $C_0(\partial W\cap S,S,\mathfrak{R}(E))$. Nach Hilfssatz 1 (3) existiert ein endlichdimensionaler Teilraum E_0 von E, so daß $G_0|\partial W\cap S\cap E_0$ und $G_1|\partial W\cap S\cap E_0$ homotop in $C_0(\partial W\cap S\cap E_0,S\cap E_0,\mathfrak{R}(E_0))$ sind. Die Anwendung der Hilfssätze 4 und 2 liefern dann die Existenz einer Erweiterung $\tilde G_0\in C_0(\overline{W}\cap S\cap E_0,S\cap E_0,\mathfrak{R}(E_0))$ von $G_0|\partial W\cap S\cap E_0$. Weil G_0 ungerade ist, stellt das aber einen Widerspruch zum Antipodensatz für mengenwertige kompakte Abbildungen in endlichdimensionalen Räumen dar, der auch für Abbildungen $F\colon\partial W\cap S\cap E_0\to\mathfrak{R}(E_0)$ mit $F(\partial W\cap S\cap E_0)\subset(S\cap E_0)$ gilt (man beachte, daß $S\cap\partial W$ symmetrisch ist). Damit ist Satz 4 bewiesen.

4. Ein einfacher Beweis eines allgemeinen Fixpunktsatzes. Wir wollen abschließend für einen allgemeinen Fixpunktsatz, der von G. Kayser [12] stammt und der viele bekannte Fixpunktsätze enthält (u.a. Satz 3), einen sehr einfachen Beweis angeben, der weder Homotopiebetrachtungen noch Anwendung des Abbildungsgrades erfordert. Lediglich der Fixpunktsatz von Kakutani für mengenwertige kompakte Abbildungen in endlichdimensionalen Räumen wird benötigt.

Satz 5. *Es seien E ein lokalkonvexer Raum, ψ ein monotones, reguläres* NKM *in E, T eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von E mit $0\in T$, W eine offene Nullumgebung aus E und $W_T=W\cap T$. Wir bezeichnen mit ∂_T die Randbildung bezüglich der induzierten Topologie von T. Es sei $F\colon\overline{W}_T\to\mathfrak{R}(E)$ eine (ψ)-konzentrierende Abbildung mit $F(\overline{W}_T)\subset T$, für die $\beta x\notin F(x)$ $(x\in\partial_T W_T,\ \beta>1)$ gilt. Dann hat F einen Fixpunkt.*

Beweis. O.B.d.A. habe F auf $\partial_T W_T$ keinen Fixpunkt. Angenommen, $F|\partial_T W_T$ hätte eine fixpunktfreie kompakte Erweiterung $\tilde F$ auf $\overline{W}_T$. Sei S eine charakteristische Menge für $\tilde F$. Dann gilt also $\tilde F(\overline{W}_T\cap S)\subset S$ und $F_0=\tilde F|\overline{W}_T\cap S$ ist eine kompakte Abbildung. Dann ist die Menge $X_0=\{x\in\overline{W}_T\cap S\colon$ es existiert ein $t\in[0,1]$ mit $x\in tF_0(x)\}$ als abgeschlossene Teilmenge der relativ kompakten Menge $[0,1]\cdot F_0(\overline{W}_T\cap S)$ selbst kompakt. Weil ferner $\partial_T W_T\cap S$ abgeschlossen und E vollständig regulär ist, existiert eine stetige Abbildung $\lambda\colon E\to[0,1]$ mit $\lambda(x)=0$ $(x\in X_0)$, $\lambda(x)=1$ $(x\in\partial_T W_T\cap S)$. Sei $G(x)=[1-\lambda(x)]F_0(x)$ $(x\in\overline{W}_T\cap S)$. Dann ist G aus $C_0(\overline{W}_T\cap S,S,\mathfrak{R}(E))$ (aus $x_0\in G(x_0)$ würde $x_0\in X_0$ und damit $G(x_0)=F_0(x_0)$ folgen, was wegen $x_0\notin F(x_0)$ unmöglich ist). Weiterhin gilt $G(x)=\{0\}$ für $x\in\partial_T W_T\cap S$. Wir setzen

$$T(x) = \begin{cases} G(x), & x \in \overline{W}_T \cap S, \\ 0, & x \in S \setminus \overline{W}_T. \end{cases}$$

Dann ist $T \in C_0(S, S, \Re(E))$. Nach Hilfssatz 1 (2) finden wir einen endlichdimensionalen Teilraum E_0 von E und eine fixpunktfreie kompakte Abbildung $T_0: S \cap E_0 \to \Re(E_0)$ mit $T_0(S \cap E_0) \subset (S \cap E_0)$. Weil $S \cap E_0$ eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von E_0 ist, widerspricht dies dem Fixpunktsatz von Kakutani [11]. Damit ist Satz 5 bewiesen.

Bemerkungen.

(1) Der Beweis zeigt die logische Äquivalenz des Fixpunktsatzes von Kakutani für kompakte mengenwertige Abbildungen und des in seinen Voraussetzungen sehr allgemeinen Satzes 5 Es wird erneut sichtbar, wie verwandt die konzentrierenden Abbildungen mit den kompakten sind, und daß nach wie vor die klassischen Fixpunktsätze in endlichdimensionalen Räumen (Brouwer, Kakutani) das wichtigste Hilfsmittel für den Beweis von (äußerlich) sehr allgemeinen Fixpunktaussagen für beliebige topologische Vektorräume darstellen.

(2) Allgemeine Fixpunktsätze für kompakte (punktwertige) Abbildungen in (nichtnotwendig lokalkonvexen) TVR, wie sie in [7] (Hauptsätze 1 und 2) relativ kompliziert hergeleitet wurden, können ebenso wie Satz 4 bewiesen werden.

(3) Satz 2 und die entsprechenden Folgerungen können auch für Abbildungen $V_0^T(A, T, \Re(E))$ (T abgeschlossene, konvexe Teilmenge von E, A abgeschlossene Teilmenge von T) bewiesen werden. Dann erhalten wir Satz 5 wie Satz 3 aus Satz 2.

(4) Alle Ergebnisse dieser Arbeit enthalten natürlich die entsprechenden Aussagen für punktwertige Abbildungen.

Eine zusammenhängende Darstellung der hier angedeuteten Thematik findet man in [29].

Literatur

[1] C. Berge, *Topological spaces*, Edinburgh and London 1963.

[2] A. Cellina, *A theorem on the approximation of compact multivalued mappings*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 47 (1969), S. 429–433.

[3] A. Granas, *Homotopie extension theorem in Banach spaces and some of its applications to the theory of non-linear equations*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), S. 387–394.

[4] — *The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces* (I), Rozprawy Mat. 30, Warszawa 1962.

[5] S. Hahn, *Fixpunktsätze für mengenwertige Abbildungen in lokalkonvexen Räumen*, Math. Nachr. 73 (1976), S. 269–283.

[6] — *Zur Theorie kompakter Vektorfelder in topologischen Vektorräumen*, ibid. 85 (1978), S. 273–282.

[7] — und K. F. Pötter, *Über Fixpunkte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen*, Studia Math. 50 (1974), S. 1–16.

[8] — und T. Riedrich, *Der Abbildungsgrad kompakter Vektorfelder in nichtnotwendig lokalkonvexen topologischen Vektorräumen*, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 22 (1973), S. 37–42.

[9] C. J. Himmelberg, J. R. Porter and F. S. van Vleck, *Fixed point theorems for condensing multifunctions*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), S. 635–641.

[10] W. Kaballo, *Zum Abbildungsgrad in Hausdorffschen topologischen Vektorräumen*, Manuscripta Math. 8 (1973), S. 209–216.

[11] S. Kakutani, *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math. J. 8 (1941), S. 457–459.

[12] G. Kayser, *Zur Existenz von Fixpunkten bei kompakten bzw. konzentrierenden mengenwertigen Abbildungen in lokalkonvexen Räumen*, Berichte der Jahrestagung Num. Mathematik, Potsdam–Cecilienhof, 25. 11–1. 12. 1973, S. 46–53, TH Karl-Marx-Stadt, Sektion Mathematik.

[13] — *Ein Fixpunktsatz für konzentrierende Abbildungen in lokalkonvexen Räumen*, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 23 (1974), S. 145–151.

[14] — *Zur relativen Drehung in Hausdorffschen topologischen Vektorräumen*, ibid. 23 (1974), S. 335–340.

[15] V. Klee, *Leray–Schauder-theory without local convexity*, Math. Ann. 141 (1960), S. 286–296.

[16] T. W. Ma, *Topological degrees of set-valued compact fields in locally convex spaces*, Diss. Math. 92 (1972).

[17] — *Non-singular set-valued compact fields in locally convex spaces*, Fund. Math. 75 (1972), S. 249–259.

[18] M. Nagumo, *Degree of mapping in linear topological spaces*, Amer. J. Math. 73 (1951), S. 497–511.

[19] R. D. Nussbaum, *The fixed point index and asymptotic fixed point theorems for k-set-contractions*, Bull. Amer. Math. Soc. 75 (1969), S. 490–495.

[20] W. V. Petryshyn and P. M. Fitzpatrick, *Degree theory for non-compact multivalued vector fields*, ibid. 73 (1973), S. 609–613.

[21] J. Schauder et J. Leray, *Topologie et equations fonctionelles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 51 (1934), S. 45–78.

[22] Я. А. Израилевич, *О понятии относительного вращения многозначного векторного поля*, Труды сем. по функц. анализу 12, S. 111–115, Воронеж 1969.

[23] М. А. Красносельский, *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*, Москва 1956.

[24] В. В. Обуховский, *О некоторых принципах неподвижной точки для многозначных уплотняющих операторов*, Труды матем. ф-та ВГУ 4 (1971), S. 70–79.

[25] А. С. Потапов, *К теории вращения предельно компактных векторных полей*, Comment. Math, Univ. Carolinae 15 (1974), S. 693–716.

[26] Б. Н. Садовский, *Предельно компактные и уплотняющие операторы*, Успехи мат. наук 27 (1972), S. 81–146.

[27] J. Daneš, *Some fixed point theorems*, Comment. Math. Univ. Carolinae 9 (1968), S. 223–235.

[28] S. Hahn *Gebietsinvarianzsatz und Eigenwertaussagen für konzentrirende Abbildungen*, ibid. 18 (1977), S. 697–713.

[29] — *Zur Theorie nichtlinearer Operatorengleichungen in topologischen Vektorräumen*, B-Diss. TU Dresden, 1978.

Received September 25, 1976 (1195)