Contents of volume LXVI, number 2

The journal prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers submitted should be typed on one side only and accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies, one of them being the typed, not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

ARS POLONA
Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland

ISBN 83-01-01346-X ISSN 0039-3223

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVI. (1979)

La loi des grands nombres pour les marches aléatoires sur le dual de SU(2)

par

L. GALLARDO et V. RIES (Nancy)

Abstract. The set of probability measures on $\boldsymbol{N}$, regarded as the dual of SU(2), is provided with a new convolution. If μ is such a measure, the convolution powers μ^n are the probability laws of the successive states of a Markov chain for which we give the Central Limit Theorem and the Strong Law of Large Numbers.

Introduction

$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ étant une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi μ à valeurs dans $\boldsymbol{N}$ (i.e. $\mu = \sum_{x\in\boldsymbol{N}} a_x\delta_x$ où δ est la mesure de Dirac et où les poids a_x sont positifs et de somme 1) on a les résultats classiques pour $S_n = X_1+X_2+\ldots+X_n$:

(a) $\dfrac{S_n-nE(X_1)}{\sqrt{n}}$ converge en loi si $\sum_{x\in\boldsymbol{N}} x^2a_x < +\infty$ (TLC),

(b) $\dfrac{S_n}{n}$ converge presque sûrement vers $\sum_{x\in\boldsymbol{N}} xa_x$ si cette série converge (LGN).

Il est bien connu que la démonstration du TLC s'appuie essentiellement sur les propriétés de la convolution et de la transformation de Fourier alors que c'est la technique probabiliste des sommes de variables aléatoires indépendantes qui permet d'établir la L.G.N.

Dans cet article, nous montrons comment on peut étendre ces deux résultats à une chaîne de Markov S_n sur le dual de SU(2) (isomorphe à $\boldsymbol{N}$) introduite dans [1]. Pour cela nous définissons dans $\boldsymbol{N}$ une "addition au hasard", notée $\oplus$ telle que la chaîne S_n puisse s'écrire

$$S_n = X_1\oplus X_2\oplus\ldots\oplus X_n$$

où les X_i sont des variables aléatoires indépendantes de même loi à valeurs dans $\boldsymbol{N}$.

I. Une addition aléatoire dans N

Dans [1] on définit à partir des formules de Clebsch-Gordan pour le produit tensoriel des représentations unitaires irréductibles du groupe compact SU(2) une convolution généralisée, notée $\times$, sur l'ensemble des mesures de probabilité sur N en posant:

$$\delta_x \times \delta_y = \sum_{s=0}^{x\wedge y} \frac{|x-y|+2s+1}{(x+1)(y+1)}\, \delta_{|x-y|+2s}, \qquad (x, y) \in N^2 \ (^1)$$

et, en général,

$$\mu \times \nu = \Big(\sum_{x\in N} a_x \delta_x\Big) \times \Big(\sum_{y\in N} b_y \delta_y\Big) = \sum_{(x,y)\in N^2} a_x b_y \delta_x \times \delta_y .$$

Cette convolution est commutative, associative et permet, à partir d'une probabilité μ sur N, de définir une chaîne de Markov $(S_n)_{n\in N}$, appelée par abus de langage marche aléatoire de loi μ, dont le noyau de transition P est défini pour $x \in N$ et $A \subset N$ par:

$$P(x, A) = (\delta_x \times \mu)(A).$$

La "transformation de Fourier" $\mu \rightsquigarrow \hat{\mu}$ définie pour $\theta \in [0, \pi]$ par:

$$\hat{\mu}(\theta) = \sum_{x\in N} a_x \frac{\sin(x+1)\theta}{(x+1)\sin\theta}$$

permet une étude détaillée du comportement asymptotique des marches ainsi définies et montre en particulier qu'elles sont toutes transitoires.

Il est donc naturel d'étudier la convergence presque sûre de S_n/n et pour cela d'essayer de définir une "addition" $\oplus$ pour des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans N telle que:

(a) si X et Y ont pour lois respectives μ et ν, $X \oplus Y$ ait pour loi $\mu \times \nu$,

(b) cette opération soit commutative et associative (comme la convolution $\times$) et permette d'écrire S_n sous la forme

$$S_n = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_n$$

où les X_i sont indépendantes et toutes de loi μ.

1. Une interprétation géométrique de la convolution. On observe dans [1] que le comportement asymptotique de S_n est comparable à celui du module d'une marche isotrope classique dans Z^3 (cf. [6]). Comme d'autre part S_n est à valeurs dans N, cela incite à l'interpréter comme le module d'une marche isotrope sur les sphères de R^3 centrées à l'origine et de rayon entier.

(1) $x \wedge y$ désigne le plus petit des deux entiers x et y.

Or on peut remarquer que, x et y étant deux entiers naturels, si Q est un point de $S(0, x+1)$ (2), la probabilité pour que la distance à 0 d'un point aléatoire uniformément distribué sur $S(Q, y+1)$ soit comprise entre $|x-y|+2s$ et $|x-y|+2s+2$ ($s \in [0, x\wedge y]$) est précisément égale à $\dfrac{|x-y|+2s+1}{(x+1)(y+1)}$. (Il suffit pour le voir de déterminer l'aire du segment sphérique découpé sur $S(Q, y+1)$ par les sphères $S(0, |x-y|+2s)$ et $S(0, |x-y|+2s+2)$.)

On peut donc considérer $\delta_x \times \delta_y$ comme la loi de la distance à l'origine d'un point aléatoire M de R^3 obtenu de la façon suivante: Q étant pris arbitrairement sur $S(0, x+1)$, on choisit au hasard (distribution uniforme) un point K sur $S(Q, y+1)$. Ce point est situé entre deux sphères $S(0, |x-y|+2s)$ et $S(0, |x-y|+2s+2)$ ($s = 0, 1, 2, \ldots, x\wedge y$) M est alors obtenu par projection radiale de K sur la plus petite de ces deux sphères.

Remarque. Pour construire une marche S_n partant de 0 et dont les "pas" X_n soient de loi μ on pourra donc construire une suite (M_n) de points de R^3 tels que les vecteurs $0M_n$ aient pour modules S_n, mais il est plus simple d'envisager une suite M'_n telle que $|0M'_n| = |0M_n| + 1$ en choisissant arbitrairement M'_0 sur $S(0, 1)$ et en construisant M'_n de la façon suivante: sur $S(M'_{n-1}, X_n+1)$ on choisit au hasard un point K_n. Il est situé entre deux sphères $S(0, |S_{n-1}-X_n|+2s-1)$ et $S(0, |S_{n-1}-X_n|+2s+1)$ ($s = 0, 1, 2, \ldots, S_{n-1}\wedge X_n$). M'_n est alors obtenu par projection radiale de K_n sur celle de ces deux sphères dont il est le plus proche.

2. L'Opération $\oplus$. Toutes les variables aléatoires considérées dans la suite sont définies sur le même espace de probabilité.

Definition. Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans N, Q_X un point quelconque de la sphère de R^3 de centre 0 et de rayon $X+1$, V_X le vecteur de R^3 associé au bipoint $(0, Q_X)$, W_Y^D un vecteur de R^3 de module $Y+1$, invariant par rotation et de direction (aléatoire) D.

On notera $X \overset{D}{\oplus} Y$ la variable aléatoire définie par

$$X \overset{D}{\oplus} Y = |X-Y| + 2S$$

où S est l'entier de $[0, X\wedge Y]$ tel que

$$|X-Y| + 2S \leqslant |V_X + W_Y^D| < |X-Y| + 2S + 2 .$$

Cette définition appelle les remarques suivantes:

(a) La variable $X \overset{D}{\oplus} Y$ ne dépend pas du choix de Q_X sur $S(0, X+1)$ mais elle dépend du choix de D.

(2) On notera $S(A, x)$ la sphère de R^3 de centre A et de rayon x et $0 = (0, 0, 0)$.

(b) Si $X = x$ p.s. et $Y = y$ p.s. on définit ainsi une “addition au hasard” dans N, $x \overset{D}{\oplus} y$ étant alors une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs $|x-y|$, $|x-y|+2, \ldots, x+y$ et qui ne dépend en fait que de la direction aléatoire D.

(c) La variable $X = 0$ p.s. est élément neutre: $0 \overset{D}{\oplus} X = X$.

(d) Lorsque le symbole $\oplus$ est utilisé plusieurs fois dans une expression — par exemple $(X \overset{D_1}{\oplus} Y) \overset{D_2}{\oplus} Z$ — nous conviendrons que les directions D qui interviennent sont indépendantes entre elles et indépendantes des variables de la “somme”.

(e) A toute direction aléatoire D on peut associer une variable aléatoire Λ à valeurs dans $[-1, +1]$ telle que

$$|V_X + W_Y^D| = \sqrt{(X+1)^2 + (Y+1)^2 + 2\Lambda(X+1)(Y+1)}.$$

L'opération $\oplus$ ainsi définie possède les propriétés requises:

PROPOSITION. *Si X et Y sont des v.a.* [3] *indépendantes à valeurs entières, de lois respectives μ et ν, $X \oplus Y$ est de loi $\mu \times \nu$.*

Démonstration.

(a) C'est clair dans le cas $\mu = \delta_x$ et $\nu = \delta_y$ d'après I.1.

(b) Soit $\mu = \sum_{x \geqslant 0} a_x \delta_x$, $\nu = \sum_{y \geqslant 0} b_y \delta_y$. Pour tout $k \in N$ on a:

$$P(X \overset{D}{\oplus} Y = k) = \sum_{y,x \geqslant 0} P(X \overset{D}{\oplus} Y = k, X = x, Y = y)$$

$$= \sum_{x,y \geqslant 0} P(x \overset{D}{\oplus} y = k, X = x, Y = y).$$

Or les v.a. $x \overset{D}{\oplus} y$ ne dépendent que de D (remarque (b)) donc sont indépendantes de X et Y, d'où:

$$P(X \overset{D}{\oplus} Y = k) = \sum_{x,y \geqslant 0} P(x \overset{D}{\oplus} y = k) \cdot P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

$$= \sum_{x,y \geqslant 0} \delta_x \times \delta_y(k) a_x b_y = \mu \times \nu(k). \ \blacksquare$$

Il en résulte immédiatement que, comme la convolution $\times$, l'addition $\oplus$ est associative et commutative. On a donc

$$(X_1 \overset{D_1}{\oplus} X_2) \overset{D_2}{\oplus} X_3 = X_1 \overset{D_1}{\oplus} (X_2 \overset{D_2}{\oplus} X_3)$$

[3] Dans la suite on notera v.a. pour variable aléatoire.

et on notera

$$X_1 \overset{D_1}{\oplus} X_2 \overset{D_2}{\oplus} X_3$$

(ou $X_1 \oplus X_2 \oplus X_3$ si l'on ne s'intéresse qu'à la loi de probabilité de cette variable aléatoire).

En particulier la marche aléatoire de loi μ partant de $x \in N$ peut s'écrire:

$$S_n = x \overset{D_0}{\oplus} X_1 \overset{D_1}{\oplus} X_2 \overset{D_2}{\oplus} \ldots \overset{D_{n-1}}{\oplus} X_n$$

où les X_i sont indépendantes et de même loi μ.

Enfin, pour la marche aléatoire partant de 0 on notera:

$$S_n = X_1 \overset{D_1}{\oplus} X_2 \overset{D_2}{\oplus} \ldots \overset{D_{n-1}}{\oplus} X_n \qquad \text{(cf. remarque(c))}.$$

II. Le théorème limite central

1. Rappels et notations. (Cf. [1]).)

(a) Soit μ une probabilité sur N. On note $\hat{\mu}$ (voir I) sa “transformée de Fourier”. Si X est une v.a. de loi μ on utilisera la notation $\hat{\mu}_X$.

(b) μ et ν étant des probabilités sur N, leur “transformée de Fourier” $\hat{\mu}$ et $\hat{\nu}$ vérifient la relation fondamentale:

$$\widehat{\mu \times \nu} = \hat{\mu} \cdot \hat{\nu}.$$

En particulier, si S_n désigne la marche de loi μ partant de y, on a:

$$\hat{\mu}_{S_n} = \hat{\delta}_y \cdot \hat{\mu}^n.$$

(c) X étant une v.a. de loi μ apériodique et ayant un moment d'ordre deux, on a

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\mu}^n\left(\frac{a}{\sqrt{n}}\right) = e^{-ca^2}, \qquad \text{pour tout } a > 0$$

où $c = \frac{1}{6} E(X^2 + 2X)$.

2. THÉORÈME. *Soit μ une probabilité apériodique sur N possédant un moment d'ordre deux, S_n une marche aléatoire de loi μ et $c = \frac{1}{6} E(S_1^2 + 2S_1)$. Alors $S_n/\sqrt{2nc}$ converge en loi et la densité limite est*

$$x \rightsquigarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \textit{pour} \quad x \geqslant 0.$$

La démonstration fait appel à un lemme établi en [4] dans un cadre plus général:

LEMME. *Si $(X_n)_{n\in N}$ est une suite de variables aléatoires positives telles que, pour tout $a>0$, on ait:*

$$\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{\sin X_n a}{X_n a}\right] = E\left[\frac{\sin X a}{X a}\right]$$

alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$.

Démonstration du lemme. (a) Si H_1 et H_2 sont deux fonctions de répartition sur R_+ telles que

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{tx}\, dH_1(x) = \int_0^\infty \frac{\sin tx}{tx}\, dH_2(x) \quad \text{pour tout } t>0$$

alors

$$H_1 = H_2.$$

En effet, pour $a\geqslant 0$ et $p>0$, on a:

$$\int_0^\infty t^2 e^{-p^2t^2} \frac{\sin at}{at}\, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4p^3} e^{-\frac{a^2}{4p^2}}.$$

D'où, en intégrant chaque membre sur R_+ par rapport à la mesure $dH_j(a)$ $(j=1,2)$, et en appliquant le théorème de Fubini,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{4p^2}}\, dH_1(a) = \int_0^\infty e^{-\frac{a^2}{4p^2}}\, dH_2(a) \quad \forall p>0.$$

Le résultat en découle par transformation de Laplace.

(b) Notons H_n et H les fonctions de répartition de X_n et X. D'après le théorème de faible compacité de Helly, on peut extraire de H_n une sous-suite qui converge faiblement. Soit $H_{\sigma(n)}$ une telle sous suite et H_σ sa limite. Le lemme de Helly Bray permet alors d'écrire:

$$\int_0^\infty \frac{\sin tx}{tx}\, dH_{\sigma(n)}(x) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\sin tx}{tx}\, dH_\sigma(x),$$

d'où $H_\sigma = H$ d'après (a).

La suite H_n, n'ayant qu'un seul point d'accumulation, converge vers H (au sens de la convergence faible).

Démonstration du théorème. Soit X une v.a. de loi $\mu = \sum_{x\geqslant 0} a_x \delta_x$. On a pour $\theta>0$

$$\hat{\mu}_X(\theta) = \sum_{x\geqslant 0} a_x \frac{\sin(x+1)\theta}{(x+1)\sin\theta} = \frac{\theta}{\sin\theta} E\left(\frac{\sin(X+1)\theta}{(X+1)\theta}\right).$$

Si la marche de loi μ part de y, on a

$$\hat{\mu}_{S_n}(\theta) = \hat{\delta}_y(\theta)\hat{\mu}_X^n(\theta) = \frac{\sin(y+1)\theta}{(y+1)\sin\theta}\hat{\mu}_X^n(\theta).$$

D'autre part

$$\hat{\mu}_{S_n}(\theta) = \frac{\theta}{\sin\theta} E\left(\frac{\sin(S_n+1)\theta}{(S_n+1)\theta}\right).$$

Remplaçant θ par $a/\sqrt{2cn}$ et posant $T_n = (S_n+1)/\sqrt{2cn}$ on obtient:

$$E\left(\frac{\sin(aT_n)}{aT_n}\right) = \frac{\sin\frac{a}{\sqrt{2cn}}}{\frac{a}{\sqrt{2cn}}} \cdot \frac{\sin(y+1)\frac{a}{\sqrt{2cn}}}{(y+1)\frac{a}{\sqrt{2cn}}} \cdot \hat{\mu}_X^n\left(\frac{a}{\sqrt{2cn}}\right)$$

pour tout $a>0$ et tout entier n.

D'après II.1 (c) on a donc

$$\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\sin aT_n}{aT_n}\right) = e^{-\frac{a^2}{2}} \quad \text{pour tout } a>0.$$

Or

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\sin ax}{ax}\, dx = e^{-\frac{a^2}{2}}.$$

D'où:

$$\lim_n E\left(\frac{\sin aT_n}{aT_n}\right) = E\left(\frac{\sin aX_0}{aX_0}\right) \quad \text{pour tout } a>0$$

où X_0 est une v.a. positive de densité:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (x>0).$$

Ainsi, d'après le lemme, T_n converge en loi vers X_0, donc $S_n/\sqrt{2cn}$ aussi.

Remarque. Une autre démonstration du TLC figure dans [1] et [6].

III. La loi forte des grands nombres

On peut déduire du TLC que $S_n/n \to 0$ en probabilité sous l'hypothèse „μ admet un moment d'ordre deux". Nous allons voir que cette convergence est en fait une convergence presque sûre et que l'hypothèse „μ admet un moment d'ordre un" suffit. Plus précisément on a le

THÉORÈME. *Si μ possède un moment d'ordre $1+\delta$ $(\delta \geqslant 0)$ on a* $\frac{S_n}{n^{1-\delta/2}} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *p.s. pour $\delta < 1$ dont la loi des grands nombres est un cas particulier $(\delta = 0)$.*

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes:

X étant une v.a. de loi μ, on note indifféremment $E(X)$ ou $E(\mu)$ son espérance mathématique.

Si P est un noyau de transition et f une application de N dans N, $P(x;f) = Pf(x) = \sum_{y\in N} P(x,y)f(y)$. En particulier:

si Φ^k désigne l'application $x \to x^k$, si X est une v.a. à valeurs dans N de loi μ et si P est le noyau $P(x;\cdot) = \delta_x \times \mu(\cdot)$ (noyau associé à X) on a, $P(x;\Phi^k) = E\big((x\oplus X)^k\big)$.

Si P_1 et P_2 sont des noyaux de transition, alors $P_1\cdot P_2$ est le noyau défini par:

$$P_1\cdot P_2(x;f) = \sum_{z\in N} P_1(x,z)P_2(z;f).$$

En particulier si X et Y sont des v.a. indépendantes à valeurs dans N, P_1 et P_2 les noyaux de transition associés, on a:

$$P_1\cdot P_2(x;\Phi^k) = E\big((x\oplus X\oplus Y)^k\big).$$

1. Lemmes préliminaires.

LEMME 1. *X et Y étant des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans N, on a $E(X\oplus Y|X) \geqslant X$.*

Démonstration. A. Si $Y = y$ p.s. alors $E(X\oplus Y|X = x) = E(x\oplus y)$ et

(a) si $x \geqslant y$,

$$E(x\oplus y) = \sum_{s=0}^{y} \frac{x-y+2s+1}{(x+1)(y+1)}(x-y+2s) = x+\frac{y^2+2y}{3(x+1)} \geqslant x.$$

(b) si $x < y$,

$$E(x\oplus y) = E(y\oplus x) = y+\frac{x^2+2x}{3(y+1)} \geqslant y > x.$$

B. Si Y est de loi $\mu = \sum_{y\geqslant 0} a_y\delta_y$, alors

$$E(X\oplus Y|X = x) = E(\delta_x\times\mu) = E\Big[\delta_x\times\Big(\sum_{y\in N} a_y\delta_y\Big)\Big]$$
$$= \sum_{y\in N} a_y E(\delta_x\times\delta_y) \geqslant \sum_{y\in N} a_y\cdot x \quad \text{d'après A,}$$

d'où

$$E(X\oplus Y|X = x) \geqslant x.$$

LEMME 2. *Soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ des v.a. indépendantes à valeurs dans N, de lois respectives $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ ayant toutes un moment d'ordre deux. On note:*

$$T_n = Y_1\oplus Y_2\oplus \ldots \oplus Y_n \quad \text{et} \quad C_i = E(Y_i^2)+2E(Y_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

On a alors,

$$E\big((x\oplus T_n)^2\big) \leqslant x^2+C_1+C_2+\ldots+C_n.$$

Démonstration. Elle se fait par récurrence.

A. Initialisation. (a) Supposons d'abord $\mu_1 = \delta_y$

$$E\big((x\oplus T_1)^2\big) = \sum_{s=0}^{x\wedge y} \frac{|x-y|+2s+1}{(x+1)(y+1)}(|x-y|+2s)^2$$
$$= \begin{cases} x^2+\dfrac{3x+1}{3x+3}y(y+2) & \text{si} \quad x \geqslant y, \\ y^2+\dfrac{3y+1}{3y+3}x(x+2) & \text{si} \quad x \leqslant y. \end{cases}$$

Ainsi,

$$E\big((x+T_1)^2\big) \leqslant x^2+y(y+2).$$

(b) $\mu_1 = \sum_{y\geqslant 0} a_y\delta_y$. On a alors, en notant P_i le noyau associé à Y_i,

$$E\big((x\oplus T_1)^2\big) = P_1(x;\Phi^2) = \sum_{z\geqslant 0} z^2(\delta_x\times\mu)(z)$$
$$= \sum_{z\geqslant 0} z^2\Big(\sum_{y\geqslant 0} a_y(\delta_x\times\delta_y)\Big)(z) = \sum_{y\geqslant 0} a_y\Big(\sum_{z\geqslant 0} z^2\delta_x\times\delta_y(z)\Big)$$
$$\leqslant \sum_{y\geqslant 0} a_y\big(x^2+y(y+2)\big) \quad \text{d'après (a).}$$

D'où:

$$E\big((x\oplus T_1)^2\big) \leqslant x^2+C_1, \quad \text{avec} \quad C_1 = E(Y_1^2)+2E(Y_1).$$

B. Récurrence. Supposons que, pour tout $x \geqslant 0$, on ait:

$$E\big((x\oplus T_{n-1})^2\big) \leqslant x^2+C_1+\ldots+C_{n-1}.$$

On a alors,

$$E\big((x\oplus T_n)^2\big) = P_1\cdot P_2 \dots P_{n-1}\cdot P_n(x;\Phi^2)$$
$$= \sum_{z\geqslant 0} P_1 \dots P_{n-1}(x,z) P_n(z;\Phi^2)$$
$$\leqslant \sum_{z\geqslant 0} P_1 \dots P_{n-1}(x,z)[z^2+C_n] \quad \text{d'après A},$$

d'où:

$$E\big((x\oplus T_n)^2\big) \leqslant \sum_{z\geqslant 0} P_1 \dots P_{n-1}(x,z) z^2 + C_n \leqslant x^2 + C_1 + \dots + C_{n+1} + C_n$$

d'après l'hypothèse de récurrence. L'inégalité est donc valable pour tout $n \in N^*$.

Remarque. Dans le cas de la marche S_n de loi μ partant de 0 on a $E(S_n^2) \leqslant nC_1$ si μ admet un moment d'ordre deux.

Lemme 3. *X_1, X_2, Y étant des variables aléatoires à valeurs dans N, on a:*

$$|X_1 \overset{D}{\oplus} Y - X_2 \overset{D}{\oplus} Y| \leqslant 2 + |X_1 - X_2|.$$

C'est une propriété géométrique évidente de l'addition $\overset{D}{\oplus}$ (cf. I.2, Remarque).

2. La loi forte des grands nombres. Suivant le schéma classique, nous la montrerons en deux étapes, la première étant la:

Proposition. *Si μ admet un moment d'ordre 2 alors* $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$.

Démonstration. (a) Il résulte du lemme 1 appliqué à $X = S_{n-1}$ et $Y = X_n$ que $(S_n)_{n\in N}$ est une sous-martingale positive. $(S_n^2)_{n\in N}$ est donc aussi une sous-martingale puisque

$$E(S_n^2|S_{n-1}) \geqslant [E(S_n|S_{n-1})]^2 \geqslant S_{n-1}^2.$$

(b) Selon une inégalité classique de Kolmogorov–Doob on a donc pour tout $t \neq 0$

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k^2 > t^2) \leqslant \frac{E(S_n^2)}{t^2}.$$

Ainsi, pour tout $t > 0$, on a d'après le lemme 2:

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} S_k > t) \leqslant \frac{nC}{t^2}$$

où

$$C = E(X_1^2) + 2EX_1.$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$ et notons, pour tout p entier positif,

$$E_p = \{S_r > r\varepsilon \text{ pour au moins un } r \in [2^{p-1}, 2^p[\}.$$

Alors

$$P(E_p) < P(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^p} S_k > 2^{p-1}\varepsilon) \leqslant \frac{4C}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{2^p}.$$

Ainsi

$$\sum_{p\geqslant 1} P(E_p) \leqslant \frac{4C}{\varepsilon^2} \sum_{p\geqslant 1} \frac{1}{2^p} < +\infty$$

et, d'après le lemme de Borel–Cantelli, presque sûrement un nombre au plus fini d'évènements E_p sont réalisés donc $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$.

On peut ensuite se libérer de l'hypothèse d'existence d'un moment d'ordre deux en considérant une marche tronquée $\overline{S}_n$ dont les pas $\overline{X}_i$ (de lois différentes) possèdent chacun un moment d'ordre deux et définie de la façon suivante:

$$\overline{X}_i = X_i \wedge i, \quad \overline{S}_1 = \overline{X}_1, \quad \overline{S}_n = \overline{S_{n-1}} \overset{D_n}{\oplus} \overline{X}_n \quad (n \text{ entier} \geqslant 2),$$

où D_n est la même direction que celle qui intervient dans $S_n = S_{n-1} \overset{D_n}{\oplus} X_n$.

A. Montrons d'abord que si μ possède un moment d'ordre 1, $|S_n - \overline{S}_n|$ est p.s. majoré indépendamment de n pour n assez grand.

(a) Il y a au plus un nombre fini d'indices m tels que $X_m \geqslant m$. En effet:

$$\sum_{k\geqslant 1} P(X_k \geqslant k) = \sum_{k\geqslant 1} P(X_1 \geqslant k) = \sum_{k\geqslant 1} k\cdot P(X_1 = k) = EX_1 < +\infty,$$

d'où le résultat d'après le lemme de Borel–Cantelli.

(b) Il en résulte qu'on peut trouver un entier N tel que, pour tout $k \geqslant N$ on ait $X_k = \overline{X}_k$ p.s. et donc, en notant Y la variable aléatoire

$$X_{N+1} \overset{D_{N+1}}{\oplus} X_{N+2} \overset{D_{N+2}}{\oplus} \dots \overset{D_{n-1}}{\oplus} X_n,$$
$$\overline{S}_n = \overline{S}_N \overset{D_N}{\oplus} Y \text{ p.s.}$$

(il s'agit ici d'une égalité de variables aléatoires au sens classique) pour $n > N$.

Donc, d'après le lemme 3:

$$|S_n - \overline{S}_n| = |S_N \overset{D_N}{\oplus} Y - \overline{S}_N \overset{D_N}{\oplus} Y| \leqslant 2 + |S_N - \overline{S}_N| \text{ p.s.} \quad \text{pour } n > N,$$

d'où le résultat.

B. $(\overline{S}_n^2)_{n\in N}$ est une sous-martingale.

Cela résulte du lemme 1 appliqué à $X = \overline{\overline{S}_{n-1}}$ et $Y = \overline{X}_n$ et de l'inégalité:

$$E(\overline{S}_n^2|\overline{\overline{S}_{n-1}}) \geqslant [E(\overline{S}_n|\overline{\overline{S}_{n-1}})]^2.$$

C. Soit $\varepsilon > 0$, et $a > 0$ et soit, pour tout p entier $\geqslant 1$ l'évènement

$$E_p = \{\overline{S}_r > r^a\varepsilon \text{ pour au moins un } r \in [2^{p-1}, 2^p[\}.$$

La série $\sum_{p\geqslant 1} P(E_p)$ converge si μ possède un moment d'ordre $3-2a$.

En effet:

$$P(E_p) \leqslant P(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^p} \overline{S}_k^2 > 2^{2a(p-1)}\varepsilon^2) \leqslant \frac{E(\overline{S}_{2^p}^2)}{\varepsilon^2 2^{2a(p-1)}}$$

d'après la même inégalité de Kolmogorov–Doob.

Or $E(\overline{S}_{2^p}^2) \leqslant \sum_{k=1}^{2^p} C_k$ d'après le lemme 2 avec $C_k = E(\overline{X}_k^2) + 2E\overline{X}_k$.

Donc

$$\sum_{p\geqslant 1} P(E_p) \leqslant \frac{4^a}{\varepsilon^2}\sum_{p\geqslant 1}\frac{1}{2^{2ap}}\sum_{k=1}^{2^p} C_k = \frac{4^a}{\varepsilon^2}\sum_{k\geqslant 1} C_k \sum_{p:2^p\geqslant k}\frac{1}{2^{2ap}}.$$

Or il est clair que:

(a) $\displaystyle\sum_{p:2^p\geqslant k}\frac{1}{2^{2ap}} \leqslant \frac{1}{k^{2a}}\left(\frac{4^a}{4^a-1}\right)$.

(b) $C_k = \sum_{m\geqslant 0} E(\overline{X}_k^2 + 2\overline{X}_k; X_k = m)$.

D'où:

$$\sum_{p\geqslant 1} P(E_p) \leqslant \frac{A^a}{\varepsilon^2}\sum_{m\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^{2a}}\max_{X_k=m}(\overline{X}_k^2 + 2\overline{X}_k)P(X_k = m) \quad \text{où } A_a = \frac{4^{2a}}{4^a-1}$$

$$\leqslant \frac{A_a}{\varepsilon^2}\sum_{m\geqslant 0}\sum_{k\geqslant 1}\frac{3}{k^{2a}}\min(k^2; m^2)P(X_1 = m).$$

Il est facile d'établir que, si $\frac{1}{2} < a \leqslant 1$, il existe une constante $B_a > 0$ telle que

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{3}{k^{2a}}\min(k^2; m^2) \leqslant B_a m^{3-2a}.$$

Alors

$$\sum_{p\geqslant 1} P(E_p) \leqslant \frac{A_a B_a}{\varepsilon^2}\sum_{m\geqslant 0} m^{3-2a}P(X_1 = m).$$

D. Il en résulte, en posant $a = 1-\delta/2$, que si μ possède un moment d'ordre $1+\delta$ avec $0 \leqslant \delta < 1$, presque sûrement un nombre au plus fini d'évènements E_p se réalisent, c'est-à-dire:

$$\frac{\overline{S}_n}{n^{1-\delta/2}} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0,$$

donc $\dfrac{S_n}{n^{1-\delta/2}} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ d'après A.

Bibliographie

[1] P. Eymard et B. Roynette, *Marches aléatoires sur le dual de* SU(2), dans: *Analyse harmonique sur les groupes de Lie*, Lecture Notes 497, Springer-Verlag. p. 108–152.

[2] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Wiley and Sons, 1965.

[3] C. George, *Les chaînes de Markov associées à des polynômes orthogonaux*, Thèse d'Etat, Nancy 1976.

[4] J. F. C. Kingman, *Random walks with spherical symmetry*, Acta Math. 109 (1963), p. 11–53.

[5] M. Loeve, *Probability theory*, (3-ème edition) Van Nostrand, New York 1963.

[6] F. Spitzer, *Principes des cheminements aléatoires*, C.I.R.O., Dunod, Paris 1970.

UNIVERSITÉ DE NANCY I
C-0-140 54037 NANCY, FRANCE

Received June 23, 1976
Revised version July 20, 1977 (1173)