Contents of volume LXVI, number 1

STUDIA MATHEMATICA

Managing Editors: **Z. Ciesielski, W. Orlicz** (*Editor-in-Chief*), **A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers submitted should be typed on one side only and accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies, one of them being the typed, not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES

ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

ARS POLONA

Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa, Poland

ISBN 83-01-01345-1 ISSN 0039-3223

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVI. (1979)

Über die spektralen Vielfachheitsfunktionen des Multiplikationsoperators

von

KLAUS GERO KALB (Mainz)

Abstract. The multiplicity theory of a multiplication operator M_φ on $L^2(X, \mu)$ (X separable complete metrizable locally compact space; μ finite Borel measure on X; $\varphi\colon X \to C$ bounded Borel function) has been treated in [1], [9]. Combining methods of [7], [9] we obtain the following result on the von Neumann multiplicity function k of M_φ, answering a question posed in [1]: Let $\nu = \mu \circ \varphi^{-1}$, $e = \{z\colon k(z) < \infty\}$. Then:

(1) There exists a μ-null set $N \subset X$ such that $k(z) = \#(\varphi|_{X-N})^{-1}\{z\}$ ν-a.e.

(2) $k(z) = \#\varphi^{-1}\{z\}$ ν-a.e. if and only if for each μ-null set $N \subset X$ the set $\varphi(N) \cap e$ is contained in a ν-null set.

Moreover, we give a description of the Hellinger-Hahn multiplicity function of M_φ in terms of φ.

1. Einleitung. Sei T ein beschränkter normaler Operator auf dem separablen komplexen Hilbertraum H. Der Spektralsatz für T wird heute vielfach so ausgesprochen:

(1.1) *T ist unitäräquivalent zum Operator M_φ der Multiplikation mit φ auf $L^2(X, \mu)$, wo X ein (vollständiger metrischer, separabler) lokalkompakter Raum, μ ein (positives) endliches Borelmaß auf X und $\varphi\colon X \to C$ eine beschränkte Borelfunktion ist.*

Das sich hiermit ergebende Problem, die von Neumannsche Vielfachheitsfunktion $k\colon C \to N \cup \{0, \infty\}$ von T durch φ auszudrücken, wurde von M. B. Abrahamse & T. L. Kriete [1] auf sehr befriedigende Weise gelöst (Einzelheiten in Abschnitt 4). In [1] wird herausgestellt, daß zwar stets gilt

$$k(z) \leqslant \#\varphi^{-1}\{z\} \quad (= \text{Anzahl der Urbilder von } z \text{ unter } \varphi) \quad \text{für } \nu\text{-f.a. } z \in C \tag{1.2}$$

(wo ν ein skalares Spektralmaß von M_φ bezeichnet), im allgemeinen aber nicht die bei einem ersten Hinsehen zu vermutende Formel

$$k(z) = \#\varphi^{-1}\{z\} \quad \text{für } \nu\text{-f.a. } z \in C \tag{1.3}$$

zutreffen muß, selbst dann nicht, wenn φ stetig ist. Da außer ihrem ästhetischen Wert die Gültigkeit von (1.3) Bedeutung bei verallgemeinerten Eigenfunktionsentwicklungen zu haben scheint (vgl. Abschnitt 7), lohnt es sich, zu der diesbezüglichen in [1] gestellten Frage weitere Überlegungen anzustellen.

Ein näheres Hinsehen zeigt, daß der Grund für das Nicht-Zutreffen von (1.3) darin liegen muß, daß (erlaubte) Änderungen von φ auf einer μ-Nullmenge zu bzgl. ν wesentlichen Änderungen der rechten Seite von (1.3) führen können. So wird in Abschnitt 5 (vgl. Satz 3) eine notwendige und hinreichende Bedingung über φ für die Gültigkeit von (1.3) angegeben, die sich im Falle endlicher Gesamtvielfachheit auf die folgende Absolutstetigkeits-Forderung reduziert:

(1.4) *Für jede μ-Nullmenge $N \subset X$ ist $\varphi(N)$ in einer ν-Nullmenge enthalten.*

Ferner wird gezeigt, daß es stets eine μ-Nullmenge $N \subset X$ gibt, so daß

(1.5) $$k(z) = \#(\varphi|_{X-N})^{-1}\{z\} \quad \text{für} \quad \nu\text{-f.a. } z \in C$$

(vgl. Satz 4), d.h. die Gültigkeit von (1.3) kann stets durch Abänderung von φ auf einer μ-Nullmenge erreicht werden. Dieses Ergebnis wird in Abschnitt 6 dazu angewandt, die Hellinger-Hahnsche Vielfachheitsfunktion von $M\varphi$ als Zählfunktion der „mehrfachen Zugehörigkeit" zum wesentlichen Bildbereich von φ zu beschreiben (Satz 5).

Hauptsächliches Beweishilfsmittel ist eine in Abschnitt 3 bewiesene neue Formel für k (vgl. Satz 2), die auf Ergebnissen aus [7] (implizit schon in [10]) (Satz 1) und von N.G. Nadkarni [9] beruht. Wenn φ *halbschlicht* ist (d.h. $\varphi^{-1}\{z\}$ für jedes z höchstens abzählbar ist; dies kann bei (1.1) stets erreicht werden) oder wenigstens *im μ-wesentlichen halbschlicht* ist (d.h. eine μ-Nullmenge $N \subset X$ existiert, so daß $\varphi|_{X-N}$ halbschlicht ist; dies ist nach [9] notwendigerweise der Fall, wenn $M\varphi$ endliche Gesamtvielfachheit besitzt), ist der Beweis unabhängig von [9]. Um die Verbindung zu [1] herzustellen, wird in Abschnitt 4 gezeigt, wie unsere Formel aus der von Abrahamse & Kriete folgt, und wie umgekehrt deren Formel im Spezialfalle, daß φ im μ-wesentlichen halbschlicht ist, aus der unseren abgeleitet werden kann. Dieser Abschnitt kann übersprungen werden, wenn nur der Beweis der neuen Aussagen in Abschnitt 5 und 6 interessiert. Schließlich werden in Abschnitt 7 das Hauptbeispiel von [1] sowie einige weitere Beispiele von Operatoren mit rein absolutstetigem Spektrum im Lichte der oben beschriebenen Ergebnisse diskutiert.

Noch einige Worte zu den benutzten Bezeichnungen: Alle in dieser Arbeit betrachteten Maße sind Borelmaße. Kleine deutsche Buchstaben $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \ldots, \mathfrak{n}, \mathfrak{m}, \ldots$ stehen für Borelmengen in C; wenn ν ein Borelmaß auf C ist, so ist $L^2(\nu) := L^2(C, \nu)$; wenn $\mathfrak{e}$ eine Borelmenge ist, so ist $\nu|_\mathfrak{e}$ das durch $(\nu|_\mathfrak{e})(\mathfrak{b}) = \nu(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{e})$ ($\mathfrak{b}$ Borelmenge in C) definierte Maß. Der Träger von ν wird mit $\operatorname{supp}(\nu)$ bezeichnet; wenn ν_1, ν_2 zueinander äquivalent sind, schreiben wir $\nu_1 \sim \nu_2$.

2. Spektralsatz und von Neumannsche Vielfachheitsfunktion. (1.1) wird im allgemeinen aus der folgenden Fassung des Spektralsatzes für T hergeleitet:

(2.1) *Es gibt eine Folge (ϱ_m) gleichmäßig beschränkter (positiver) Borelmaße auf C mit Träger in $\sigma(T)$ und eine unitäre Abbildung (Spektraldarstellung von T)*

$$U\colon H \to \hat{H} = \bigoplus_{1 \leq m < \infty} L^2(\varrho_m),$$

so daß $\hat{T} = UTU^{-1}$ die Multiplikation mit z in $\hat{H}$ ist:

$$[\hat{T}\hat{f}]_m(z) = z \cdot \hat{f}_m(z) \;\; \varrho_m\text{-f.ü. } \textit{auf } C \quad \textit{für} \quad 1 \leq m < \infty$$
$$(\text{f.a. } \hat{f} = [\hat{f}_m(\cdot)] \in \hat{H}).$$

Dann definiert man X, μ, φ wie folgt: Für $1 \leq m < \infty$ sei $X_m = \operatorname{supp}(\varrho_m)$; dann $X := \bigcup_{1 \leq m < \infty} \{m\} \times X_m$. Durch

$$d((m, z), (m', z')) := \begin{cases} |z - z'| & \text{falls} \quad m = m', \\ \|T\| & \text{falls} \quad m \neq m', \end{cases}$$

wird X zu einem vollständigen metrischen, separablen, lokalkompakten Raum. Die Borelmengen in X sind von der Form $B = \bigcup_{1 \leq m < \infty} \{m\} \times \mathfrak{b}_m$, wo die $\mathfrak{b}_m$ Borelmengen in X_m sind. Das endliche Borelmaß μ auf X wird dann durch $\mu(B) = \sum_{1 \leq m < \infty} 2^{-m} \varrho_m(\mathfrak{b}_m)$ erklärt. Definiere nun $\varphi\colon X \to C$ durch $\varphi((m, z)) = z$. φ ist stetig, insbesondere Borelfunktion, und beschränkt: $|\varphi(x)| \leq \|T\|$ f.a. $x \in X$. Ferner ist φ halbschlicht. Sei $V\colon \hat{H} \to L^2(X, \mu)$ definiert durch $[\hat{f}_m(\cdot)] \overset{V}{\mapsto} f \in L^2(X, \mu)$ wo $f((m, z)) := \hat{f}_m(z)$ für $(m, z) \in X$. Dann ist $W = V \cdot U$ ein isometrischer Isomorphismus von H auf $L^2(X, \mu)$ und $WTW^{-1} = M_\varphi$.

Man beachte, daß die „gewünschte Vielfachheitsfunktion" $z \mapsto \#\varphi^{-1}\{z\}$ stark von der Spektraldarstellung U abhängt. Wenn man für U eine kanonische Spektraldarstellung nimmt (d.h. ϱ_{m+1} absolutstetig bzgl. ϱ_m für $1 \leq m < \infty$), so ist diese Funktion gerade gleich der *Hellinger-Hahnschen Vielfachheitsfunktion* $m(z)$ (vgl. [6]).

Zurück zum Spektralsatz in der Form (2.1). Sei ϱ ein skalares Spektralmaß von T, d.h. ein Borelmaß auf C, das mit dem Spektralmaß $E(\cdot)$ von T in dem Sinne äquivalent ist, daß $E(\mathfrak{b}) = 0 \Leftrightarrow \varrho(\mathfrak{b}) = 0$, etwa $\varrho = \sum_{1 \leq m < \infty} 2^{-m} \varrho_m$. Eine von mehreren Möglichkeiten die *von Neumannsche Vielfachheitsfunktion* k von T einzuführen, beruht auf einer

„geordneten Spektraldarstellung" von T (vgl. [3], p. 916):

(2.2) *Es gibt Borelmengen $\mathfrak{e}_1 \supset \mathfrak{e}_2 \supset \ldots$ und eine unitäre Abbildung*

$$U_0\colon H \to \hat{H}_0 = \bigoplus_{1 \leqslant m < \infty} L^2(\mathfrak{e}_m, \varrho),$$

so daß $\hat{T}_0 := U_0 T U_0^{-1}$ die Multiplikation mit z in $\hat{H}_0$ ist.

Die Vielfachheitsmengen $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots$ sind durch T ϱ-f.ü. eindeutig bestimmt und definieren k in folgender Weise:

$$k(z) = \#\{m \in \boldsymbol{N}\colon z \in \mathfrak{e}_m\} \quad (z \in \boldsymbol{C}).$$

In [10], p. 424f wird beschrieben, wie man aus der geordneten Spektraldarstellung U_0 eine Darstellung von T als Multiplikation mit z in einem direkten Integral mit dem Maß ϱ und der Vielfachheitsfunktion k gewinnt, über die k üblicherweise eingeführt wird.

Die Funktion k kann folgendermaßen aus der gewöhnlichen Spektraldarstellung U von T (in (2.1)) „abgelesen" werden:

Man bilde die Radon–Nikodym–Ableitungen $\dfrac{d\varrho_m}{d\varrho}$ und definiere

$$\mathfrak{c}_m := \left\{z \in \boldsymbol{C}\colon \frac{d\varrho_m}{d\varrho}(z) > 0\right\} \quad (1 \leqslant m < \infty).$$

Dann gilt

Satz 1. *$k(z) = \#\{m \in \boldsymbol{N}\colon z \in \mathfrak{c}_m\}$ (für ϱ-f.a. $z \in \boldsymbol{C}$).*

Zu einem direkten Beweis (mit expliziter Konstruktion von U_0 aus U) vgl. [10], p. 423f oder [7]. Es sei auch darauf hingewiesen, daß sich Satz 1 auch aus den in [9] bewiesenen Aussagen über Hellinger–Hahnsche Zerlegungen des Definitionsbereiches von halbschlichten Borelfunktionen folgern läßt, und daß sich umgekehrt diese Aussagen sofort aus dem zum Beweis von Satz 1 in [7], [10] benutzten „Umschichtungsverfahren" ergeben.

3. Eine neue Formel für die von Neumannsche Vielfachheitsfunktion von M_φ. In diesem und den drei folgenden Abschnitten sei X ein vollständiger metrischer, separabler, lokalkompakter Raum, μ ein endliches Borelmaß auf X und $\varphi\colon X \to \boldsymbol{C}$ eine beschränkte Borelfunktion. Nach [9] existiert eine Zerlegung von X in paarweise disjunkte Borelmengen $E_1, E_2, \ldots, E_\infty$ so daß für $1 \leqslant m < \infty$ die Funktionen $\varphi|_{E_m}$ eineindeutig sind und $\varphi|_N$ für jede Borelmenge $N \subset E_\infty$ mit $\mu(N) > 0$ *nicht* eineindeutig ist. Diese Zerlegung induziert eine Spektraldarstellung von M_φ: Für $1 \leqslant m \leqslant \infty$ setze man $\nu_m := \mu \circ (\varphi|_{E_m})^{-1}$. Da μ endlich ist, ist $(\nu_m)_{1 \leqslant m \leqslant \infty}$ gleichmäßig beschränkt. Man beachte, daß für $1 \leqslant m < \infty$ ν_m auf der Borelmenge (vgl. [5], p. 294) $\varphi(E_m)$ konzentriert ist; damit ist $L^2(E_m, \mu)$ unter der Abbildung $f \mapsto f \circ (\varphi|_{E_m})^{-1}$ unitäräquivalent zu $L^2(\nu_m)$,

wobei $M_\varphi|_{L^2(E_m,\mu)}$ in die Multiplikation mit z auf $L^2(\nu_m)$ übergeht. Nach [9] hat $M_\varphi|_{L^2(E_\infty,\mu)}$ die gleichmäßige Vielfachheit ∞ mit zugehörigem skalaren Spektralmaß ν_∞, d.h. ist unitäräquivalent zur Multiplikation mit z auf $\aleph_0 \cdot L^2(\nu_\infty)$. Wegen $L^2(X, \mu) = \bigoplus_{1 \leqslant m \leqslant \infty} L^2(E_m, \mu)$ existiert so eine Spektraldarstellung

$$U\colon L^2(X, \mu) \to \bigoplus_{1 \leqslant m < \infty} L^2(\nu_m) \oplus \aleph_0 \cdot L^2(\nu_\infty) \tag{3.1}$$

von M_φ. $\nu = \mu \circ \varphi^{-1}$ ist ein skalares Spektralmaß von M_φ, z.B. da $\nu = \sum_{1 \leqslant m \leqslant \infty} \nu_m$. Für $1 \leqslant m \leqslant \infty$ sei

$$\mathfrak{d}_m := \left\{z \in \boldsymbol{C}\colon \frac{d\nu_m}{d\nu}(z) > 0\right\}.$$

Man beachte daß

$$\nu_m \sim \nu|_{\mathfrak{d}_m} \quad (1 \leqslant m \leqslant \infty); \tag{3.2}$$

da für $1 \leqslant m < \infty$ ν_m auf $\varphi(E_m)$ konzentriert ist, können die Repräsentanten der Radon–Nikodym-Ableitungen so festgelegt werden, daß

$$\mathfrak{d}_m \subset \varphi(E_m) \quad (1 \leqslant m < \infty). \tag{3.3}$$

Aus Satz 1 ergibt sich nun sofort

Satz 2. *Eine von Neumannsche Vielfachheitsfunktion k von M_φ ist gegeben durch*

$$k(z) = \sum_{1 \leqslant m < \infty} \chi_{\mathfrak{d}_m}(z) + \infty \cdot \chi_{\mathfrak{d}_\infty}(z) \quad (z \in \boldsymbol{C}). \tag{3.4}$$

Wenn φ im μ-wesentlichen halbschlicht ist, ist E_∞ eine μ-Nullmenge und die Existenz von E_m $(1 \leqslant m < \infty)$ folgt aus einem Satz von Lusin (vgl. [9], thm. 2.1; [5], p. 294). Die Formel (3.4) reduziert sich auf

$$k(z) = \sum_{1 \leqslant m < \infty} \chi_{\mathfrak{d}_m}(z) \quad (z \in \boldsymbol{C}). \tag{3.5}$$

4. Beziehungen zur Formel von Abrahamson & Kriete. Abrahamson & Kriete [1] geben die folgende Formel für die von Neumannsche Vielfachheitsfunktion k von M_φ: Sei $Y = \sigma(M_\varphi) = \operatorname{supp}(\nu)$. Dann:

$$k(z) = \#\varphi_\mu^{-1}\{z\} \quad \text{für} \quad \nu\text{-f.a. } z \in Y. \tag{4.1}$$

Hierbei bezeichnet $\varphi_\mu^{-1}\{z\}$ das *wesentliche* Urbild von z (unter φ), das wie folgt definiert ist:

$$x \in \varphi_\mu^{-1}\{z\} \Leftrightarrow D_V(z) := \lim_{\delta \to 0} \frac{\mu\big(V \cap \varphi^{-1}(B_\delta(z))\big)}{\mu\big(\varphi^{-1}(B_\delta(z))\big)} > 0$$

für alle Umgebungen V von x.

Hier bezeichnet $B_\delta(z)$ die Kreisscheibe um z mit Radius δ. Man beachte (vgl. [1]), daß die Funktion D_V ein Repräsentant der Radon–Nikodym-Ableitung $\frac{d\nu_V}{d\nu}$ ist, wo $\nu_V := (\mu|_V)\circ\varphi^{-1}$.

Wir geben in diesem Abschnitt für den Spezialfall, daß φ in μ-wesentlichen halbschlicht ist, einen direkten (von [1] und [9] unabhängigen) Beweis für die Formel

$$(4.2) \qquad \#\varphi_\mu^{-1}\{z\} = \sum_{1\leqslant m<\infty} \chi_{\mathfrak{d}_m}(z) \quad \text{für} \quad \nu\text{-f.a. } z\in Y.$$

Wenn man (4.1) zugrundelegt, hat man hierdurch einen neuen Beweis für Satz 1: Ausgehend von einer Spektraldarstellung U von T (nach (2.1)) konstruiere man $L^2(X,\mu)$, φ wie in Abschnitt 2. Mit $E_m = \{m\}\times X_m$ $(1\leqslant m<\infty)$, $E_\infty = \mathit{leere\ Menge}$ hat man dann eine Zerlegung von X des in Abschnitt 3 betrachteten Typs. Offenbar gilt hierfür $\nu_m = \varrho_m$, $\nu\sim\varrho$, $\mathfrak{d}_m = \mathfrak{c}_m$ $(1\leqslant m<\infty)$. Satz 1 folgt somit aus (4.1) und (4.2). (Wenn man nur die Deduktion von Satz 1 aus (4.1) im Auge hat, kann der folgende Beweis für (4.2) wegen der speziellen Struktur von X und μ stark vereinfacht werden.) Geht man andererseits von Satz 1 aus, so hat man einen neuen Beweis für (4.1) allderdings nur im betrachteten Spezialfall, daß φ μ-wesentlich halbschlicht ist.

Zum Beweis von (4.2) wähle man eine abzählbare Basis $\mathscr{V}$ der offenen Mengen in X, dann für jedes $V\in\mathscr{V}$ einen festen Repräsentanten der Radon–Nikodym-Ableitung $\frac{d\nu_V}{d\nu}$. Zu jedem $V\in\mathscr{V}$ existiert eine ν-Nullmenge $\mathfrak{n}_V$, so daß

$$D_V(z) = \frac{d\nu_V}{d\nu}(z) \text{ f.a. } z\in Y-\mathfrak{n}_V.$$

$\mathfrak{n} := \bigcup_{V\in\mathscr{V}} \mathfrak{n}_V$ ist eine ν-Nullmenge. Sei $V\in\mathscr{V}$. Wir berechnen $\frac{d\nu_V}{d\nu}$. Mit $V_m := V\cap E_m$ ist $V = \bigcup_{1\leqslant m\leqslant\infty} V_m$; man beachte, daß $\mu(E_\infty)=0$. Damit gilt für jede Borelmenge $\mathfrak{b}$ in C (wobei sich die dritte Gleichung aus der Eineindeutigkeit von $\varphi|_{E_m}$ ergibt):

$$\begin{aligned}\nu_V(\mathfrak{b}) := \mu\big(V\cap\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big) &= \sum_{1\leqslant m<\infty}\mu\big(V_m\cap\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big)\\ &= \sum_{1\leqslant m<\infty}\nu_m\big(\varphi(V_m)\cap\mathfrak{b}\big) = \sum_{1\leqslant m<\infty}\int_{\mathfrak{b}}\chi_{\varphi(V_m)}\cdot\frac{d\nu_m}{d\nu}\,d\nu\\ &= \int_{\mathfrak{b}}\Big[\sum_{1\leqslant m<\infty}\chi_{\varphi(V_m)}\cdot\frac{d\nu_m}{d\nu}\Big]d\nu.\end{aligned}$$

Die Summe konvergiert wegen des Satzes von Beppo Levi für ν-f.a. $z\in C$; die zu den abzählbar vielen $V\in\mathscr{V}$ gehörigen Ausnahme-ν-Nullmengen werden zu $\mathfrak{n}$ geschlagen. Wir können also im Folgenden davon ausgehen, daß

$$(4.3) \qquad D_V(z) = \sum_{1\leqslant m<\infty}\chi_{\varphi(V_m)}(z)\cdot\frac{d\nu_m}{d\nu}(z) \quad \text{für alle } z\in Y-\mathfrak{n}, \text{ für alle } V\in\mathscr{V}.$$

Beweis für $\#\{m\in N:\ z\in\mathfrak{d}_m\}\leqslant\#\varphi_\mu^{-1}\{z\}$ f.a. $z\in Y-\mathfrak{n}$: Sei $z\in Y-\mathfrak{n}$. Wenn $z\in\mathfrak{d}_{m_0}\subset\varphi(E_{m_0})$, also $z=\varphi(x)$ mit $x\in E_{m_0}$, so ist $x\in\varphi_\mu^{-1}\{z\}$: Denn ist $V\in\mathscr{V}$ eine Umgebung von x, so ist $x\in V_{m_0} = V\cap E_{m_0}$, also $z=\varphi(x)\in\varphi(V_{m_0})$ und damit nach (4.3)

$$D_V(z)\geqslant\chi_{\varphi(V_{m_0})}(z)\cdot\frac{d\nu_{m_0}}{d\nu}(z) = 1\cdot\frac{d\nu_{m_0}}{d\nu}(z)>0$$

da $z\in\mathfrak{d}_{m_0}$. Wenn nun $\#\{m\in N:\ z\in\mathfrak{d}_m\} = R$, so liegt z in R verschiedenen $\mathfrak{d}_m$'s, besitzt also wesentliche Urbilder in R verschiedenen E_m's. Da die E_m disjunkt sind, folgt $\#\varphi_\mu^{-1}\{z\}\geqslant R$.

Beweis für $\#\varphi_\mu^{-1}\{z\}\leqslant\#\{m\in N:\ z\in\mathfrak{d}_m\}$ f.a. $z\in Y-\mathfrak{n}$: Sei $z\in Y-\mathfrak{n}$, sei $\#\{m\in N:\ z\in\mathfrak{d}_m\} = R$. Sei o.B.d.A. $R<\infty$. Dann gibt es natürliche Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_R$ so daß $z\in\mathfrak{d}_{m_1}\cap\mathfrak{d}_{m_2}\cap\ldots\cap\mathfrak{d}_{m_R}$, jedoch $z\notin\mathfrak{d}_m$ für $m\notin\{m_1, m_2, \ldots, m_R\}$. Nach (4.3) folgt dann

$$(4.4) \qquad D_V(z) = \sum_{1\leqslant k\leqslant R}\chi_{\varphi(V_{m_k})}(z)\cdot\frac{d\nu_{m_k}}{d\nu}(z) \text{ f.a. } V\in\mathscr{V},$$

wobei $\frac{d\nu_{m_k}}{d\nu}(z)>0$ für $1\leqslant k\leqslant R$. Sei $x\in\varphi_\mu^{-1}\{z\}$, d.h. $D_V(z)>0$ für alle Umgebungen $V\in\mathscr{V}$ von x. Nach (4.4) muß dann ein $k_0\in\{1,2,\ldots,R\}$ existieren, so daß

$$\chi_{\varphi(V_{m_{k_0}})}(z)>0 \quad \text{für alle Umgebungen } V\in\mathscr{V} \text{ von } x,$$

d.h. es muß gelten

$$z\in\varphi(V\cap E_{m_{k_0}}) \text{ für alle Umgebungen } V\in\mathscr{V} \text{ von } x.$$

Wegen der Eineindeutigkeit von $\varphi|_{E_{m_{k_0}}}$ kann nur ein x mit dieser Eigenschaft existieren. Da k_0 nur R verschiedene Werte annehmen kann, kann $\varphi_\mu^{-1}\{z\}$ höchstens aus R Punkten bestehen, d.h. $\#\varphi_\mu^{-1}\{z\}\leqslant R$.

5. $z\mapsto\#\varphi^{-1}\{z\}$ als von Neumannsche Vielfachheitsfunktion von M_φ. Die Ergebnisse von Abschnitt 3 sollen jetzt dazu benutzt werden, zu untersuchen, inwieweit die Formel (1.3) gilt. Die Überlegungen und Formulierungen in diesem und im nächsten Abschnitt könnten etwas vereinfacht werden, wenn φ die Eigenschaft hätte, Borelmengen in Borelmengen überzuführen (was z.B. dann zutrifft, wenn φ halbschlicht ist (vgl. [5])). Die Zählfunktion $z \mapsto \#\varphi^{-1}\{z\}$ ist dann eine Borelfunktion (vgl. [5], p. 176). Aus (3.4) und (1.2) folgt

(5.1) $$\#\varphi^{-1}\{z\} = \infty \quad \text{für} \quad \nu\text{-f.a. } z \in \mathfrak{d}_\infty.$$

Umgekehrt folgt (1.2) unter Beachtung von (3.3) sofort aus (3.4) und (5.1). Um von [1] unabhängig zu bleiben, beweisen wir zunächst (5.1) mit den Methoden von Abschnitt 3:

Es genügt zu zeigen, daß für $n = 1, 2, \ldots$ gilt

(5.2) $$\#\varphi^{-1}\{z\} \geqslant n \quad \text{für} \quad \nu\text{-f.a. } z \in \mathfrak{d}_\infty.$$

Beweis für (5.2). Nach [9], thm. 3.1 existiert eine Zerlegung von E_∞ in paarweise disjunkte Borelmengen $F_1, \ldots, F_n$ so daß $\tau_1 \sim \tau_2 \sim \ldots \ldots \sim \tau_n \sim \nu_\infty$ wo $\tau_k = \mu \circ (\varphi|_{F_k})^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Es existieren (vgl. [2], chap. V, § 6) Borelmengen $\mathfrak{b}_k$ mit $\mathfrak{b}_k \subset \varphi(F_k)$ und $\tau_k(C - \mathfrak{b}_k) = 0$. Damit $0 = \tau_k(\mathfrak{d}_\infty - \mathfrak{b}_k) = \nu_\infty(\mathfrak{d}_\infty - \mathfrak{b}_k) = \nu(\mathfrak{d}_\infty - \mathfrak{b}_k)$ (letzteres wegen (3.2)). Somit ist $\mathfrak{n} := \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} (\mathfrak{d}_\infty - \mathfrak{b}_k)$ eine ν-Nullmenge. Die Behauptung (5.2) folgt jetzt aus $\mathfrak{d}_\infty - \mathfrak{n} \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} \mathfrak{b}_k \subset \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} \varphi(F_k)$.

Sei $\mathfrak{e} := \{z \in C\colon k(z) < \infty\}$. Man beachte, daß auf $C - \mathfrak{e}$ die gewünschte Gleichheit nach (1.2) ν-f.ü. gegeben ist.

Satz 3. *Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von* (1.3) *ist:*
(5.3) *Für jede μ-Nullmenge $N \subset X$ ist $\varphi(N) \cap \mathfrak{e}$ in einer ν-Nullmenge enthalten.*

Beweis. 1. (5.3) *ist hinreichend*: Für $1 \leqslant m < \infty$ setze $\mathfrak{n}_m = (\varphi(E_m) \cap \mathfrak{e}) - \mathfrak{d}_m$. Es genügt zu zeigen

(5.4) $$\begin{gathered} \nu(\mathfrak{n}_m) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant m < \infty; \\ \varphi(E_\infty) \cap \mathfrak{e} - \mathfrak{d}_\infty \subset \mathfrak{n}_\infty \quad \text{für eine geeignete } \nu\text{-Nullmenge } \mathfrak{n}_\infty. \end{gathered}$$

Denn ist $\mathfrak{m}$ eine ν-Nullmenge, so daß

(5.5) $$\#\varphi^{-1}\{z\} = \infty \quad \text{für alle } z \in \mathfrak{d}_\infty - \mathfrak{m},$$

so gilt mit $\mathfrak{n} = \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant \infty} \mathfrak{n}_m \cup \mathfrak{m}$ für $z \in \mathfrak{e} - \mathfrak{n}$ zunächst $z \notin \mathfrak{d}_\infty$, also $z \notin \varphi(E_\infty)$, und damit wegen (3.3) und der Eineindeutigkeit von $\varphi|_{E_m}$ für $1 \leqslant m < \infty$ schließlich $k(z) \geqslant \#\varphi^{-1}\{z\}$.

Beweis für (5.4). Sei $1 \leqslant m \leqslant \infty$. Wegen $0 = \nu_m(C - \mathfrak{d}_m) = \mu(E_m \cap \varphi^{-1}(C - \mathfrak{d}_m))$ gibt es nach Voraussetzung eine ν-Nullmenge $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{e} \cap \varphi(E_m \cap \varphi^{-1}(C - \mathfrak{d}_m)) \subset \mathfrak{a}$. Hieraus folgt $\varphi(E_m) \cap \mathfrak{e} - \mathfrak{d}_m \subset \mathfrak{a}$.

2. (5.3) *ist notwendig*: Sei $\mathfrak{n}$ eine ν-Nullmenge so daß

(5.6) $$k(z) = \#\varphi^{-1}\{z\} \quad \text{für } z \in C - \mathfrak{n}.$$

Dann ist $\varphi(E_m) \cap \mathfrak{e} - \mathfrak{d}_m \subset \mathfrak{n}$ für $1 \leqslant m < \infty$, denn für $z \in \varphi(E_m) \cap \mathfrak{e} - \mathfrak{d}_m$ ist nach (3.3) und (3.4) $\#\varphi^{-1}\{z\} \geqslant k(z) + 1$. Also gilt

(5.7) $$\nu(\varphi(E_m) \cap \mathfrak{e} - \mathfrak{d}_m) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant m < \infty.$$

Sei nun $N \subset X$ eine μ-Nullmenge. Es ist $N = \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant \infty} N_m$, wo $N_m = E_m \cap N$, $1 \leqslant m \leqslant \infty$; $\varphi(N) \cap \mathfrak{e} = \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant \infty} \varphi(N_m) \cap \mathfrak{e}$. Die Behauptung, daß $\varphi(N) \cap \mathfrak{e}$ in einer ν-Nullmenge enthalten ist, folgt dann aus den folgenden zwei Bemerkungen: (a) Für $1 \leqslant m < \infty$ ist $\nu(\varphi(N_m) \cap \mathfrak{e}) = \nu(\varphi(N_m) \cap \mathfrak{e} - \mathfrak{d}_m) + \nu(\varphi(N_m) \cap \mathfrak{e} \cap \mathfrak{d}_m) = 0$, wobei der erste Summand wegen (5.7) verschwindet und der zweite wegen $\nu_m(\varphi(N_m) \cap \mathfrak{e} \cap \mathfrak{d}_m) \leqslant \nu_m(\varphi(N_m)) = \mu(E_m \cap \varphi^{-1}(\varphi(N_m))) = \mu(N_m) = 0$ und (3.2). (b) $\varphi(N_\infty) \cap \mathfrak{e}$ ist in einer ν-Nullmenge enthalten: Denn sei $\mathfrak{m}$ eine ν-Nullmenge so daß (5.5) gilt, so ist (unter Beachtung von (3.3))

$$\#\varphi^{-1}\{z\} \geqslant k(z) + 1 \quad \text{für alle } z \in \varphi(N_\infty) \cap \mathfrak{e} - \mathfrak{m},$$

also gilt nach (5.6) daß $\varphi(N_\infty) \cap \mathfrak{e} \subset \mathfrak{m} \cup \mathfrak{n}$.

Satz 4. *Es gibt stets eine ν-Nullmenge $N \subset X$ so daß*

$$k(z) = \#(\varphi|_{X-N})^{-1}\{z\} \quad \nu\text{-f.ü. } auf\ C.$$

Beweis. Man definiere für $1 \leqslant m \leqslant \infty$: $N_m = \{x \in E_m\colon \varphi(x) \notin \mathfrak{d}_m\}$; es gilt $\mu(N_m) = \nu_m(C - \mathfrak{d}_m) = 0$. $N := \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant \infty} N_m$ ist eine μ-Nullmenge, die das Gewünschte leistet: Da die Abänderung von φ auf einer ν-Nullmenge die Gültigkeit von (1.2) nicht berührt, gilt zunächst

$$k(z) \leqslant \#(\varphi|_{X-N})^{-1}\{z\} \quad \nu\text{-f.ü. auf } C;$$

damit existiert eine ν-Nullmenge $\mathfrak{n}$ so daß

(5.8) $$\#(\varphi|_{X-N})^{-1}\{z\} = \infty \quad \text{für alle } z \in \mathfrak{d}_\infty - \mathfrak{n}.$$

Aus (3.4), (5.8), der Definition von N und der Eineindeutigkeit von $\varphi|_{E_m}$ für $1 \leqslant m < \infty$ folgt nun leicht daß

$$\#(\varphi|_{X-N})^{-1}\{z\} \leqslant k(z) \quad \text{f.a. } z \in C - \mathfrak{n}.$$

6. Die Hellinger-Hahnsche Vielfachheitsfunktion von M_φ. Die Hellinger-Hahnsche Vielfachheitsfunktion $h\colon C \to N \cup \{0, \infty\}$ eines normalen Operators T beschreibt das „gestufte Spektrum" von T, d.h. die fallende Folge der Spektren der zyklischen Anteile von T bei einer kanonischen Spektraldarstellung (vgl. [6], [7]). Sie verfeinert somit den Begriff des Spektrums von T, welches für $T = M_\varphi$ gleich dem wesentlichen Bildbereich von φ ist. Wir werden im Folgenden sehen, daß die Hellinger-Hahnsche Vielfachheitsfunktion von M_φ die Zählfunktion der „mehrfachen Zugehörigkeit" zum wesentlichen Bildbereich von M_φ ist.

Seien $X, \mu, \varphi\colon X \to C$ wie in Abschnitt 3. Sei E eine (nicht notwendig Borelsche) Teilmenge von X. Der *wesentliche Bildbereich* von $\varphi|_E$, bezeichnet durch $e\text{-rg}(\varphi|_E)$, wird definiert das das Komplement der Menge der Punkte $z_0 \in C$, für die ein $\varepsilon > 0$ existiert so daß $|\varphi(x) - z_0| \geqslant \varepsilon$ für μ-f.a. $x \in E$.

Definition. Sei $n \in N$, $z_0 \in C$. Man sagt, z_0 gehört *mindestens n-fach* zu $e\text{-rg}(\varphi)$, wenn für jede μ-Nullmenge $N \subset X$ gilt, daß $z_0 \in e\text{-rg}(\varphi|_{E_n(N)})$, wo $E_n(N) := \{x \in X - N\colon \#(\varphi|_{X-N})^{-1}\{\varphi(x)\} \geqslant n\}$.

Da $E_1(N) = X - N$, ist „mindestens einfache Zugehörigkeit" zu $e\text{-rg}(\varphi)$ gleichbedeutend mit „Zugehörigkeit". Die Begriffe „genau n-fache" und „∞-fache Zugehörigkeit" werden jetzt wie üblich definiert.

Satz 5. *Sei $h(\cdot)$ die Hellinger–Hahnsche Vielfachheitsfunktion von M_φ. Dann gilt für alle $z \in \sigma(M_\varphi) = e\text{-rg}(\varphi)$:*

$$h(z) = \textit{genaue Vielfachheit der Zugehörigkeit von } z \textit{ zu } e\text{-}rg(\varphi).$$

Beweis. Sei $z_0 \in e\text{-rg}(\varphi)$. Zu zeigen:

$$h(z_0) \geqslant n \Leftrightarrow z_0 \text{ gehört mindestens } n\text{-fach zu } e\text{-rg}(\varphi).$$

Sei k eine von Neumannsche Vielfachheitsfunktion von M_φ, $\mathfrak{e}_m := \{z\colon k(z) \geqslant m\}$ für $1 \leqslant m < \infty$. Wegen

$$h(z_0) \geqslant n \Leftrightarrow \nu\big(B_\varepsilon(z_0) \cap \mathfrak{e}_n\big) > 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0$$

(vgl. [7]) ergibt sich die Behauptung mittels einer direkten Schlußweise aus (1.2) (angewandt auf $\varphi|_{X-N}$; für $\Rightarrow$) bzw. aus Satz 4 (für $\Leftarrow$).

5. Beispiele.

1. Sei X ein lokalkompakter Raum, μ ein endliches Borelmaß auf X mit Träger X; sei $\varphi\colon X \to C$ beschränkt und stetig. Man betrachte das Raumtripel $C_c(X) \subset L^2(X, \mu) \subset C_c(X)'$; dann bildet das System der Punktmassen $\{\delta_x\}_{x \in X}$ ein vollständiges System verallgemeinerter Eigenvektoren von M_φ (zu den Eigenwerten $\varphi(x)$, $x \in X$). Ähnlich wie in [6] kann man zeigen, daß die geometrische Vielfachheit $v(z) = \dim\big(\operatorname{Ker}[(M_\varphi|_{C_c(X)})' - z \cdot \mathrm{id}_{C_c(X)'}]\big)$ von z als verallgemeinerter Eigenwert von M_φ gegeben ist durch

$$v(z) = \#\varphi^{-1}\{z\} \text{ f.a. } z \in C.$$

Wenn nun (1.3) gelten würde, hätte man eine einfache Beschreibung der von Neumannschen Vielfachheitsfunktion k von M_φ als Vielfachheit der verallgemeinerten Eigenwerte.

2. Sei $X = [0, 1]$, $\mu = m$ das Lebesguesche Maß auf $[0, 1]$. Sei $\varphi\colon [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ eine beschränkte Borelfunktion des folgenden Typs: $(0, 1]$ läßt sich in abzählbar viele bis auf Randpunkte disjunkte abgeschlossene Intervalle $I_1, I_2, \ldots$ zerlegen, so daß $\varphi|_{I_k}$ für $1 \leqslant k < \infty$ streng monoton

ist. Bekanntlich (vgl. etwa [8], p. 431) besitzt jeder beschränkte selbstadjungierte Operator T mit leerem Punktspektrum auf einem separablen Hilbertraum eine Darstellung als Multiplikationsoperator M_φ auf $L^2(X, \mu)$ mit einer solchen Funktion φ. T besitzt genau dann ein rein absolutstetiges Spektrum, wenn $(\varphi|_{I_k})^{-1}$ für $1 \leqslant k < \infty$ absolutstetig ist. Aus Satz 3 ergibt sich für diesen Fall, daß (1.3) jedenfalls dann gilt, wenn auch $\varphi|_{I_k}$ für $1 \leqslant k < \infty$ absolutstetig ist.

3. Im Zusammenhang mit 2. betrachten wir ein Beispiel eines selbstadjungierten Operators M_φ mit rein absolutstetigem Spektrum, für den (1.3) nicht erfüllt ist: Es gibt (vgl. [2], chap. IV, § 4, Exc. 4) eine Borelmenge $\mathfrak{a} \subset [0, 1]$ mit $m(\mathfrak{a}) = \frac{2}{3}$ und $0 < m(\mathfrak{a} \cap I) < m(I)$ für jedes Intervall $I \subset [0, 1]$ positiver Länge. Setze $\varrho_1 = m|_{\mathfrak{a}}$, $\varrho_2 = m|_{[0,1]-\mathfrak{a}}$,

$$H = L^2([0, 1], \varrho_1) \oplus L^2([0, 1], \varrho_2), \qquad T = \text{Multiplikation mit } z.$$

Diese Definition gibt gleich eine Spektraldarstellung von T. Ein skalares Spektralmaß von T ist $\varrho = m|_{[0,1]}$; damit besitzt T rein absolutstetiges Spektrum. Es ist $d\varrho_1/d\varrho = \chi_{\mathfrak{a}}$, $d\varrho_2/d\varrho = \chi_{[0,1]-\mathfrak{a}}$, also $\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}_2 = [0, 1] - \mathfrak{a}$; damit hat man $k(z) = 1$ für ϱ-f.a. $z \in [0, 1] = \sigma(T)$. Nun kann man $X = \{1\} \times X_1 \cup \{2\} \times X_2$, μ und φ wie in Abschnitt 2 konstruieren, so daß T unitäräquivalent zum Multiplikationsoperator M_φ auf $L^2(X, \mu)$ ist. φ ist stetig. Dennoch gilt wegen $X_1 = X_2 = [0, 1]$ daß $\#\varphi^{-1}\{z\} = 2$ f.a. $z \in [0, 1]$. $N_0 := \{1\} \times ([0, 1] - \mathfrak{a}) \cup \{2\} \times \mathfrak{a}$ ist eine μ-Nullmenge in X, jedoch $\varphi(N_0) = [0, 1]$ keine ν-Nullmenge. (Hier ist $\nu := \mu \circ \varphi^{-1} = \varrho = m|_{[0,1]}$.) Tatsächlich ist N_0 die im Beweis von Satz 4 auftretende Ausnahmenullmenge, mit der $\#(\varphi|_{X-N_0})^{-1}\{z\} = k(z) = 1$ ν-f.ü. auf C. Nach dem oben Gesagten kann T auch als Multiplikationsoperator M_Ψ auf $L^2([0, 1], m)$ dargestellt werden, was hier noch explizit ausgeführt werden soll: Setze $\Gamma_1(x) = m([0, x] \cap \mathfrak{a})$, $\Gamma_2(x) = m([x, 1] - \mathfrak{a}) + \frac{2}{3}$. Dann ist $\Gamma_1\colon [0, 1] \to [0, \frac{2}{3}]$ streng monoton wachsend, $\Gamma_2\colon [0, 1] \to [\frac{2}{3}, 1]$ streng monoton fallend; Γ_1, Γ_2 sind absolutstetig. Setze $\Psi_1 = \Gamma_1^{-1}\colon [0, \frac{2}{3}] \to [0, 1]$, $\Psi_2 = \Gamma_2^{-1}\colon [\frac{2}{3}, 1] \to [0, 1]$. Für $k = 1, 2$ gilt: $\varrho_k = m \circ \Psi_k^{-1}$; $L^2([0, 1], \varrho_k)$ ist isometrisch isomorph zu $L^2([0, \frac{2}{3}], m)$ für $k = 1$ bzw. zu $L^2([\frac{2}{3}, 1], m)$ für $k = 2$ vermöge $f \mapsto f \circ \Psi_k$; dabei geht die Multiplikation mit z auf $L^2([0, 1], \varrho_k)$ über in M_{Ψ_k}. Man definiere nun $\Psi\colon [0, 1] \to \boldsymbol{R}$ durch $\Psi|_{[0, \frac{2}{3}]} = \Psi_1$, $\Psi|_{[\frac{2}{3}, 1]} = \Psi_2$; Ψ ist stetig auf $[0, 1]$, jedoch nicht absolutstetig. T ist unitäräquivalent zu M_Ψ. Offenbar gilt auch hier $\#\Psi^{-1}\{z\} = 2$ f.a. $z \in [0, 1]$. Die m-Ausnahmenullmenge im Beweis von Satz 4 ist jetzt $N_0 = \Gamma_1([0, 1] - \mathfrak{a}) \cup \Gamma_2(\mathfrak{a})$; es ist $\Psi(N_0) = [0, 1]$.

Im obigen Beispiel ist M_Ψ zyklisch; Ψ ist im „wesentlichen eineindeutig", was nach [9] notwendig und hinreichend für diesen Umstand ist. Ein Beispiel für einen nichtzyklischen Operator M_Ψ erhält man, wenn man die obigen Überlegungen mit $\varrho_1 = m|_{[0,1]}$, $\varrho_2 = m|_{\mathfrak{a}}$ durchfürt. Dann wird $\varrho = \varrho_1 = \nu = m|_{[0,1]}$,

$$k(z) = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad z \in \mathfrak{a}, \\ 1 & \text{für} \quad z \in [0,1]-\mathfrak{a}, \end{cases} \qquad \#\Psi^{-1}\{z\} = 2 \text{ f.a. } z \in [0,1]$$

(also gleich der Hellinger–Hahnschen Vielfachheitsfunktion von M_Ψ).

4. Zum Abschluß wird noch kurz das Beispiel D aus [1] diskutiert: Mit Hilfe eines stetigen singulären Wahrscheinlichkeitsmaßes σ mit Träger $[0,1]$ und der dadurch definierten Funktion $F(x) = \sigma([0,x))$ wird dort eine stetige Funktion $\varphi\colon [0,1] \to \boldsymbol{R}$ eingeführt, so daß für den Operator M_φ auf $L^2([0,1],m)$ gilt: $k(z) = 1$ für ν-f.a. $z \in [0,1]$, $\#\varphi^{-1}\{z\} = 2$ f.a. $z \in [0,1]$; $\nu = \frac{1}{2}(m+\sigma)$. Die Überlegungen von Abschnitt 3–5 kann man hier mit $E_1 = [0,\frac{1}{2}]$, $E_2 = (\frac{1}{2},1]$ und $E_3 = \ldots = E_\infty =$ leere Menge durchführen. Man findet $\varrho_1 = \frac{1}{2}\cdot m$, $\varrho_2 = \frac{1}{2}\sigma$. Sei $S \subset [0,1]$ eine Lebesgue-Nullmenge, auf der σ konzentiert ist. Dann ist $\frac{d\varrho_1}{d\varrho} = \chi_{[0,1]-S}$, $\frac{d\varrho_2}{d\varrho} = \chi_S$; $\mathfrak{d}_1 = [0,1]-S$, $\mathfrak{d}_2 = S$. Satz 1 bestätigt, daß $k(z) = 1$ für ν-f.a. $z \in [0,1]$. Die im Beweis von Satz 4 auftretende Ausnahmenullmenge ist hier

$$N_0 = [0,\tfrac{1}{2}] \cap \varphi^{-1}(S) \cup (\tfrac{1}{2},1] \cap \varphi^{-1}([0,1]-S) = \tfrac{1}{2}\cdot S \cup \big(1-\tfrac{1}{2}F([0,1]-S)\big);$$

es ist $\varphi(N_0) = S \cup ([0,1]-S) = [0,1]$.

Literatur

[1] M. B. Abrahamse and T. L. Kriete, The spectral multiplicity of a multiplication operator, Indiana Univ. Math. J. 22 (1973), S. 845–857.

[2] N. Bourbaki, *Intégration*, 2e éd., Hermann, Paris 1965.

[3] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators II*, New York 1963.

[4] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York 1969.

[5] F. Hausdorff, *Mengenlehre*, 3. Auflage, Dover, o. J., New York.

[6] K. Kalb, *Die Vielfachheit nach Hellinger und die geometrische Vielfachheit der verallgemeinerten Eigenwerte*, Arch. Math. 25 (1974), S. 290–296.

[7] K. Kalb, *Teorema y funciones de multiplicidad espectral*, Rev. Colombiana Mat. 10 (1976), S. 1–37.

[8] T. L. Kriete, *Complete non-selfadjointness of almost self-adjoint operators*, Pacific J. Math. 42 (1972), S. 413–437.

[9] M. G. Nadkarni, *Hellinger–Hahn type decompositions of the domain of a Borel function*, Studia Math. 47 (1973), S. 51–63.

[10] J. v. Neumann, *On rings of operators IV. Reduction theory*, Ann. of Math (2) 50 (1949), S. 401–485.

Received June 25, 1976 (1175)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXVI. (1979)

On the Poisson integral for Lipschitz and C^1-domains

by

BJÖRN E. J. DAHLBERG (Göteborg)

Abstract. Let D be a Lipschitz domain and let Hf denote the solution of the Dirichlet problem with boundary values f. In this note we prove that if $f \in L^p(\sigma)$, where σ is the surface measure of ∂D and $2 \leqslant p \leqslant \infty$, then the nontangential maximal function associated to Hf is also in L^p. Here the exponent 2 is sharp. However, if D is assumed to be a C^1-domain, then the results hold for $1 < p \leqslant \infty$. The method we use is to characterize the corresponding Carleson measures.

1. Introduction. Let D be a bounded Lipschitz domain and denote by δ the surface measure of ∂D. If $E \subset \partial D$ and $P \in D$, we denote by $\omega(P,E)$ the harmonic measure of E evaluated at P, and if f is integrable with respect to the harmonic measure, we denote by

$$Hf(P) = \int_{\partial D} f(Q)\,\omega(P,dQ)$$

the Poisson integral of f. For the basic properties of ω we refer to Helms [5], Chapter 8. We recall that if D is the unit ball and $1 < p < \infty$, then

$$\int_{\partial D} \sup_{0<r<1} |Hf(rQ)|^p\, d\sigma(Q) \leqslant C_p \int_{\partial D} |f|^p\, d\sigma.$$

In this article we shall study the analogues of this result for Lipschitz domains. It turns out that the analogue holds if $2 \leqslant p < \infty$ but not always if $1 < p < 2$. However, if we assume that D is a C^1-domain, then we can extend the result to $1 < p < \infty$. We shall formulate these results in Section 3, but we can give the following characterization of the corresponding Carleson measures.

THEOREM 1. *Let $D \subset \boldsymbol{R}^n$, $n \geqslant 3$, be a Lipschitz domain and let $2 \leqslant p < \infty$. If μ is a positive measure on D, then the following conditions are equivalent:*

(i) *There is a constant M such that for all $P \in \partial D$ and all $r > 0$ we have*

$$\mu\{Q \in D\colon |Q-P| < r\} \leqslant Mr^{n-1}. \tag{1.1}$$

(ii) *There is a constant K such that for all $f \in L^p(\sigma)$ we have*

$$\int_D |Hf|^p\, d\mu \leqslant K \int_{\partial D} |f|^p\, d\sigma. \tag{1.2}$$