[6] K. Goebel and W. A. Kirk, *A fixed point theorem for asymptotically nonexpansive mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. 35 (1972), pp. 171–174.

[7] K. Goebel and T. Kuczumow, *A contribution to the theory of nonexpansive mappings*, preprint.

[8] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nachr. 30 (1965), pp. 251–258.

[9] V. Gurarii, *On the differential properties of the modulus of convexity in Banach spaces* (Russian), Mat. Issled. 2 (1967), pp. 141–148.

[10] B. Halpern, *Fixed point theorems for outward maps*, Doctoral Thesis, Univ. of California, Los Angeles 1965.

[11] T. Kato, *Nonlinear semigroups and evolution equations*, J. Math. Soc. Japan 19 (1967), pp. 508–520.

[12] W. A. Kirk, *A fixed point theorem for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly 72 (1965), pp. 1004–1006.

[13] W. A. Kirk and R. Schöneberg, *Some results on pseudocontractive mappings*, Pacific J. Math. 71 (1977), pp. 89–100.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
THE UNIVERSITY OF IOWA
IOWA CITY, IOWA

Received November 26, 1976 (1231)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXIV (1979)

Le groupe des isométries d'un espace de Banach

par

JACQUES STERN (Paris)

Abstract. We characterize those groups G such that, for some Banach space E, G is isomorphic to the group of (norm-preserving) isometries of E: they are exactly the groups which have a normal subgroup with two elements.

Les isométries d'un espace de Banach E sont les automorphismes de E qui conservent la norme, c'est-à-dire les surjections linéaires $T\colon E \to E$ qui sont telles que

$$\forall x \ \|T(x)\| = \|x\|.$$

Le but du présent article est de caractériser les groupes d'isométries des espaces de Banach. Si G est le groupe des isométries de l'espace de Banach E, alors G a un sous-groupe normal à deux éléments formé de l'identité de la symétrie $\sigma\colon x \to -x$. Inversement, on a:

THÉORÈME 1. *Soit G un groupe qui a un sous-groupe normal à deux éléments et soit ε un nombre réel strictement positif. Il existe un espace de Banach $1+\varepsilon$-isomorphe à un espace de Hilbert et dont le groupe des isométries est isomorphe à G.*

On rappelle que deux espaces de Banach E et F sont dits $1+\varepsilon$-isomorphes s'il existe un isomorphisme $T\colon E \to F$ tel que $\|T\|\cdot\|T^{-1}\| \leqslant 1+\varepsilon$.

Remarques. 1. Soit i l'élément neutre de G et $\{i, j\}$ un sous-groupe à deux éléments. On peut alors préciser la conclusion du théorème 1 qui devient:

Il existe un espace de Banach E, $1+\varepsilon$-isomorphe à un espace de Hilbert et un isomorphisme τ de G sur le groupe des isométries de E tel que $\tau(i)$ soit l'identité de E et $\tau(j)$ la symétrie de E.

2. Si G est dénombrable, l'espace de Banach dont l'existence est affirmée par le théorème 1 peut être choisi séparable.

Pour établir le théorème 1, on prouvera au préalable le résultat suivant (suggéré à l'auteur par S. Shelah).

THÉORÈME 2. *Pour tout ensemble non vide X et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un espace de Banach $1+\varepsilon$-isomorphe à $l^2(X)$ et qui n'admet comme isométries que l'identité et la symétrie.*

$l^2(X)$ désigne l'espace des applications u de X dans $\mathbf{R}$ de carré sommable muni de la norme $\big(\sum_{x\in X} u(x)^2\big)^{1/2}$.

La preuve des théorèmes 1 et 2 utilise une construction d'espaces de Banach $1+\varepsilon$-isomorphes à l^2 introduite par l'auteur dans [1] pour résoudre le problème des enveloppes, et qu'on va d'abord rappeler.

§ 1. Une méthode de construction d'espaces $1+\varepsilon$-isomorphes à un espace de Hilbert. Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert réel de dimension $\geqslant 2$; on note (x, y) le produit scalaire de $\mathscr{H}$ et $|x| = (x, x)^{1/2}$ la norme.

Si δ est un nombre réel strictement positif, et e un point de $\mathscr{H}$ de norme 1, on note

$H(e, \delta)$ l'hyperplan d'équation $(x, e) = 1-\delta$;

$F(e, \delta)$ l'intersection de cet hyperplan avec la boule unité B de $\mathscr{H}$; on appelle *facette* un ensemble de la forme $F(e, \delta)$.

Si x et x' sont deux points de $\mathscr{H}$, on note $\theta(x, x')$ l'angle θ de x et x' défini par

$$\cos\theta = \frac{(x, x')}{|x|\cdot|x'|}, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

On a alors:

LEMME 3. *Soit θ_0 un nombre réel, $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}\pi$, et soient e, e' des points de $\mathscr{H}$ de norme 1, satisfaisant $|e-e'| \geqslant 2\sin\theta_0$; il existe un nombre réel $\beta > 0$ (dépendant de θ_0) tel que pour tous $\delta < \beta$ et $\delta' < \beta$ les propriétés suivantes soient vraies:*

1. *Si $x \in F(e, \delta)$ et $x' \in F(e', \delta')$, alors $\theta(x, x') \geqslant \theta_0$.*
2. *Si $x \in F(e, \delta)$ et $x' \in F(e, \delta)$, alors $\theta(x, x') \leqslant \frac{1}{2}\theta_0$.*

Preuve. De l'inégalité $|e-e'| \geqslant 2\sin\theta_0$, on déduit facilement $\theta(e, e') \geqslant 2\theta_0$. D'autre part, si $x \in F(e, \delta)$, on a

$$|x-e|^2 = |x|^2+|e|^2-2(x, e) \leqslant 2-2(1-\delta)$$

soit $|x-e| \leqslant \sqrt{2\delta}$.

Il suffit donc pour obtenir les conclusions cherchées, d'utiliser la continuité de la fonction $\theta(x, x')$ aux points (e, e') et (e, e) respectivement.

Pour la suite de ce paragraphe, on fixe un nombre réel θ_0, $0 < \theta_0 < \frac{1}{2}\pi$, et on choisit un nombre réel $\beta > 0$ qui satisfait la conclusion du lemme 3. Soit A un ensemble de points de norme 1 dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ qui est tel que pour deux points distincts a, a' de A on ait

$$|a \pm a'| \geqslant 2\sin\theta_0.$$

Soit d'autre part Δ une application de A dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout $a \in A$, on ait

$$0 < \Delta(a) < \beta.$$

On note $\mathscr{H}(A, \Delta)$ l'espace $\mathscr{H}$ muni d'une nouvelle norme dont la boule unité est l'ensemble des points x tels que

$$|x| \leqslant 1,$$
$$|(x, a)| \leqslant 1-\Delta(a), \qquad a \in A.$$

On note $\|x\|$ la norme d'un élément x dans $\mathscr{H}(A, \Delta)$.

La sphère unité de $\mathscr{H}(A, \Delta)$ est formée des facettes $F(\pm a, \Delta(a))$, $a \in A$ et de ceux des points x de norme euclidienne 1 qui sont tels que le segment $[0, x]$ ne rencontre aucune des facettes $F(\pm a, \Delta(a))$ (où $[0, x] = \{y\colon y = \lambda x,\ \lambda \in [0, 1]\}$).

On considère maintenant un plan P de $\mathscr{H}(A, \Delta)$ c'est-à-dire un sous-espace de dimension deux. On note Σ_P la sphère unité de P (pour la norme de l'espace $\mathscr{H}(A, \Delta)$) et C_P le cercle unité de P pour la norme hilbertienne (de $\mathscr{H}$).

LEMME 4. *Σ_P se compose d'un nombre fini de segments de droite et de points du cercle C_P; $C_P \cap \Sigma_P$ est infini.*

Preuve. Il est clair que Σ_P se compose de points de C_P et d'ensembles de la forme

$$P \cap F(\varepsilon a, \Delta(a)), \qquad \varepsilon = \pm 1,\ a \in A,$$

chacun de ces ensembles est un segment de droite. Soient x et x' deux points de Σ_P appartenant à deux segments distincts, c'est-à-dire à deux facettes distinctes; d'après le lemme 3, on a

$$\theta(x, x') \geqslant \theta_0.$$

Si K est un nombre entier tel que $K\theta_0 > 2\pi$ il y a donc moins de K facettes distinctes qui rencontrent P et donc Σ_P ne contient qu'un nombre fini de segments de droite.

Si P ne rencontre aucune facette $F(\varepsilon a, \Delta(a))$, alors $C_P = \Sigma_P$; sinon soit x un point de Σ_P appartenant à une facette $F(\varepsilon a, \Delta(a))$; soit y un élément quelconque de C_P tel que

$$\tfrac{1}{2}\theta_0 < \theta(x, y) < \theta_0;$$

alors, d'après le lemme 3, y n'appartient à aucune des facettes $F(\varepsilon a, \Delta(a))$, $\varepsilon = \pm 1$, $a \in A$, donc y appartient à Σ_P et à C_P.

Dans tous les cas, $\Sigma_P \cap C_P$ est infini.

LEMME 5. *Toute isométrie de $\mathscr{H}(A, \Delta)$ est également une isométrie de $\mathscr{H}$.*

Preuve. Soit P un plan de $\mathscr{H}(A, \Delta)$ et Σ_P la sphère unité de P. La norme de $\mathscr{H} \cap P$ est l'unique norme hilbertienne qui a une infinité de points en commun avec Σ_P. Toute autre norme hilbertienne admet pour sphère unité une ellipse distincte de C_P qui rencontre C_P en au plus quatre points et chacun des segments de droite inclus dans Σ_P en deux points au plus. Or, Σ_P se compose de points de C_P et d'un nombre fini de segments de droite.

Soit maintenant φ une isométrie de $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ et x un point tel que

$$|\varphi(x)| \neq |x|.$$

Soit P un plan de $\mathscr{H}$ tel que $x \in P$, on pose $Q = \varphi(P)$; alors $\Sigma_Q = \varphi(\Sigma_P)$. L'application $N\colon Q \to \boldsymbol{R}$ définie par $N(y) = |\varphi^{-1}(y)|$ est une norme euclidienne sur Q qui a une infinité de points en commun avec $\varphi(\Sigma_P) = \Sigma_Q$. Donc

$$N(\varphi(x)) = |\varphi(x)|.$$

Or, $N(\varphi(x)) = |\varphi^{-1}\circ\varphi(x)| = |x|$; contradiction.

LEMME 6. *Soit φ une isométrie de $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ et a un élément de Λ; il existe $a' \in \Lambda$ et $\varepsilon = \pm 1$, tels que $\varphi(a) = \varepsilon a'$; de plus $\Delta(a) = \Delta(a')$.*

Preuve. Soit a un élément de Λ. D'après le lemme 5, φ conserve norme hilbertienne et produit scalaire et par suite, on a

$$\varphi\big(H(a, \Delta(a))\big) = H\big(\varphi(a), \Delta(a)\big)$$

et aussi

$$\varphi\big(F(a, \Delta(a))\big) = F\big(\varphi(a), \Delta(a)\big).$$

Or, l'image par φ de la facette $F\big(a, \Delta(a)\big)$ est contenue dans la sphère unité de $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ et donc dans une facette $F\big(\varepsilon a', \Delta(a')\big)$, $\varepsilon' = \pm 1$, $a' \in \Lambda$. Par suite

$$H\big(\varphi(a), \Delta(a)\big) = H\big(\varepsilon' a', \Delta(a')\big).$$

Or, ces deux hyperplans d'équations respectives

$$\big(x, \varphi(a)\big) = 1 - \Delta(a),$$
$$(x, \varepsilon' a') = 1 - \Delta(a')$$

ne coïncident que si $\varphi(a) = \varepsilon' a'$ et $\Delta(a) = \Delta(a')$.

Avant de passer à la preuve des théorèmes 1 et 2, on vérifie que $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ sont isomorphes.

LEMME 7. *Soit ε un nombre réel strictement positif tel que $1+\varepsilon > \big(1 - \sup_{a\in\Lambda} \Delta(a)\big)^{-1}$, alors $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ sont $1+\varepsilon$-isomorphes.*

Preuve. On pose $\sup_{a\in\Lambda} \Delta(a) = \delta$. Puisque la boule unité de $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ est contenue dans celle de $\mathscr{H}$ on a

$$\forall x \in \mathscr{H} \ |x| \leqslant \|x\|.$$

D'autre part, si $x \in F\big(\varepsilon a, \Delta(a)\big)$, alors

$$|x| \geqslant 1 - \Delta(a) \geqslant 1 - \delta$$

et donc puisque la sphère unité de $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ se compose de points de norme euclidienne 1 et des facettes $F\big(\varepsilon a, \Delta(a)\big)$, $\varepsilon = \pm 1$, $a \in \Lambda$

$$\forall x \in \mathscr{H} \ \ (1-\delta)\|x\| \leqslant |x|.$$

Donc l'identité est un $(1-\delta)^{-1}$ isomorphisme de $\mathscr{H}$ sur $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$.

2. Preuve des théorèmes 1 et 2. On prouve d'abord le théorème 1; on suppose que X a au moins deux éléments, sinon $l^2(X)$ est précisément $\boldsymbol{R}$ et admet bien deux isométries exactement. On choisit un bon ordre sur X et on note α, β, γ les éléments de X.

On pose $\mathscr{H} = l^2(X)$. Si $\alpha \in X$, e_α est l'élément de $l^2(X)$ qui vaut 1 en α, 0 ailleurs.

On fixe θ_0 tel que $2\sin\theta_0 \leqslant (2\sqrt{5}-4)/5$ et on choisit un nombre réel $\beta > 0$ qui satisfait la conclusion du lemme 3 et qui est tel que $(1-\beta)^{-1} \leqslant 1+\varepsilon$.

Soient δ et δ' deux nombres réels tels que

$$0 < \delta' < \delta < \beta.$$

L'espace de Banach cherché est l'espace $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ où

Λ est formé des points e_α, $\alpha \in X$, et des points $(e_\alpha + 2e_\beta)/\sqrt{5}$, $\alpha \in X$, $\beta \in X$, $\alpha < \beta$;

$\Delta(e_\alpha) = \delta$, $\alpha \in X$;

$$\Delta\left(\frac{e_\alpha + 2e_\beta}{\sqrt{5}}\right) = \delta', \ \alpha \in X, \ \beta \in X, \ \alpha < \beta.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que si a et a' sont éléments de Λ

$$|a \pm a'| \geqslant \frac{2\sqrt{5}-4}{5} \geqslant 2\sin\theta_0.$$

L'espace $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ ainsi construit "code" la relation $\alpha < \beta$ dans le sens suivant:

(*) Soient α et β deux éléments distincts de X, $\varepsilon = \pm 1$, on a $\|e_\alpha + 2\varepsilon e_\beta\|/\sqrt{5} > 1$ si et seulement si $\varepsilon = +1$ et $\alpha < \beta$.

En effect, si α et β appartiennent à X, $(e_\alpha - 2e_\beta)/\sqrt{5}$ n'appartient à aucune facette $F\big(\varepsilon a, \Delta(a)\big)$. Il en est de même pour $(e_\alpha + 2e_\beta)/\sqrt{5}$ si $\alpha > \beta$.

Puisque $(1-\beta)^{-1} \leqslant 1+\varepsilon$ le lemme 7 implique que $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ sont $1+\varepsilon$-isomorphes. Il reste à voir que les seules isométries de $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ sont l'identité et la symétrie ou encore, si α_0 est l'élément minimal de X, pour le bon ordre choisi, que toute isométrie φ de $\mathscr{H}(\Lambda, \Delta)$ telle que $\varphi(e_{\alpha_0}) = e_{\beta_0}$, $\beta_0 \in X$, est telle que

$$\forall \alpha \in X \ \varphi(e_\alpha) = e_\alpha.$$

S'il n'en est pas ainsi, on choisit un contre-exemple φ et on considère le plus petit α tel que

$$\varphi(e_\alpha) \neq e_\alpha.$$

D'après le lemme 6, il existe $\beta \in X$ et $\varepsilon = \pm 1$ tels que

$$\varphi(e_\alpha) = \varepsilon e_\beta.$$

Si $\beta = \alpha$ alors $\varepsilon = -1$ et donc $\alpha > \alpha_0$, d'après la propriété $(*)$ on a alors:

$$\frac{\|e_{\alpha_0} + 2e_\alpha\|}{\sqrt{5}} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{\|e_{\beta_0} + 2\varphi(e_\alpha)\|}{\sqrt{5}} = 1$$

ce qui contredit le fait que φ est une isométrie.

On n'a pas non plus $\beta < \alpha$ puisque, dans ce cas $\varphi(e_\beta) = e_\beta$; donc on a $\beta > \alpha$.

De la même façon, $\varphi^{-1}(e_\alpha)$ est de la forme $\varepsilon' e_{\beta'}$ avec $\beta' > \alpha$. On a donc d'après $(*)$

$$\frac{\|e_\alpha + 2e_{\beta'}\|}{\sqrt{5}} > 1$$

et par suite

$$\frac{\|\varphi(e_\alpha) + 2\varphi(e_{\beta'})\|}{\sqrt{5}} > 1$$

soit donc

$$\frac{\|\varepsilon e_\beta + 2\varepsilon' e_\alpha\|}{\sqrt{5}} > 1$$

d'après $(*)$ cette inégalité prouve que $\varepsilon = \varepsilon'$ et que $\beta < \alpha$; contradiction.

On passe maintenant à la preuve du théorème 1. On se donne donc un groupe G d'élément neutre i et un sous-groupe normal I à deux éléments, $I = \{i, j\}$. On note π l'homomorphisme canonique de G sur G/I. On choisit une application g définie sur un ensemble bien ordonné X à valeur dans G et telle que

(i) Si $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta \in X$, $\pi g(\alpha) \neq \pi g(\beta)$.

(ii) πg est une surjection de X sur G/I.

(iii) $g(\alpha_0) = i$, où α_0 est le plus petit élément de X.

On note G' l'image de X par g.

La preuve consiste essentiellement en la construction d'un espace $\mathscr{H}(A, \Delta)$ qui „code" la structure de G. La construction est cependant plus délicate que pour le théorème 1. On va commencer par donner une définition précise de l'angle θ_0, qui doit être assez petit.

Dans l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^6$, muni de sa base canonique $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 6}$, on considère l'ensemble fini B des points suivants:

εe_i; $1 \leqslant i \leqslant 6$, $\varepsilon = \pm 1$.

$\dfrac{\varepsilon e_i + 2\varepsilon' e_j}{\sqrt{5}}$; $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant 6$, $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$.

$\dfrac{\varepsilon_i e_i + 2\varepsilon_j e_j + 3\varepsilon_k e_k}{\sqrt{14}}$; i, j, k deux à deux distincts, $1 \leqslant i, j, k \leqslant 6$,

$\varepsilon_i = \pm 1$, $\varepsilon_j = \pm 1$, $\varepsilon_k = \pm 1$.

θ_0 est le nombre réel défini par

$$0 < \theta_0 < \tfrac{1}{2}\pi, \qquad 2\sin\theta_0 = \inf_{\substack{b \neq b' \\ b \in B \\ b' \in B}} |b - b'|.$$

θ_0 étant fixé, on choisit un nombre réel $\beta > 0$ qui satisfait la conclusion du lemme 3 et qui est tel que $(1-\beta)^{-1} \leqslant 1 + \varepsilon$. Soient δ, δ' et δ'' trois nombres réels tels que

$$0 < \delta'' < \delta' < \delta < \beta.$$

On pose $\mathscr{H} = l^2(G' \cup G' \times X)$; si $f \in G'$, e_f est l'élément de $\mathscr{H}$ qui vaut 1 en f et 0 ailleurs. Si $f \in G'$ et $\alpha \in X$, $e_{f,\alpha}$ est l'élément de $\mathscr{H}$ qui vaut 1 en (f, α) et 0 ailleurs. Si f n'est pas dans G', f s'écrit jf', $f' \in G'$; on désigne alors par e_f l'élément $-e_{f'}$, et de même par $e_{f,\alpha}$ l'élément $-e_{f',\alpha}$.

L'espace cherché est de la forme $\mathscr{H}(A, \Delta)$. A est l'ensemble des points suivants:

e_f, $f \in G'$;

$e_{f,\alpha}$, $f \in G'$, $\alpha \in X$;

$\dfrac{e_{f,\alpha} + 2e_{f,\beta}}{\sqrt{5}}$, $f \in G'$, $\alpha \in X$, $\beta \in X$, $\alpha < \beta$;

$\dfrac{e_f + 2e_{f,\alpha}}{\sqrt{5}}$, $f \in G'$, $\alpha \in X$;

$\dfrac{e_{h,\alpha} + 2e_f + 3e_{f\cdot g(\alpha)}}{14}$, $h \in G$, $f \in G'$, $\alpha \in X$, $\alpha \neq \alpha_0$.

Δ est définie de la façon suivante:

$$\Delta(a) = \begin{cases} \delta & \text{si } a \text{ est de la forme } e_f,\ f \in G'; \\ \delta' & \text{si } a \text{ est de la forme } e_{f,\alpha},\ f \in G,\ \alpha \in X; \\ \delta'' & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

On doit vérifier que si a et a' sont deux points distincts de A, $|a \pm a'| \geqslant 2\sin\theta_0$. Mais, en se reportant à la définition de θ_0, on voit facilement que calculer la distance $|a - a'|$ (resp. $|a + a'|$) revient à calculer la distance $|b - b'|$ de deux points de l'ensemble B de $\boldsymbol{R}^6$, d'où le résultat.

LEMME 8. *Soit α un élément de X, $\alpha \neq \alpha_0$; h, f, f' des éléments de G; on a*

$$\|e_{h,\alpha}+2\,e_f+3\,e_{f'}\| \neq \sqrt{14}$$

si et seulement si $f' = f\cdot g(\alpha)$.

Preuve. On suppose d'abord que $f \in G'$.

Si $f' = f\cdot g(\alpha)$, on a

$$\|e_{h,\alpha}+2\,e_f+3\,e_{f'}\| = \sqrt{14}(1-\delta'')^{-1}.$$

Inversement, si $f' \neq f\cdot g(\alpha)$, le point

$$y = \frac{e_{h,\alpha}+2\,e_f+3\,e_{f'}}{\sqrt{14}}$$

est tel que pour tout point a de A

$$|y \pm a| \geqslant 2\sin\theta_0.$$

Par suite, $\theta(y, \pm a) \geqslant 2\,\theta_0$ et donc la droite $[0, y]$ ne rencontre aucune des facettes $F\big(\varepsilon a, \Delta(a)\big)$, $a \in A$, donc $\|y\| = 1$.

Si maintenant $f = jf_0$, $f_0 \in G'$, on remarque que

$$\|e_{h,\alpha}+2\,e_f+2\,e_{f'}\| = \|e_{jh',\alpha}+2\,e_{f_0}+3\,e_{jf'}\|$$

et on se trouve ramené au cas précédent.

On démontre de la meme façon

LEMME 9. *Soient h, f des éléments de G, $\alpha \in X$; on a $\|e_f+2\,e_{h,\alpha}\| \neq \sqrt{5}$ si et seulement si $f = h$.*

On se donne maintenant une isométrie φ de $\mathscr{H}(A, \Delta)$.

LEMME 10. *On suppose $\varphi(e_f) = e_{f'}$. Alors, pour tout $\alpha \in x$, $\varphi(e_{f,\alpha}) = e_{f',\alpha}$.*

Preuve. D'après le lemme 6, $\varphi(e_{f,\alpha})$ est de la forme $e_{h,\beta}$. Mais on a

$$\|e_f+2\,e_{f,\alpha}\| \neq \sqrt{5}$$

et donc

$$\|e_{f'}+2\;e_{h,\beta}\| \neq \sqrt{5},$$

ce qui d'après le lemme 9 implique $h = f'$.

Si on note $\mathscr{H}^f(A, \Delta)$ le sous-espace fermé de $\mathscr{H}(A, \Delta)$ engendré par les $e_{f,\alpha}$, $\alpha \in X$, il résulte de ce qui précède que φ est une isométrie de $\mathscr{H}^f(A, \Delta)$ sur $\mathscr{H}^{f'}(A, \Delta)$. Soit ψ l'isométrie de $\mathscr{H}^{f'}(A, \Delta)$ sur $\mathscr{H}^f(A, \Delta)$ définie par $\psi(e_{f',\alpha}) = e_{f,\alpha}\cdot\psi\circ\varphi$ est une isométrie de $\mathscr{H}^f(A, \Delta)$. Or, cet espace est précisément construit comme dans la preuve du théorème 1. Par suite, il existe ε tel que

$$\varphi(e_{f,\alpha}) = \varepsilon e_{f',\alpha};$$

mais d'après les remarques faites au début de la preuve, on a $\varepsilon = 1$.

On suppose toujours donnée une isométrie φ de $\mathscr{H}(A, \Delta)$. D'après le lemme 6, $\varphi(e_f)$, $f \in G$ est de la forme $e_{f'}$. On pose en particulier $\varphi(e_i) = e_{f_\varphi}$.

LEMME 11. *Soit f un élément de G, alors*

$$\varphi(e_f) = e_{f_\varphi\cdot f}.$$

Preuve. On suppose d'abord f égal à $g(\alpha)$. Si $\alpha = \alpha_0$, $f = i$ et le résultat est clair, sinon, d'après le lemme 8, on a pour h quelconque, élément de G

$$\|e_{h,\alpha}+2\,e_i+3\,e_f\| \neq \sqrt{14}$$

par suite

$$\|\varphi(e_{h,\alpha})+2\varphi(e_i)+3\varphi(e_f)\| \neq \sqrt{14}$$

ou encore, pour un certain h' dépendant de h

$$\|e_{h',\alpha}+2\,e_{f_\varphi}+3\,e_{f'}\| \neq \sqrt{14}$$

d'où, d'après le lemme 8,

$$f' = f_\varphi\cdot g(\alpha).$$

Si maintenant f est la forme $jg(\alpha)$, on a:

$$\varphi(e_f) = -\varphi(e_{g(\alpha)}) = -e_{f_\varphi\cdot g(\alpha)} = e_{f_\varphi\cdot f}.$$

PROPOSITION 12. *L'application $\varphi \to f_\varphi$ est un isomorphisme du groupe des isométries de $\mathscr{H}(A, \Delta)$ sur G.*

Preuve. Soient φ et ψ des isométries de $\mathscr{H}(A, \Delta)$, $f_{\psi\circ\varphi} = \psi\big(\varphi(e_i)\big) = \psi(e_{f_\varphi})$. Or, d'après le lemme 11, $\psi(e_{f_\varphi}) = e_{f_\psi\cdot f_\varphi}$ d'où $f_{\psi\circ\varphi} = f_\psi\cdot f_\varphi$, ce qui prouve que l'application $\varphi \to f_\varphi$ est un homomorphisme de groupes. C'est en fait un homomorphisme injectif; en effet, si $f_\varphi = i$, alors d'après le lemme 11, on a

$$\varphi(e_f) = e_f; \quad f \in G,$$

et d'après le lemme 10,

$$\varphi(e_{f,\alpha}) = e_{f,\alpha}; \quad f \in G,\ \alpha \in X,$$

donc φ est l'identité.

Il reste à voir que l'homomorphisme $\varphi \to f_\varphi$ est surjectif. Soit f_0 un élément de G; on considère l'application linéaire φ de $\mathscr{H}(A, \Delta)$ définie sur la base canonique de cet espace par

$$\varphi(e_f) = e_{f_0 f}, \quad f \in G',$$
$$\varphi(e_{f,a}) = e_{f_0 f,a}, \quad f \in G', \ a \in X.$$

Il est clair que φ est une bijection linéaire et même une isométrie de l'espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Par suite l'image d'une facette

$$F\big(\varepsilon a, \Delta(a)\big)$$

est la facette

$$F\big(\varepsilon\varphi(a), \Delta(a)\big).$$

Pour voir que φ est une isométrie de $\mathscr{H}(\Delta, \Delta)$ il suffit donc de prouver les assertions suivantes:

φ réalise une permutation de l'ensemble des points εe_f, $\varepsilon = \pm 1$, $f \in G'$, c'est-à-dire de l'ensemble des points e_f, $f \in G$.

φ réalise une permutation de l'ensemble des points $\varepsilon e_{f,a}$, $\varepsilon = \pm 1$, $f \in G'$, $a \in X$, c'est-à-dire de l'ensemble des points $e_{f,a}$, $f \in G$, $a \in X$.

φ réalise une permutation de l'ensemble des points $\varepsilon \dfrac{e_{f,a}+2e_{f,\beta}}{\sqrt{5}}$, $\varepsilon = \pm 1$, $f \in G'$, $a, \beta \in X$, $a < \beta$, c'est-à-dire de l'ensemble des points $\dfrac{e_{f,a}+2e_{f,\beta}}{\sqrt{5}}$, $f \in G$, $a, \beta \in X$, $a < \beta$.

φ réalise une permutation de l'ensemble des points $\dfrac{(e_{h,a}+2e_f+3e_{f.g(a)})}{\sqrt{14}}$, $\varepsilon = \pm 1$, $h \in G$, $f \in G'$, $a \in X$, $a \neq a_0$, c'est-à-dire de l'ensemble des points $\dfrac{e_{h,a}+2e_f+2e_{f.g(a)}}{\sqrt{14}}$, $h \in G$, $f \in G$, $a \in X$, $a \neq a_0$.

Chacune de ces assertions est facilement vérifiée. Pour prouver la dernière d'entre elles, par example, il suffit de remarquer que le point

$$y = e_{h,a} + 2e_f + 3e_{f.g(a)}$$

a pour image par φ le point

$$y' = e_{f_0 h,a} + 2e_{f_0 f} + 3e_{f_0 f.g(a)}$$

et pour image réciproque par φ le point

$$y'' = e_{f_0^{-1}h,a} + 2e_{f_0^{-1}f} + 3e_{f_0^{-1}f.g(a)}.$$

Le preuve des remarques qui suivent le théorème 1 est immédiate; en effet, si σ est la symétrie de $\mathscr{H}(\Delta, \Delta)$, on a $f = j$, ce qui établit la première remarque. Pour établir la seconde, on remarque que si G est dénombrable, X l'est aussi, et donc $l^2(G' \cup G' \times X)$ est séparable.

Bibliographie

[1] J. Stern, *The problem of envelopes for Banach spaces*, Israel J. Math. 24 (1976), pp. 1–15.

Received January 10, 1977 (1246)