[5] L. M. Graves, *Remarks on singular points of functional equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1955), стр. 150–157.
[6] П. Г. Айзенгендлер, *Применение диаграммы Ньютона к задаче об устойчивости периодических решений*, Доклады АН СССР 179.5 (1968), стр. 1015–1018.
[7] П. Г. Айзенгендлер, М. И. Рожанский, *К задаче об устойчивости периодических решений квазилинейных систем*, Учёные записки Ленинградского Гос. педагог. инст. им. А. И. Герцена 501 (1971), стр. 21–47.
[8] П. Г. Айзенгендлер. А. Ф. Алексеев, *Об устойчивости нулевого решения квазилинейных дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами*, Доклады АН СССР 215.3 (1974) стр. 505–508.

Received October 1975 (1074)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXIII. (1978)

Kommutative Banachalgebren und hermitesch-äquivalente Elemente

von

HORST EHMKE (Darmstadt)

Abstract. We study the set H_∞ of Hermitian-equivalent elements in a commutative Banach algebra with unit and give a generalization of the well-known Vidav–Palmer theorem.

1. Hermitesch-äquivalente Elemente. Der Begriff „hermitesch-äquivalent" findet sich in der grundlegenden Arbeit von G. Lumer [3]. Zum Verständnis der Arbeit werden nur einige elementare Kenntnisse über hermitesche Elemente vorausgesetzt. Hierzu sei auf Bonsall–Duncan [1] verwiesen. A bezeichnet eine komplexe Banachalgebra mit 1, X einen komplexen Banachraum, $B(X)$ die Banachalgebra aller beschränkten linearen Operatoren auf X, $\sigma(a)$ das Spektrum von $a \in A$, $\|a\|_\sigma$ seine Spektralnorm. $G\colon A \to C\big(M(A)\big)$ ist die Gelfand-Transformation.

DEFINITION 1.1.

$$s(a) = \sup\{\|\exp(i\xi a)\|\colon \xi \in \boldsymbol{R}\}, \qquad a \in A.$$

$$H_n = \{a \in A\colon s(a) \leqslant n\}, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

$$H_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \{a \in A\colon s(a) < \infty\}.$$

Die Elemente von H_∞ heißen *hermitesch-äquivalent*, die von H_1 *hermitesch* (vgl. [1], S. 55).

BEISPIEL 1.2. Ist $P\colon X \to X$ eine stetige Projektion eines komplexen Banachraumes X, so gilt wegen $P^2 = P$:

$$\exp(i\xi P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi P)^n}{n!} = I - P + P\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} = I + (e^{i\xi} - 1)P$$

und somit $2\|P\| - 1 \leqslant s(P) \leqslant 2\|P\| + 1$. Für $\|P\| > 1$ gilt daher $P \in H_\infty \setminus H_1$.

PROPOSITION 1.3.

(a) $\lambda H_n \subset H_n$, $\lambda H_\infty \subset H_\infty$ *für* $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

(b) H_n, $n \in \boldsymbol{N}$, *ist abgeschlossen.*

(c) $H_m + H_n \subset H_{mn}$, $m, n \in \boldsymbol{N}$.

(d) H_∞ *ist ein reeller Vektorraum, der bezüglich äquivalenter Umnormierungen von* A *invariant ist.*

Die Beweise sind elementar und folgen leicht aus den Definitionen. Die Vektorraumeigenschaft von H_∞ gilt i.a. nicht für nicht-kommutative Banachalgebren. Während H_∞ bei einer äquivalenten Umnormierung unverändert bleibt, ist dies für die H_n nicht der Fall. Im wesentlichen von Lumer [3] (Theorem 13 und 6) stammen die folgenden Aussagen:

SATZ 1.4. (a) H_∞ *ist genau dann abgeschlossen, wenn* $H_\infty = H_n$ *für ein* $n \in \boldsymbol{N}$ *ist.*

(b) *Ist* F *ein reeller Unterraum von* A *mit* $F \subset H_n$ *für ein* $n \in \boldsymbol{N}$, *so gibt es eine äquivalente Algebranorm auf* A, *bezüglich der alle Elemente aus* H_1 *und* F *hermitesch sind. Ist* $A \subset B(X)$, *so kann* X *äquivalent so umnormiert werden, daß obige Aussage für die zugehörige Operatornorm gilt. Ist* X *ein Hilbertraum, so kann die Umnormierung so geschehen, daß* X *wieder ein Hilbertraum wird.*

KOROLLAR 1.5. (a) *Zu endlich vielen Elementen aus* H_∞ *gibt es eine äquivalente Norm auf* A, *bezüglich der sie hermitesch sind.*

(b) *Genau dann gibt es eine äquivalente Norm auf* A, *bezüglich der die Elemente von* H_∞ *alle hermitesch sind, wenn* H_∞ *abgeschlossen ist.*

Beweis. (a) Sind $a_1, \ldots, a_n \in H_\infty$ und $F = \{\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i \colon\ \xi_i \in \boldsymbol{R}\}$, dann sind die Voraussetzungen von 1.4.b erfüllt.

(b) Ist $H_\infty = H_1$, so ist H_∞ wegen 1.3.(b) abgeschlossen. Ist H_∞ abgeschlossen, so gilt $H_\infty = H_n$ für ein $n \in \boldsymbol{N}$ nach 1.4.(a) und 1.4.(b) liefert die Existenz der Norm.

KOROLLAR. 1.6. (a) $\sigma(a) \subset \boldsymbol{R}$, $a \in H_\infty$.

$$\text{(b)}\quad \{0\} = H_\infty \cap iH_\infty = H_\infty \cap \operatorname{Rad} A.$$

Beweis: (a) Wegen 1.5.(a) kann $a \in H_1$ angenommen werden, da sich die spektralen Eigenschaften bei äquivalenten Umnormierungen nicht ändern. Hermitesche Elemente haben jedoch reelle Spektren.

(b) Ist $a \in H_\infty \cap iH_\infty$, so kann wegen 1.5.(a) $a \in H_1 \cap iH_1$ angenommen werden. Also gilt: $\sigma(a) = \{0\}$. Da für hermitesche Elemente $\|a\| = \|a\|_\sigma$ gilt, folgt daher $a = 0$ ([1], S. 57).

Im allgemeinen Fall ist H_∞ keine reelle Algebra, d.h., es gibt ein A und $a \in H_\infty \subset A$ mit $a^2 \notin H_\infty$ (siehe Beispiel in 3). Es gilt jedoch:

SATZ 1.7. *Sei* $\varphi\colon A \to B(H)$ *ein Isomorphismus von* A *auf eine abgeschlossene Unteralgebra der beschränkten Operatoren auf dem Hilbertraum* H. *Dann ist* H_∞ *eine reelle Algebra.*

Beweis. Offensichtlich genügt es, die Aussage für $\varphi(A)$ zu beweisen. Seien $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ hermitesch-äquivalent. Bezüglich einer geeigneten Norm sind $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ hermitesch und damit auch $\varphi(a)\varphi(b)$, da das Produkt kommutierender hermitescher Hilbertraumoperatoren hermitesch ist. Bezüglich der ursprünglichen Norm ist daher $\varphi(a)\varphi(b)$ hermitesch-äquivalent.

Z.B. besitzen Quotientenalgebren ([1]) eine solche Darstellung auf einem Hilbertraum.

SATZ 1.8. H_∞ *ist genau dann eine reelle Algebra, wenn* $H_\infty + iH_\infty$ *eine komplexe Algebra ist.*

Beweis. Sind $H_\infty + iH_\infty$ Algebra und $a \in H_\infty$, so ist $a^2 = h + ik \in H_\infty + iH_\infty$, d.h., a^2 ist normal bezüglich einer geeigneten Norm und für seinen numerischen Wertebereich gilt: $V(a^2) \subset$ konvexe Hülle $\sigma(a^2)$ $=$ konvexe Hülle $(\sigma(a))^2 \subset \boldsymbol{R}$ (s. Lemma 4 [1], S. 206); d.h., a^2 ist hermitesch bezüglich dieser Norm und hermitesch-äquivalent bezüglich der Ausgangsnorm. Wegen $(a+b)^2 - a^2 - b^2 = 2ab$ ist H_∞ Algebra.

Die umgekehrte Beweisrichtung ist offensichtlich.

2. Beziehungen zwischen A und H_∞. Der Satz von Vidav–Palmer ([1]) besagt: Aus $A = H_1 + iH_1$ folgt, daß A zu einer C^*-Algebra isometrisch isomorph ist. Dabei ist A als komplexe Banachalgebra mit 1 vorausgesetzt. Im Fall der Kommutativität folgt daher, daß die Gelfand-Abbildung eine surjektive Isometrie ist. Wir beweisen nun

THEOREM 2.1. *Gilt für die kommutative Banachalgebra* A *die Gleichung* $A = H_\infty + iH_\infty$, *so ist die Gelfand-Transformation eine Isomorphie, d.h.,* $A \cong C(M(A))$.

Der Beweis erfordert einige Zwischenschritte.

LEMMA 2.2. *Sind* $a, b \in H_n$, *so gibt es eine äquivalente Norm* $\|\ \|_1$ *auf* A, *für die gilt:*

(a) $\|c\|_1 \leqslant n^4 \|c\| \leqslant n^8 \|c\|_1$, $c \in A$.

(b) a, b *sind bezüglich* $\|\ \|_1$ *hermitesch.*

Beweis. Die Gruppe $G = \{\exp(i\xi a + i\eta b)\colon\ \xi, \eta \in \boldsymbol{R}\}$ ist durch n^2 beschränkt. Die Norm $|c| := \sup\{\|gc\|\colon\ g \in G\}$ ist wegen $|c| \leqslant n^2\|c\| \leqslant n^4 |c|$, $c \in A$, zu $\|\ \|$ auf A äquivalent, i.a. aber keine Algebranorm. Für die Operatornorm $\|\ \|_1$ bezüglich $|\ |$ gilt jedoch: $\|d\|_1 = \sup\{|dc|\colon\ |c| \leqslant 1\} \leqslant n^4 \|d\|$ $\leqslant n^8 \|d\|_1$, $d \in A$. Hierbei beachte man: $\|d\| = \sup\{\|dc\|\colon\ \|c\| \leqslant 1\}$.

Ist $d \in G$, so gilt: $|dc| = \sup\{\|gdc\|\colon\ g \in G\} = |c|$, d.h., $\|d\|_1 = 1$, die Elemente von G sind unitär und a, b also hermitesch bezüglich $\|\ \|_1$.

LEMMA 2.3. *Für* $a, b \in H_n$ *gilt:* $\|a+ib\| \geqslant n^{-8} \sup(\|a\|, \|b\|)$.

Beweis. Wir haben $\|a+ib\| \geqslant n^{-4}\|a+ib\|_1 \geqslant n^{-4}\sup(\|a\|_1, \|b\|_1)$ $\geqslant n^{-8}\sup(\|a\|, \|b\|)$. Dabei werden die Norm $\|\ \|_1$ aus 2.2 und die für hermitesche Elemente geltende Ungleichung $\|a+ib\|_1 \geqslant \sup(\|a\|_1, \|b\|_1)$ benutzt.

Satz 2.3. *$H_n + iH_n$ ist abgeschlossen.*

Beweis. Sei $\{a_\nu + ib_\nu\colon \nu \in N\} \subset H_n + iH_n$ eine konvergente Folge. Dann gilt:

$$\|(a_\nu - a_\mu) + i(b_\nu - b_\mu)\| \geqslant n^{-8}\sup(\|a_\nu - a_\mu\|, \|b_\nu - b_\mu\|),$$

d.h., $\{a_\nu\}$ und $\{b_\nu\}$ sind jeweils für sich in H_n konvergent. Also gilt

$$\lim(a_\nu + ib_\nu) = \lim a_\nu + i\lim b_\nu \in H_n + iH_n.$$

Wir kommen nun zum Beweis von Theorem 2.1: $A = H_\infty + iH_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty}(H_n + iH_n)$ ist von der 2. Baireschen Kategorie. Da jedes $H_n + iH_n$ abgeschlossen ist, muß ein $H_m + iH_m$ einen inneren Punkt enthalten, d.h., es gibt ein $\varepsilon > 0$ und $a+ib \in H_m + iH_m$ mit $K = \{x \in H_\infty + iH_\infty\colon \|x - (a+ib)\| < \varepsilon\} \subset H_m + iH_m$. Wegen 1.3.(c) liegt $K - (a+ib)$ in $H_{m^2} + iH_{m^2}$ und ist eine ganz A absorbierende Nullumgebung. Mit 1.3.(a) folgt $A = H_{m^2} + iH_{m^2}$ und daher $H_{m^2} = H_\infty$. Aus 1.4.(b) folgt, daß es eine äquivalent Norm auf A gibt, bezüglich der alle Elemente aus H_∞ hermitesch sind. Wegen des Satzes von Vidav–Palmer ist A dann zu einer C^*-Algebra isometrisch isomorph. In Bezug auf die alte Norm bekommen wir nun das gewünschte Ergebnis.

$L := \{a \in A\colon \sigma(a) \subset \boldsymbol{R}\}$ ist eine reelle Banachalgebra, denn $L = G^{-1}\big(C_{\boldsymbol{R}}(M(A))\big)$.

Satz 2.4. *Gilt $\sup\{\|\exp(ia)\|\colon a \in L\} < \infty$, so ist $H_\infty = L$ und A ist halbeinfach.*

Beweis. Mit a ist auch ξa in L, wenn $\xi \in \boldsymbol{R}$ ist. Also gilt $L \subset H_\infty$. Wegen 1.6 haben wir $H_\infty \subset L$, also $H_\infty = L$.

Ist $\|a\|_\sigma = 0$, so gilt: $a \in L \cap iL = H_\infty \cap iH_\infty = \{0\}$ wegen 1.6.(b).

Unter der Voraussetzung von 2.4. ist insbesondere H_∞ eine abgeschlossene reelle Unteralgebra von A.

Theorem 2.5. *Sei H_∞ eine abgeschlossene reelle Unteralgebra. Dann gilt:*

(a) *$B = H_\infty + iH_\infty$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra.*

(b) *Die Gelfand-Transformation von B ist ein Isomorphismus und B ist bezüglich dieser Eigenschaft maximal.*

(c) *Trennt H_∞ die Punkte von $M(A)$, so ist $A = B + \operatorname{Rad} A$, d.h. A besitzt die Wedderburn-Eigenschaft.*

Beweis. (a) Ist H_∞ abgeschlossen, so gilt $H_\infty = H_n$ für ein $n \in N$ (1.4.(a)) und $B = H_\infty + iH_\infty = H_n + iH_n$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra nach 2.3 und 1.8.

(b) Nach Theorem 2.1 ist die Gelfand-Transformation ein Isomorphismus. Ist C eine Unteralgebra mit dieser Eigenschaft, so sind die Urbilder der reellen Funktionen hermitesch-äquivalent, also in H_∞ enthalten, d.h., $C \subset B$.

(c) Wegen 1.4.(a) und (b) können wir o.B.d.A. $H_\infty = H_1$ annehmen, d.h., B ist zu $C(M(B))$ isometrisch isomorph. Damit bildet aber die Gelfand-Transformation $G\colon A \to C(M(A))$ die Unteralgebra B auf eine C^*-Unteralgebra von $C(M(A))$ ab, denn B und $C(M(A))$ sind C^*-Algebren und $G|B$ wegen 1.6.(a) und wegen $\|a\|_\sigma = \|a\|$ für $a \in H_1$ ein *-Isomorphismus (vgl. Sakai [4], S. 5.). $G(B)$ ist eine abgeschlossene, selbstadjungierte, die Punkte von $M(A)$ trennende Unteralgebra von $C(M(A))$, stimmt also mit $C(M(A))$ überein.

Ist $\Phi = G|B$, so ist $\Psi = \Phi^{-1}\circ G$ ein Homomorphismus von A auf B und $\operatorname{Kern}\Psi = \operatorname{Rad} A$. Wegen $\Psi^2 = \Psi$ hat A daher die Zerlegung $B + \operatorname{Rad} A$.

3. Beispiel eines Banachraumoperators $T \in B(X)$ mit $T \in H_1$ und $T^2 \notin H_\infty$.

Lemma 3.1. *Seien $f_k(\xi) = \exp(ik\xi)$, $g_k(\xi, \eta) = \exp(ik\xi + ik^2\eta)$, $\xi, \eta \in [0, 2\pi]$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $F = \langle f_k\colon k \in \boldsymbol{Z}\rangle \subset C[0, 2\pi]$, $G = \langle g_k\colon k \in \boldsymbol{Z}\rangle \subset C([0, 2\pi]^2)$ ($\langle\ldots\rangle$ bezeichnet den aufgespannten komplexen Vektorraum). Dann ist die durch $\Phi(f_k) = g_k$ definierte lineare Abbildung $\Phi\colon F \to G$ unstetig, d.h., zu jedem $n \in N$ gibt es $M_n \subset \boldsymbol{Z}$ und $\{a_k \in \boldsymbol{C}\colon k \in M_n\}$ mit*

$$n\sup\Big\{\Big|\sum_{k\in M_n} a_k\exp(ik\xi)\Big|\colon \xi \in \boldsymbol{R}\Big\} < \sup\Big\{\Big|\sum_{k\in M_n} a_k\exp(ik\xi + ik^2\eta)\Big|\colon \xi, \eta \in \boldsymbol{R}\Big\}.$$

Der Beweis kann mit Hilfe von Methoden der Fourieranalysis geführt werden (S. [2]).

Lemma 3.2. *Zu jedem $n \in N$ gibt es einen endlich-dimensionalen Banachraum X_n und einen hermiteschen Operator $T_n \in B(X_n)$ mit $T_n^2 \notin H_n$.*

Beweis. Sei $X_n = \boldsymbol{C}^{|M_n|}$ der Banachraum mit der Norm

$$\|x\| = \sup\Big\{\Big|\sum_{k\in M_n} \exp(ik\xi)\cdot\xi_k\Big|\colon \xi \in \boldsymbol{R}\Big\}, \qquad x = (\xi_k)_{k\in M_n}.$$

Sei $T_n x = (k\xi_k)_{k\in M_n}$. Dann gilt: $\exp(i\eta T_n)x = \big(\exp(i\eta k)\,\xi_k\big)_k$ und

$$\|\exp(i\eta T_n)x\| = \sup\Big\{\Big|\sum_{k\in M_n} \exp(ik\xi)\exp(ik\eta)\,\xi_k\Big|\colon \xi \in \boldsymbol{R}\Big\} = \|x\|,$$

d.h., $\|\exp(i\eta T_n)\| = 1$ für $\eta \in \boldsymbol{R}$ und T_n ist hermitesch. Jedoch gilt mit $a_n = (a_k)_{k\in M_n}$ aus 3.1: $\sup\{\|\exp(i\eta T_n^2)a_n\|\colon \eta \in \boldsymbol{R}\} = \sup\{|\exp(ik\xi)\times \times\exp(ik^2\eta)\,a_k|\colon \xi, \eta \in \boldsymbol{R}\} > n\|a_n\|$, d.h., $T_n^2 \notin H_n$.

Satz 3.3. *Es gibt einen Banachraum X und einen kompakten, hermiteschen Operator $T \in B(X)$ mit $T^2 \notin H_\infty$. Für die von T und der Identität I erzeugte Banachalgebra $A(T)$ ist H_∞ keine reelle Algebra.*

Beweis. Seien X der Banachraum $\{(x_n)_{n\in N}: x_n \in X_n,\ \sup\|x_n\| < \infty\}$ und $S_m \in B(X)$ mit $S_m(x_n)_n = (\delta_{mn}T_n x_n)_n$. Die S_m sind kompakt und hermitesch mit $S_m^2 \notin H_m$ und wegen 1.3.(a) kann $\|T_m\| = \|S_m\| = 2^{-m}$ angenommen werden. Weiter kann für die Elemente a_n aus 3.2 $\|a_n\| = 1$ angenommen werden. Dann gilt mit 1.3.(b), (c): $T = \sum_{m=1}^{\infty} S_m$ ist kompakt und hermitesch. Aber:

$$\sup\{\|\exp(i\eta T^2)(a_n)_n\|:\ \eta \in \boldsymbol{R}\}$$
$$= \sup\{\|\exp(i\eta T_n^2)a_n\|:\ \eta \in \boldsymbol{R},\ n \in \boldsymbol{N}\} > \sup\{n\|a_n\|:\ n \in \boldsymbol{N}\} = \infty,$$

d.h., $T^2 \notin H_\infty$.

Literaturverzeichnis

[1] F. Bonsall, J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1973.

[2] H. Ehmke, *Hermitesch-äquivalente Elemente in einer kommutativen Banachalgebra* (Dissertation), Darmstadt 1975.

[3] G. Lumer, *Spectral operators, hermitian operators and bounded groups*, Acta Sci. Math. (Szeged) 25 (1964), pp. 75–85.

[4] S. Sakai, *C*-algebras and W*-algebras*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1971.

FACHBEREICH MATHEMATIK
DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE DARMSTADT

Received February 24, 1976 (1124)

STUDIA MATHEMATICA, LXIII. (1978)

Duality of linear operators in locally convex spaces

by

GERHARD GARSKE (Hagen)

Abstract. Let $T: E \to F$ be a linear non-continuous operator between two locally convex spaces. Facts valid for continuous operators are applicable to T by either strengthening the topology of E or weakening the topology of F. The same point of view for the dual operator leads to a diagram which topological properties are examined for various topologies of the dual spaces.

1. Let $T: E \to F$ be a closable linear operator between two locally convex spaces with domain $D(T)$ dense in E. In order to apply methods available for continuous operators to the treatment of T, there are two obvious possibilities: either to strenghten the topology of $D(T)$ by the graph topology or to weaken the topology of F by the finest locally convex topology that makes T continuous. Let E_T and F^T be these new spaces. They are isomorphic to $G(T)$, the graph of T, and to $(D(T)\times F)/G(-T)$, respectively. Let i_T and i^T be the corresponding continuous injections:

$$E_T \xrightarrow{i_T} E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{i^T} F^T. \tag{1}$$

For a locally convex space X, let $\mathscr{U}_X$ always denote a neighborhood base of 0. Then $\{i_T^{-1}[U\cap T^{-1}(V)] \mid U \in \mathscr{U}_E,\ V \in \mathscr{U}_F\}$ is a neighborhood base of 0 for E_T and $\{i^T[T(U)+V] \mid U \in \mathscr{U}_E,\ V \in \mathscr{U}_F\}$ and $\{i^T(\Gamma[T(U)\cup V]) \mid U \in \mathscr{U}_E,\ V \in \mathscr{U}_F\}$ are neighborhood bases of 0 for F^T. Here ΓM is the absolutely convex hull of the set M. For a linear operator S we always write $N(S)$ for its kernel and $R(S)$ for its range.

Browder [1] implicitly uses the space E_T to examine closable operators.

Köthe [6] characterises openness and nearly-openness by relations of the equicontinuous sets of the dual spaces and in doing so implicitly uses the space F^T.

In Section 2 we consider questions arising from the dual line of (1). The results are applicable to the examination of state diagrams like those of Loustaunau [7] as well as to the examination of relatively continuous operators (Chilana [2], Förster [3]). This will be carried out in Sections 3 and 4.

2. If in (1) we pass to the duals and use for T' the notations just introduced for T, we get the diagram