(4) It would be interesting to find those sets of vectors on which $\psi(X)$ is attained (for finite-dimensional X). Probably, the set K is good for symmetric spaces.

The authors are thankful to V. Gejler and F. Wojtaszczyk for attention and for the help in translation of this paper into English.

References

[1] Y. A. Abramovič, *Some theorems on normed structures*, Vestnik L. G. U. 13 (1971), pp. 5–11 (in Russian).
[2] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Springer-Verlag, Berlin 1973.
[3] D. Fremlin, *A characterisation of L-spaces*, Indag. Math. 36 (1974), pp. 270–275.
[4] Y. Gordon, *On p-absolutely summing constants of Banach spaces*, Israel J. Math. 7 (1969), pp. 151–163.
[5] G. J. O. Jameson, *Unconditional convergence in partially ordered linear spaces*, Math. Ann. 200 (1973), pp. 227–233.
[6] M. S. Macphail, *Absolute and unconditional convergence*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), pp. 121–123.
[7] H. H. Schaefer, *Banach lattices and positive operators*, Springer-Verlag, Berlin 1974.
[8] B. Z. Vulikh, *Introduction to the theory of partially ordered spaces*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1967.

Received February 17, 1976 (1122)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXIII. (1978)

О ветвлении и устойчивости периодических решений дифференциальных уравнений с неаналитической правой частью

П. Г. АЙЗЕНГЕНДЛЕР, М. М. ВАЙНБЕРГ (Москва)

Резюме. Авторами был предложен метод для решения задачи Пуанкаре и выяснения вопроса об устойчивости решений этой задачи в аналитическом случае (Доклады АН СССР 165.2 (1965), стр. 255–257; 176.1 (1967), стр. 9–12; 179.5 (1968), стр. 1015–1018). Полное доказательство всех предложений данных работ было дано в монографии М. М. Вайнберга и В. А. Треногина (*Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, Москва 1969). Здесь рассматривается неаналитический случай задачи Пуанкаре в вещественном банаховом пространстве. Предлагается метод для нахождения числа решений и их асимптотического представления. Для иллюстрации предлагаемого метода приводятся примеры. Идея метода заключается в том, что если функция, действующая в банаховом пространстве, не является аналитической, но дифференцируема по Фреше n раз, то ее можно представить в виде суммы полинома степени n и остатка. В статье показано, как в этом случае можно находить число решений и асимптотику. В том случае, когда пространство конечномерно, исследуется вопрос об устойчивости решений.

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \lambda F(t, x, \lambda) + \lambda Q(t, x, \lambda), \tag{1}$$

где $\lambda \geqslant 0$ — малый параметр; A — линейный ограниченный оператор, действующий в вещественном банаховом пространстве E; $F(t, x, \lambda) = \sum_{i+k=0}^{n} F_{ik}(t) x^i \lambda^k$ — полином в смысле Фреше с непрерывным и T-периодическими коэффициентами; Q — периодическая по t функция с периодом T, непрерывная и ограниченная на некотором множестве

$$K = \{(t, x, \lambda):\ t \in \boldsymbol{R}^1,\ \|x\| \leqslant \varrho_0,\ \lambda \in [0, \varrho_0],\ \varrho_0 > 0 - \text{const}\}$$

и удовлетворяющая равномерно по t условию

$$\|Q(t, x, \lambda)\| = o\big((\|x\| + \lambda)^n\big) \quad \text{при} \quad \|x\| + \lambda \to 0. \tag{2}$$

Определение. Функция $x(t, \lambda)$: $\boldsymbol{R}^1 \times [0, \bar{\varrho}_0] \to E$, где $0 < \bar{\varrho}_0 \leqslant \varrho_0$, называется *малым T-периодическим решением* уравнения (1), если выполнены условия: 1) она дифференцируема и T-периодична по t при каждом фиксированном $\lambda \in [0, \bar{\varrho}_0]$; 2) при каждом $\lambda \in [0, \bar{\varrho}_0]$ она удовлетворяет уравнению (1); 3) она непрерывна по λ на $[0, \bar{\varrho}_0]$ равномерно по t; 4) $x(t, 0) \equiv 0$.

Малые T-периодические решения x и x_1 считаются *равными*, если существует положительное число ϱ такое, что $x(t, \lambda) = x_1(t, \lambda)$ на $\boldsymbol{R}^1 \times [0, \bar{\varrho}]$. В противном случае решения x и x_1 считаются *различными*.

Мы рассмотрим две задачи. Первая задача: найти число всех малых T-периодических решений уравнения (1) и получить для них асимптотические формулы. Вторая задача — это задача об устойчивости в смысле Ляпунова указанных решений для малых положительных значений параметра λ.

2. Исследуем сначала первую задачу. Для случая, когда Q — аналитический оператор по x и λ, она была решена нами в [1], [2] (см. также монографию [3], где приведены подробные доказательства). Здесь мы отказываемся от требования аналитичности для Q, заменяя его более слабым условием. Именно, мы предполагаем, что равномерно по t и при каждом фиксированном $\lambda \in [0, \varrho_0]$ функция Q удовлетворяет условию Липшица по x с малой константой:

(3) $$\|Q(t, x^1, \lambda) - Q(t, x^2, \lambda)\| \leqslant L(\varrho, \lambda)\, \|x^1 - x^2\| \qquad (\|x^1\|, \|x^2\| \leqslant \varrho \leqslant \varrho_0),$$

(4) $$L(\varrho, \lambda) = o\big((\varrho+\lambda)^{n-1}\big) \quad \text{при} \quad \varrho+\lambda \to 0.$$

Следуя идее Пуанкаре, рассмотрим для уравнения (1) начальную задачу

(5) $$x(0, \lambda) = a.$$

Из условий, наложенных на правую часть уравнения (1), вытекает предложение, легко устанавливаемое с помощью принципа сжатых отображений.

Лемма 1. *Каждой паре (a, λ), если $\lambda \geqslant 0$ и $\|a\|$ достаточно малы, отвечает единственное решение $x(t, a, \lambda)$ задачи (1), (5), определённое на интервале $[0, T]$. Кроме того, функция $x(t, a, \lambda)$ непрерывно зависит от a и λ и удовлетворяет условию $x(t, 0, 0) \equiv 0$.*

Исследуем асимптотическую структуру решения $x(t, a, \lambda)$. Для этого рассмотрим укороченное уравнение

(6) $$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + \lambda F(t, \tilde{x}, \lambda).$$

Полагая $\tilde{x} = \sum\limits_{i+k=1}^{\infty} x_{ik}(t)\, a^i \lambda^k$ и применяя к уравнению (6) метод неопределённых коэффициентов, получаем следующую рекуррентную систему дифференциальных уравнений:

(7) $$\begin{aligned} \frac{dx_{i0}}{dt} &= Ax_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots),\\ \frac{dx_{01}}{dt} &= Ax_{01} + F_{00}(t),\\ \frac{dx_{02}}{dt} &= Ax_{02} + F_{01}(t) + F_{10}(t)x_{01},\\ \frac{dx_{11}}{dt} &= Ax_{11} + F_{10}(t)x_{10}, \ \ldots \end{aligned}$$

Зададим для x_{ik} начальные условия, согласованные с (5):

(5^1) $$x_{ik}(0) = \begin{cases} I & \text{при} \quad i = 1,\ k = 0,\\ \mathrm{O} & \text{для всех других значений } i \text{ и } k. \end{cases}$$

Здесь I — единичный оператор из E в E, а O — нуль пространства i-линейных операторов.

Тогда из системы (7) (с учётом условий (5^1)) коэффициенты x_{ik} однозначно и последовательно определяются. Имеем:

(8) $$\begin{aligned} x_{10}(t) &= e^{At},\\ x_{i0}(t) &= 0 \qquad (i \geqslant 2),\\ x_{01}(t) &= \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)} F_{00}(\tau)\, d\tau, \ \ldots \end{aligned}$$

Запишем теперь решение $x(t, a, \lambda)$ задачи (1), (5) в виде

(9) $$x(t, a, \lambda) = e^{At}a + \lambda f(t, a, \lambda) + \lambda\omega(t, a, \lambda),$$

где $f(t, a, \lambda) = \sum\limits_{i+k=0}^{n} x_{i,k+1}(t)\, a^i \lambda^k$ и $x_{i,k+1}$ определены по формулам (8). Оказывается, что функция ω наследует свойства типа (2)–(4). Именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Решение $x(t, a, \lambda)$ задачи (1), (5) представимо в виде (9), где функция $\omega(t, a, \lambda)$ непрерывна по a и λ на некотором множестве $\{(a, \lambda)\colon \|a\| \leqslant \varrho_0',\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \varrho_0',\ \varrho_0' \leqslant \varrho_0\}$ и равномерно по $t \in [0, T]$ удовлетворяет оценке*

(2^1) $$\|\omega(t, a, \lambda)\| = o\big((\|a\|+\lambda)^n\big) \quad \textit{при} \quad \|a\|+\lambda \to 0$$

и условию Липшица по a:

(3[1]) $$\|\omega(t, a^1, \lambda) - \omega(t, a^2, \lambda)\| \leqslant \bar{L}(\varrho, \lambda)\, \|a^1 - a^2\| \quad (\|a^1\|, \|a^2\| \leqslant \varrho \leqslant \varrho_0', \ \lambda \in [0, \varrho_0']),$$

(4[1]) $$\bar{L}(\varrho, \lambda) = o\big((\varrho+\lambda)^{n-1}\big) \quad \textit{при} \quad \varrho+\lambda \to 0.$$

Составим уравнение

(10) $$x(T, a, \lambda) = a$$

и заметим следующее. Пусть $a(\lambda)$ — малое решение уравнения(¹) (10). Подставляя $a(\lambda)$ в (9) и T-периодически продолжая по t полученную при этом функцию, находим функцию $x(t, \lambda)$ $(x(t, 0) \equiv 0)$, являющуюся в силу T-периодичности правой части уравнения (1) малым T-периодическим решением этого уравнения. Обратно, если $x(t, \lambda)$ — малое T-периодическое решение уравнения (1), то в силу (5) $x(0, \lambda)$ является малым решением уравнения (10). Ввиду этого число малых T-периодических решений уравнения (1) совпадает с числом малых решений уравнения (10). Кроме того, в силу соотношения (9) асимптотические формулы для малых решений уравнения (10) порождают асимптотические формулы и для малых T-периодических решений уравнения (1).

Таким образом, исходная задача свелась к задаче о малых решениях уравнения (10).

3. Запишем уравнение (10) в виде

(10′) $$Ba = \lambda f(T, a, \lambda) + \lambda\omega(T, a, \lambda),$$

где $B = I - e^{AT}$, и предположим, что оператор B является фредгольмовским. Могут представиться два случая: нерезонансный, когда 0 является регулярным значением оператора B, и резонансный, когда 0 — собственное значение этого оператора.

В первом случае для оператора B существует ограниченный обратный оператор и поэтому по теореме о неявной функции уравнение (10′) имеет единственное малое решение $a(\lambda)$, представимое в виде $a(\lambda) = a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n + O(\lambda^{n+1})$. Ввиду этого и исходная задача для уравнения (1) также имеет единственное решение $x(t, a) = x_1(t)\lambda + \ldots$ $\ldots + x_n(t)\lambda^n + \bar{x}(t, \lambda)$, где $\sup\limits_{t \in R^1} \|\bar{x}(t, \lambda)\| = O(\lambda^{n+1})$.

Рассмотрим резонансный случай. Предположим, что 0 является r-кратным собственным значением оператора B и обозначим через E_r ядро этого оператора, а через E_r^* — ядро сопряжённого с ним

(¹) Решение $a(\lambda)$ уравнения (10) называется *малым*, если оно непрерывно на некотором интервале $[0, \lambda_0)$ и $a(0) = 0$.

оператора. Пусть, далее, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ — нормированный базис в E_r, а $\psi_1, \ldots, \psi_r$ — нормированный базис в E_r^*. Обозначим ещё через $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ систему линейных ограниченных на E функционалов, биортогональную с системой $\{\varphi_i\}_1^r$, т.е. $\gamma_i(\varphi_k) = \delta_{ik}$, где δ_{ik} — символ Кронекера, а через $z_1, \ldots, z_r$ — систему линейно независимых векторов из E, биортогональную с системой $\{\psi_i\}_1^r$. Существование систем $\{\gamma_i\}$ и $\{z_i\}$ следует из теоремы Хана–Банаха. Пусть, далее, E^r — линейная оболочка, натянутая на векторы $z_1, \ldots, z_r$. Тогда (см. [3]) проекторы $\sum\limits_{i=1}^{r}\gamma_i(\cdot)\varphi_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{r}\psi_i(\cdot)z_i$ разлагают пространство E в прямые суммы $E = E_r \dot{+} E_{\infty-r}$ и $E = E^r \dot{+} E^{\infty-r}$ соответственно, при этом сужение $\tilde{B}$ оператора B на $E_{\infty-r}$ есть линейный ограниченный изоморфизм подпространства $E_{\infty-r}$ на $E^{\infty-r}$.

Применяя преобразование Шмидта, мы сводим уравнение (10′) к эквивалентной системе

(11) $$\hat{B}a = \xi_1 z_1 + \ldots + \xi_r z_r + \lambda f(T, a, \lambda) + \lambda\omega(T, a, \lambda),$$

(12) $$\xi_i = \gamma_i(a) \quad (i = 1, \ldots, r),$$

где $\hat{B}$ — линейный ограниченный изоморфизм пространства E на E, причем

(13) $$\hat{B}^{-1} = \tilde{B}^{-1}\Big[I - \sum_{i=1}^{r}\psi_i(\cdot)z_i\Big] + \sum_{i=1}^{r}\psi_i(\cdot)\varphi_i.$$

Упростим уравнение (11). Применяя к обеим частям уравнения (11) оператор $\hat{B}^{-1}$ и учитывая соотношение $\hat{B}^{-1}z_i = \varphi_i$ (оно следует из равенства $\psi_i(z_k) = \delta_{ik}$ и соотношения (13)), получаем

(14) $$a = h + \lambda\hat{B}^{-1}f(T, a, \lambda) + \lambda\hat{B}^{-1}\omega(T, a, \lambda),$$

где $h = \xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_r\varphi_r$.

Справедливо следующее предложение.

Лемма 2. *Каждой паре* (h, λ), *если* $\|h\|$ *и* $\lambda \geqslant 0$ *достаточно малы, отвечает единственное решение* $a(h, \lambda)$ *уравнения* (14), *непрерывно зависящее от* h *и* λ *и удовлетворяющее условию* $a(0, 0) = 0$.

Рассмотрим укороченное уравнение, соответствующее уравнению (14):

(15) $$\tilde{a} = h + \lambda\hat{B}^{-1}f(T, \tilde{a}, \lambda),$$

и применим к нему метод неопределённых коэффициентов. Полагая $\tilde{a} = \sum\limits_{i+k=1}^{\infty} a_{ik}h^i\lambda^k$ и подставляя в (15), получаем для коэффициентов a_{ik}

рекуррентную систему уравнений, из которой они однозначно определяются. Имеем:

$$a_{10} = I, \quad a_{i0} = 0 \;\; (i \geqslant 2), \quad a_{01} = \hat{B}^{-1} x_{01}(T),$$

$$a_{02} = \hat{B}^{-1} x_{02}(T) + \hat{B}^{-1} x_{11}(T) a_{01}, \quad a_{11} = \hat{B}^{-1} x_{11}(T), \quad a_{21} = \hat{B}^{-1} x_{21}(T),$$

$$a_{03} = \hat{B}^{-1} x_{03}(T) + \hat{B}^{-1} x_{11}(T) a_{02} + \hat{B}^{-1} x_{21}(T) a_{01}^2, \ldots$$

Тогда согласно лемме 2 и теореме 1 справедлива

Теорема 2. *Решение $a(h, \lambda)$ уравнения* (14) *представимо в виде*

$$a(h, \lambda) = h + \lambda \sum_{i+k=0}^{n} a_{i,k+1} h^i \lambda^k + \lambda \bar{a}(h, \lambda),$$

где $\bar{a}(h, \lambda)$ — непрерывная на множестве $\{(h, \lambda)\colon \|h\| \leqslant \varrho_0', 0 \leqslant \lambda \leqslant \varrho_0'\}$ функция, удовлетворяющая оценке

$$\|\bar{a}(h, \lambda)\| = o\big((\|h\| + \lambda)^n\big) \quad \text{при} \quad \|h\| + \lambda \to 0 \tag{16}$$

и условию Липшица по h:

$$\|\bar{a}(h^1, \lambda) - \bar{a}(h^2, \lambda)\| \leqslant \tilde{L}(\varrho, \lambda)\, \|h^1 - h^2\| \quad (\|h^1\|, \|h^2\| \leqslant \varrho \leqslant \varrho_0', \; 0 \leqslant \lambda \leqslant \varrho_0'), \tag{17}$$

$$\tilde{L}(\varrho, \lambda) = o\big((\varrho + \lambda)^{n-1}\big) \quad \text{при} \quad \varrho + \lambda \to 0. \tag{18}$$

Подставляя $a(h, \lambda)$ в (12) и учитывая условие $\gamma_i(\varphi_k) = \delta_{ik}$, получаем уравнение

$$P_i(\xi, \lambda) + \Omega_i(\xi, \lambda) = 0 \quad (i = 1, \ldots, r), \tag{19}$$

где

$$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r), \quad P_i(\xi, \lambda) = \sum_{k_1 + \ldots + k_r + k = 0}^{n} L^{(i)}_{k_1 \ldots k_r k} \xi_1^{k_1} \ldots \xi_r^{k_r} \lambda^k,$$

$$\Omega_i(\xi, \lambda) = \gamma_i\big(\bar{a}(h, \lambda)\big),$$

$$L^{(i)}_{k_1 \ldots k_r k} = \gamma_i(a_{k_1 + \ldots + k_r, k+1} \varphi_1^{k_1} \ldots \varphi_r^{k_r}) \frac{(k_1 + \ldots + k_r)!}{k_1! \ldots k_r!} \quad (i = 1, \ldots, r).$$

При этом вектор-функция $\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_r)$ непрерывна на некотором множестве $\{(\xi, \lambda)\colon \|\xi\| \leqslant \bar{\varrho}', 0 \leqslant \lambda \leqslant \bar{\varrho}', \|\cdot\|$ — норма в $\boldsymbol{R}^r\}$, удовлетворяет оценке

$$\|\Omega(\xi, \lambda)\| = o\big((\|\xi\| + \lambda)^n\big) \quad \text{при} \quad \|\xi\| + \lambda \to 0 \tag{16'}$$

и условию Липшица по ξ:

$$\|\Omega(\xi^1, \lambda) - \Omega(\xi^2, \lambda)\| \leqslant L_1(\varrho, \lambda)\, \|\xi^1 - \xi^2\| \quad (\|\xi^1\|, \|\xi^2\| \leqslant \varrho \leqslant \bar{\varrho}', \; 0 \leqslant \lambda \leqslant \bar{\varrho}'), \tag{17'}$$

$$L_1(\varrho, \lambda) = o\big((\varrho + \lambda)^{n-1}\big) \quad \text{при} \quad \varrho + \lambda \to 0. \tag{18'}$$

Таким образом, мы свели исходную задачу к задаче о малых вещественных решениях конечномерного уравнения (19), которое назовём *уравнением разветвления*.

4. Если соотношение

$$L^{(i)}_{0 \ldots 0} = 0 \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{20}$$

нарушается хотя бы для одного номера $i \in \{1, \ldots, r\}$, то уравнение (19) не имеет малых решений. В этом случае уравнение (1) также не имеет малых T-периодических решений. Ввиду этого будем предполагать, что соотношение (20) выполнено.

Если матрица

$$\mathscr{L} = \begin{bmatrix} L^{(1)}_{10\ldots0} & \ldots & L^{(1)}_{0\ldots10} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ L^{(r)}_{10\ldots0} & \ldots & L^{(r)}_{0\ldots10} \end{bmatrix}$$

обратима, то уравнение (19) имеет единственное малое решение $\xi(\lambda) = \xi^1 \lambda + \ldots + \xi^n \lambda^n + o(\lambda^n)$. В этом случае исходная задача также имеет единственное решение, и оно представимо в виде

$$x(t, \lambda) = x_1(t) \lambda + \ldots + x_n(t) \lambda^n + \tilde{x}(t, \lambda), \quad \sup_{t \in \boldsymbol{R}^1} \|\tilde{x}(t, \lambda)\| = o(\lambda^n).$$

5. Рассмотрим случай, когда $\mathscr{L}$ — необратимая матрица и без ограничения общности предположим, что все её элементы нули. Для исследования малых решений уравнения разветвления в этом случае применим схему, предложенную в [4]. Она заключается в следующем:

I. Методами теории ветвления (см. [3]) определяются малые вещественные решения укороченного уравнения разветвления

$$P_i(\xi, \lambda) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{21}$$

При этом заметим, что если уравнение (21) невырожденное [2] (это предполагается в дальнейшем), т.е. число его малых решений конечное, то каждое ненулевое малое решение уравнения (21) представляется рядом

$$\tilde{\xi}(\lambda) = \xi^0 \lambda^{k/s} + \xi^1 \lambda^{k_1/s} + \ldots, \tag{22}$$

где $s, k, k_1, \ldots$ — натуральные числа, $k < k_1 < \ldots$ и $\lambda^{1/s}$ — арифметическое значение корня.

(2) Отметим, что в [3] приводится критерий невырожденности общего аналитического уравнения разветвления.

II. С помощью преобразований $\xi=\lambda^{k/s}(\xi^0+\eta)$, $\eta=\lambda^{(k_1-k)/s}(\xi^1+\zeta),\ldots$ исследуется вопрос о том, являются ли частичные суммы рядов (22) асимптотическими приближениями к малым вещественным решениям уравнения (19).

Делается это так. Пусть $\tilde{\xi}(\lambda)$ — малое вещественное решение уравнения (21), представимое в виде (22). Сделаем в (19) подстановку $\xi=(\xi^0+\eta)\lambda^{k/s}$. Получаем:

$$M_i(\eta,\lambda)+\lambda^{-l_i}\Omega_i\big(\lambda^{k/s}(\xi^0+\eta),\lambda\big)=0 \quad (i=1,\ldots,r), \tag{23}$$

где $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_r)$ и $M_i(\eta,\lambda)=\lambda^{-l_i}P_i\big(\lambda^{k/r}(\xi^0+\eta),\lambda\big)$. При этом число l_i выбирается так, чтобы функция $M_i(\eta,\lambda)$ была непрерывна в нуле, $M_i(0,0)=0$ и $M_i(\eta,0)\not\equiv 0$. Число l_i названо порядком многочлена P_i относительно решения $\tilde{\xi}(\lambda)$. Существование чисел l_i $(i=1,\ldots,r)$ следует из невырожденности уравнения (21).

Обозначим, далее, через $\mathfrak{A}$ значение матрицы Якоби $\dfrac{\partial(M_1,\ldots,M_r)}{\partial(\eta_1,\ldots,\eta_r)}$ в точке $\eta=0$, $\lambda=0$. Будем говорить, что $\tilde{\xi}(\lambda)$ имеет простую главную часть, если $\det\mathfrak{A}\neq 0$, и кратную главную часть — в противном случае.

Пусть $\tilde{\xi}(\lambda)$ имеет простую главную часть. Предположим ещё, что выполнены неравенства

$$l_i\leqslant\sigma n \quad (\sigma=\min(k/s,1)),\ i=1,\ldots,r. \tag{24}$$

Тогда по теореме о неявной функции уравнение (23) имеет единственное решение $\eta(\lambda)$, непрерывное в некотором интервале $(0,\lambda')$ и удовлетворяющее условию: $\eta(\lambda)\to 0$ при $\lambda\to+0$. Ввиду этого, решению $\tilde{\xi}(\lambda)$ уравнения (21) отвечает единственное малое вещественное решение $\xi(\lambda)$ уравнения (19) с асимптотикой $\xi(\lambda)=\xi^0\lambda^{k/s}+o(\lambda^{k/s})$.

Для получения асимптотики более высокого порядка сделаем в (23) подстановку $\eta=(\xi^1+\zeta)\lambda^{(k_1-k)/s}$. Тогда, если $l_i+(k_1-k)/s\leqslant\sigma n$ $(i=1,2,\ldots,r)$, то решение $\xi(\lambda)$ представимо в виде $\xi(\lambda)=\xi^0\lambda^{k/s}+\xi^1\lambda^{k_1/s}+o(\lambda^{k_1/s})$. Продолжая указанный процесс, приходим к следующему выводу: Если для каждого $i\in\{1,\ldots,r\}$ выполнено неравенство $l_i+(k_m-k)/s\leqslant\sigma n$, то решение $\xi(\lambda)$ представляется асимптотической формулой $\xi(\lambda)=\xi^0\lambda^{k/s}+\xi^1\lambda^{k_1/s}+\ldots+\xi^m\lambda^{k_m/s}+o(\lambda^{k_m/s})$.

Пусть $\tilde{\xi}(\lambda)$ имеет кратную главную часть. Тогда могут представиться два случая: (а) $\mathfrak{A}=0$; (б) $0<\operatorname{rang}\mathfrak{A}=\nu<r$.

Рассмотрим сначала случай (а). Полагая в (23) $\eta=(\xi^1+\zeta)\lambda^{(k_1-k)/s}$, получаем

$$N_i(\zeta,\lambda)+\lambda^{-(l_i+l_i')}\Omega_i(\xi^0\lambda^{k/s}+\xi^1\lambda^{k_1/s}+\zeta\lambda^{k_1/s},\lambda)=0,$$

где $N_i(\zeta,\lambda)=\lambda^{-l_i'}M_i(\xi^1\lambda^{(k_1-k)/s}+\zeta\lambda^{(k_1-k)/s},\lambda)$ и l_i' — порядок многочлена M_i относительно $\tilde{\eta}(\lambda)=\xi^1\lambda^{(k_1-k)/s}+\ldots$ Если $\tilde{\eta}(\lambda)$ имеет простую главную часть и $l_i+l_i'\leqslant\sigma n$ $(i=1,\ldots,r)$, то также, как и выше, убеждаемся в том, что решению $\tilde{\xi}(\lambda)$ укороченного уравнения отвечает единственное малое вещественное решение $\xi(\lambda)$ уравнения (19) с асимптотикой $\xi(\lambda)=\xi^0\lambda^{k/s}+\xi^1\lambda^{k_1/s}+o(\lambda^{k_1/s})$.

Пусть имеет место случай (б). Представим тогда матрицу $\mathfrak{A}$ в виде

$$\mathfrak{A}=\begin{bmatrix}\mathfrak{A}_{11} & \mathfrak{A}_{12}\\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22}\end{bmatrix},$$

где $\mathfrak{A}_{11}$ — $(\nu\times\nu)$-матрица, а уравнение (23) запишем так:

$$\mathfrak{A}_{11}\bar{\eta}+\mathfrak{A}_{12}\bar{\eta}'+\bar{M}(\bar{\eta},\bar{\eta}',\lambda)+\theta(\bar{\eta},\bar{\eta}',\lambda)=0, \tag{23_1}$$

$$\mathfrak{A}_{21}\bar{\eta}+\mathfrak{A}_{22}\bar{\eta}'+\bar{M}_1(\bar{\eta},\bar{\eta}',\lambda)+\theta_1(\bar{\eta},\bar{\eta}',\lambda)=0. \tag{23_2}$$

Здесь

$$\bar{\eta}=(\eta_1,\ldots,\eta_\nu),\qquad \bar{\eta}'=(\eta_{\nu+1},\ldots,\eta_r),$$

$$\bar{M}(\bar{\eta},\bar{\eta}',\lambda)=\operatorname{colon}\big(M_1(\eta,\lambda),\ldots,M_\nu(\eta,\lambda)\big)-\mathfrak{A}_{11}\bar{\eta}-\mathfrak{A}_{12}\bar{\eta}',$$

$$\bar{M}_1(\bar{\eta},\bar{\eta}',\lambda)=\operatorname{colon}\big(M_{\nu+1}(\eta,\lambda),\ldots,M_r(\eta,\lambda)\big)-\mathfrak{A}_{21}\bar{\eta}-\mathfrak{A}_{22}\bar{\eta}',$$

$$\theta(\bar{\eta},\bar{\eta}',\lambda)=\big(\lambda^{-l_1}\Omega_1(\lambda^{k/s}\xi^0+\lambda^{k/s}\eta,\lambda),\ldots,\lambda^{-l_\nu}\Omega_\nu(\lambda^{k/s}\xi^0+\lambda^{k/s}\eta,\lambda)\big),$$

$$\theta_1(\bar{\eta},\bar{\eta}',\lambda)=\big(\lambda^{-l_{\nu+1}}\Omega_{\nu+1}(\lambda^{k/s}\xi^0+\lambda^{k/s}\eta,\lambda),\ldots,\lambda^{-l_r}\Omega_r(\lambda^{k/s}\xi^0+\lambda^{k/s}\eta,\lambda)\big).$$

Так как $\operatorname{rang}\mathfrak{A}=\nu$, то без ограничения общности можно считать $\det\mathfrak{A}_{11}\neq 0$. Предположим ещё, что выполнены неравенства (24). Тогда, применяя к (23_1) теорему о неявной функции, получаем единственное решение $\bar{\eta}(\bar{\eta}',\lambda)$ этого уравнения: $\bar{\eta}(\bar{\eta}',\lambda)=-\mathfrak{A}_{11}^{-1}\mathfrak{A}_{12}\bar{\eta}'+y(\bar{\eta}',\lambda)$, где $y(\bar{\eta}',\lambda)\to 0$ при $\bar{\eta}'\to 0$ и $\lambda\to+0$, причем $\|y(\bar{\eta}',+0)\|=o(\|\bar{\eta}'\|)$.

Подставляя $\bar{\eta}(\bar{\eta}',\lambda)$ в (23_2), получаем

$$(\mathfrak{A}_{22}-\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{11}^{-1}\mathfrak{A}_{12})\bar{\eta}'+\bar{M}_1'(\bar{\eta}',\lambda)+\theta_1'(\bar{\eta}',\lambda)=0,$$

где $\bar{M}_1'(\bar{\eta}',+0)$ и $\theta_1'(\bar{\eta}',+0)$ не содержат линейных членов, а матрица $\mathfrak{A}_{22}-\mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{11}^{-1}\mathfrak{A}_{12}$ — нулевая. Таким образом, данный случай свёлся к ранее рассмотренному случаю (а).

III. Устанавливается число малых вещественных решений уравнения (19). Для этого используются результаты предыдущих двух этапов исследования и метод сравнения порядков (см. [4]).

Для иллюстрации указанной схемы рассмотрим следующий пример. Пусть уравнение (19) двумерное $(r=2)$, $n=4$ и многочлены P_1 и P_2 имеют соответственно вид:

$$P_1(\xi_1,\xi_2,\lambda)=\xi_1^4-5\xi_2^4+\lambda^2\xi_1+\lambda^2\xi_2,$$

$$P_2(\xi_1,\xi_2,\lambda)=\xi_1^2-2\xi_2^2+\lambda^2+\sum_{k_1+k_2+k=3}^{4}L_{k_1k_2k}^{(2)}\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\lambda^k,$$

где $L_{k_1k_2k}^{(2)}$ — некоторые числа.

I. Исключая из системы (21) неизвестное ξ_1, получаем

(25) $$R(\xi_2, \lambda) \equiv \sum_{i,k} B_{ik}\xi_2^i\lambda^k = 0,$$

где $B_{80}=1$, $B_{52}=-2$, $B_{24}=-1$, $B_{06}=1$, а коэффициенты B_{ik} с мультииндексами (i,k), расположенными ниже отрезков AB и BC ($A = (0,6)$, $B=(2,4)$, $C=(8,0)$) равны нулю.

Применим к уравнению (25) метод диаграммы Ньютона (см. [3]). В силу указанных выше значений для коэффицентов B_{ik}, убывающая часть диаграммы Ньютона для уравнения (25) состоит из двух звеньев BC и AB с наклонами $\frac{2}{3}$ и 1 соответственно. Звену BC отвечают два малых вещественных решения, представимых в виде рядов $\xi_2^{(1)}(\lambda) = \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\,\lambda^{2/3}+\ldots$, $\xi_2^{(2)}(\lambda) = \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\,\lambda^{2/3}+\ldots$, а звену AB — два малых вещественных решения, представимых рядами $\xi_2^{(3)}(\lambda)=\lambda+\ldots$, $\xi_2^{(4)}(\lambda) = -\lambda+\ldots$

Сделаем в P_1 и P_2 подстановку $\xi_2 = \xi_2^{(i)}(\lambda)$ $(i=1,\ldots,4)$ и подсчитаем первый субрезультант $R_1(\xi_2^{(i)}(\lambda),\lambda)$ полученных при этом многочленов. Получаем: $R_1(\xi_2^{(i)}(\lambda),\lambda)=\lambda^2+o(\lambda^2)$ $(i=1,\ldots,4)$. Так как $R_1(\xi_2^{(i)}(\lambda),\lambda)\not\equiv 0$ $(i=1,\ldots,4)$, то каждому решению $\xi_2^{(i)}(\lambda)$ уравнения (25) отвечает единственное малое вещественное решение $\tilde{\xi}^i(\lambda) = (\xi_1^{(i)}(\lambda), \xi_2^{(i)}(\lambda))$ уравнения (21). При этом первые компоненты $\xi_1^{(i)}(\lambda)$ указанных решений определяются из линейных уравнений и представляются рядами $\xi_1^{(1)}(\lambda) = \sqrt{2}\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\,\lambda^{2/3}+\ldots$, $\xi_1^{(2)}(\lambda) = -\sqrt{2}\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\,\lambda^{2/3}+\ldots$, $\xi_1^{(3)}(\lambda) = -\lambda+\ldots$, $\xi_1^{(4)}(\lambda) = \lambda+\ldots$

Таким образом, укороченное уравнение разветвления ((21) имеет четыре малых вещественных решения, и они представимы в виде рядов

(26) $$\tilde{\xi}^i(\lambda) = \xi_0^i\lambda^{2/3}+\ldots \quad \left(\xi_0^1 = \left(\sqrt{2}\sqrt[3]{1+\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\right),\right.$$
$$\left.\xi_0^2 = \left(-\sqrt{2}\sqrt[3]{1-\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{1-\sqrt{2}}\right)\right),\ i=1,2,$$

(27) $$\xi^i(\lambda) = \xi_0^i\lambda+\ldots \quad (\xi_0^3 = (1,-1),\ \xi_0^4 = (-1,1)),\ i=3,4.$$

Мы указали лишь первые коэффициенты рядов (26) и (27). Для определения следующих коэффициентов достаточно применить известный метод неопределённых коэффициентов.

II. С помощью подстановок $\xi = (\xi_0^i+\eta)\lambda^{2/3}(i=1,2)$ и $\xi=(\xi_0^i+\eta)\lambda$ $(i=3,4)$ можно убедиться в том, что каждое решение $\tilde{\xi}^i(\lambda)$ имеет простую главную часть. Кроме того, порядки многочленов P_1 и P_2 относительно указанных решений соответственно равны $l_1^{(1)}=l_1^{(2)}=\frac{8}{3}$, $l_1^{(3)}=l_1^{(4)}=3$, $l_2^{(1)}=l_2^{(2)}=\frac{4}{3}$, $l_2^{(3)}=l_2^{(4)}=2$, так что неравенства (24) выполнены. Ввиду

этого каждому решению (26) отвечает единственное малое вещественное решение уравнения (19) с асимптотикой

(28) $$\xi^i(\lambda) = \xi_0^i\lambda^{2/3}+o(\lambda^{2/3}) \quad (i=1,2),$$

а каждому решению (27) — единственное малое вещественное решение уравнения (19) с асимптотикой

(29) $$\xi^i(\lambda) = \xi_0^i\lambda+o(\lambda) \quad (i=3,4).$$

III. Исследуем вопрос о числе решений уравнения (19).

Пусть $\xi(\lambda) = (\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda))$ — малое вещественное решение этого уравнения, непрерывное на некотором интервале $[0,\bar{\lambda})$. Тогда для каждого $\lambda\in[0,\bar{\lambda})$ справедливы равенства

(30) $$P_i(\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \lambda)+\Omega_i(\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda), \lambda) = 0 \quad (i=1,2).$$

Используя соображения из статьи [5], представим $\xi(\lambda)$ в виде

(31) $$\xi(\lambda) = \alpha(\lambda)\lambda^{2/3}$$

и выясним вопрос об ограниченности вектор-функции $\alpha(\lambda) = (\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda))$ на указанном интервале.

Допустим, что она неограниченная. Тогда существует последовательность $\{\bar{\lambda}_n\}\to+0$, такая, что на $\{\bar{\lambda}_n\}\cap[0,\bar{\lambda})$ вектор-функция $\xi(\lambda)\neq 0$, а равенства (30) принимают вид:

$$\Phi_1(\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda)) \equiv \xi_1^4(\lambda)-5\xi_2^4(\lambda)+o(\|\xi(\lambda)\|^4) = 0,$$
$$\Phi_2(\xi_1(\lambda), \xi_2(\lambda)) \equiv \xi_1^2(\lambda)-2\xi_2^2(\lambda)+o(\|\xi(\lambda)\|^2) = 0.$$

Ввиду этого точка $(0,0)$ не является изолированной особой точкой поля $\Phi(\xi_1,\xi_2) = \{\Phi_1(\xi_1,\xi_2), \Phi_2(\xi_1,\xi_2)\}$. С другой стороны, из условия $B_{80}=1\neq 0$ следует, что поле $\{\xi_1^4-5\xi_2^4, \xi_1^2-2\xi_2^2\}$ невырожденное, так что $(0,0)$ — изолированная особая точка поля Φ. Полученное противоречие и доказывает ограниченность вектор-функции $\alpha(\lambda)$.

Докажем существование предела $\alpha(+0)$. Для этого обозначим через S множество всех предельных значений вектор-функции $\alpha(\lambda)$ при $\lambda\to+0$ и предположим, что вектор $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)\in S$. Тогда существует последовательность $\{\lambda_n\}\to+0$, содержащаяся в $(0,\bar{\lambda})$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(\lambda_n)=\bar{\alpha}$. Полагая в (30) $\lambda=\lambda_n$, $\xi_1 = \alpha_1(\lambda_n)\lambda_n^{2/3}$, $\xi_2=\alpha_2(\lambda_n)\lambda_n^{2/3}$, умножая затем обе части первого равенства на $\lambda_n^{-8/3}$, второго — на $\lambda_n^{-4/3}$ и переходя к пределу при $n\to\infty$ в полученных при этом равенствах, получаем

(32) $$\bar{\alpha}_1^4-5\bar{\alpha}_2^4+\bar{\alpha}_1+\bar{\alpha}_2 = 0, \quad \bar{\alpha}_1^2-2\bar{\alpha}_2^2 = 0.$$

Уравнение (32) имеет три решения: ξ_0^1, ξ_0^2, 0, где ξ_0^1 и ξ_0^2 — первые коэффициенты рядов (26).

Следовательно, мы установили включение $S \subset \{\xi_0^1, \xi_0^2, 0\}$.

С другой стороны, так как вектор-функция $\alpha(\lambda)$ непрерывна и ограничена на интервале $(0, \bar{\lambda})$, то S — непустое связное множество. Поэтому из установленного включения следует, что множество S состоит лишь из одного элемента, т.е. существует предел $\alpha(+0)$. Кроме того, $\alpha(+0) \in \{\xi_0^1, \xi_0^2, 0\}$.

Возможны два случая: $\alpha(+0) \in \{\xi_0^1, \xi_0^2\}$ и $\alpha(+0) = 0$.

Пусть $\alpha(+0) \in \{\xi_0^1, \xi_0^2\}$. Тогда в силу соотношения (31) решение $\xi(\lambda)$ представимо в виде $\xi(\lambda) = \xi_0^i \lambda^{2/3} + o(\lambda^{2/3})$, где $i \in \{1, 2\}$. Учитывая установленную выше единственность решения с главной частью $\xi_0^i \lambda^{2/3}$, приходим к выводу, что решение $\xi(\lambda)$ совпадает на некотором интервале $[0, \lambda')$ с одним из решений (28).

Пусть $\alpha(+0) = 0$. Запишем тогда $\xi(\lambda)$ в виде $\xi(\lambda) = \beta(\lambda)\lambda$. Учитывая, далее, соотношение $\xi(\lambda) = o(\lambda^{2/3})$ и повторяя предыдущие рассуждения, приходим к следующим выводам: вектор-функция $\beta(\lambda)$ ограничена на интервале $(0, \bar{\lambda})$ (это следует из условия $B_{24} \neq 0$) и существует предел $\beta(+0) \in \{\xi_0^3, \xi_0^4\}$, где ξ_0^3 и ξ_0^4 — первые коэффициенты рядов (27). Ввиду этого решение $\xi(\lambda)$ совпадает на некотором интервале $[0, \bar{\lambda}')$ с одним из решений (29).

Итак, в условиях данного примера число малых вещественных решений уравнения (19) равно четырем, и решения представляются асимптотическими формулами (28) и (29).

П. Г. Айзенгендлер, а также П. Г. Айзенгендлер совместно с А. Ф. Алексеевым установили описанным выше методам различные предложения о числе малых вещественных решений уравнения разветвления и об их асимптотическом представлении. Приведем два таких предложения, доказательство которых содержится в [4].

Теорема 3. *Пусть уравнение* (19) *одномерное* ($r = 1$) *и определяющие уравнения*(³), *отвечающие звеньям убывающей части диаграммы Ньютона для соответствующего укороченного уравнения* (21), *не имеют кратных вещественных корней. Пусть, далее,* $P_1(\xi, 0) \not\equiv 0$ *и* $P_1(0, \lambda) \not\equiv 0$. *Тогда число всех малых вещественных решений уравнения* (19) *совпадает с числом* d *всех вещественных корней определяющих уравнений. Если при этом* $d > 0$, *то каждое такое решение представимо формулой* $\xi(\lambda) = y\lambda^{k/s} + o(\lambda^{k/s})$, *где* k/s — *наклон звена диаграммы,* $(k, s) = 1$, y — *вещественный корень определяющего уравнения*(⁴) *этого звена,* $\lambda^{1/s}$ — *арифметическое значение корня.*

(³) Термин „Определяющее уравнение звена диаграммы Ньютона" введен в [3].

(⁴) Все корни определяющего уравнения звена отличны от нуля (см. [3]).

Теорема 4. *Пусть уравнение* (19) *двумерное* ($r = 2$), $n \geqslant 2$, $\operatorname{ord} P_i(\xi_1, \xi_2, 0) = 2$, $L_{200}^{(i)} = 1$ $(i = 1, 2)$ *и* $B_{21}^2 - 4B_{40}B_{02} \neq 0$, *где*

$$B_{40} = (L_{020}^{(2)} - L_{020}^{(1)})^2 + (L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})(L_{020}^{(1)} L_{110}^{(2)} - L_{020}^{(2)} L_{110}^{(1)}) \neq 0,$$

$$B_{02} = (L_{001}^{(2)} - L_{001}^{(1)})^2 > 0,$$

$$B_{21} = 2(L_{001}^{(2)} - L_{001}^{(1)})(L_{020}^{(2)} - L_{020}^{(1)}) + (L_{110}^{(2)} - L_{110}^{(1)})(L_{110}^{(2)} L_{001}^{(1)} - L_{110}^{(1)} L_{001}^{(2)}).$$

Тогда число малых вещественных решений уравнения (19) *совпадает с числом вещественных корней многочлена* $F(z) = B_{40}z^4 + B_{21}z^2 + B_{02}$, *и каждое такое решение представляется асимптотической формулой* $\xi(\lambda) = \xi_0 \lambda^{1/2} + o(\lambda^{1/2})$, *где* $\xi_0 = (\xi_{01}, \xi_{02})$ — *вещественное решение системы*

$$\xi_1^2 + L_{110}^{(i)} \xi_1 \xi_2 + L_{020}^{(i)} \xi_2^2 + L_{001}^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2).$$

6. Пример. Рассмотрим двумерное уравнение с малым параметром $\lambda \geqslant 0$ и 2π-периодической по t правой частью:

$$(1^1) \qquad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 + \lambda[-\tfrac{1}{8}\lambda\cos t + \tfrac{1}{3}x_1^2\cos t + x_1x_2\cos t + Q_1(t, x_1, x_2, \lambda)], \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 + \lambda[\tfrac{1}{8}\lambda\cos t + 2x_1x_2\sin t + Q_2(t, x_1, x_2, \lambda)], \end{aligned}$$

где вектор-функция $Q = (Q_1, Q_2)$ непрерывна и удовлетворяет условиями (2)–(4), в которых $n = 2$.

Для уравнения (1^1) соотношение (9) принимает вид

$$(9^1) \qquad \begin{aligned} x_1(t, \xi, \lambda) &= \xi_1\cos t - \xi_2\sin t + \lambda f_1(t, \xi_1, \xi_2, \lambda) + \lambda\omega_1(t, \xi, \lambda), \\ x_2(t, \xi, \lambda) &= \xi_1\sin t + \xi_2\cos t + \lambda f_2(t, \xi_1, \xi_2, \lambda) + \lambda\omega_2(t, \xi, \lambda). \end{aligned}$$

Здесь $\xi = (\xi_1, \xi_2)$; f_1 и f_2 — многочлены второй степени относительно ξ_1, ξ_2, λ с 2π-периодическими по t коэффициентами, а вектор-функция (ω_1, ω_2) удовлетворяет условиям (2^1)–(4^1).

В условиях данного примера уравнения (10) и (19) совпадают и имеют вид

$$(19^1) \qquad \begin{aligned} \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_2^2 - \frac{1}{2}\lambda + \Omega_1(\xi, \lambda) &= 0, \\ \xi_1^2 + \frac{2}{3}\xi_1\xi_2 - \xi_2^2 + \frac{1}{2}\lambda + \Omega_2(\xi, \lambda) &= 0, \end{aligned}$$

где $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2)$ непрерывна на некотором множестве $\{(\xi, \lambda) : \|\xi\| \leqslant \bar{\varrho}';\ 0 \leqslant \lambda \leqslant \bar{\varrho}'\}$ и удовлетворяет условиям (16^1)–(18^1) при $n = 2$.

Для системы (19^1) выполнены условия теоремы 4, причем многочлен $F(z)$ имеет два вещественных корня. Поэтому на основании указанной теоремы число малых вещественных решений системы (19^1) равно двум, и решения представляются формулами

$$\xi^i(\lambda) = \xi_0^i \lambda^{1/2} + o(\lambda^{1/2}) \quad (i = 1, 2), \tag{33}$$

где

$$\xi_0^1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{2\sqrt{5}}\right), \qquad \xi_0^2 = \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{3}{2\sqrt{5}}\right).$$

Подставляя (33) в (9^1), получаем:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)}(t, \lambda) &= \frac{\lambda^{1/2}}{2\sqrt{5}}(\cos t + 3\sin t) + \tilde{x}_1^{(1)}(t, \lambda), \\ x_2^{(1)}(t, \lambda) &= \frac{\lambda^{1/2}}{2\sqrt{5}}(\sin t - 3\cos t) + \tilde{x}_2^{(1)}(t, \lambda) \end{aligned} \tag{34}$$

и

$$\begin{aligned} x_1^{(2)}(t, \lambda) &= \frac{\lambda^{1/2}}{2\sqrt{5}}(-\cos t - 3\sin t) + \tilde{x}_1^{(2)}(t, \lambda), \\ x_2^{(2)}(t, \lambda) &= \frac{\lambda^{1/2}}{2\sqrt{5}}(-\sin t + 3\cos t) + \tilde{x}_2^{(2)}(t, \lambda), \end{aligned} \tag{35}$$

где $\sup\limits_t |\tilde{x}_i^{(k)}(t, \lambda)| = o(\lambda^{1/2})$, $i = 1, 2$.

Таким образом, число малых 2π-периодических решений уравнения (1^1) равно двум, и решения представляются асимптотическими формулами (34) и (35).

7. Изучим теперь задачу об устойчивости решений и для простоты ограничимся лишь конечномерным случаем.

Рассмотрим вещественное векторное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \left[A + \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\mu^i + B(t, \mu)\right] y + f(t, y, \mu), \tag{36}$$

где A — постоянная $(\nu \times \nu)$-матрица, $\mu \geqslant 0$ — малый параметр, $A_i(t)$ — непрерывные T-периодические матрицы, $B(t, \mu)$ — непрерывная T-периодическая по t матрица, удовлетворяющая равномерно по t оценке $\|B(t, \mu)\| = o(\mu^k)$, f — вектор-функция, непрерывная и ограниченная на некотором множестве $\{(t, y, \mu): t \in [0, \infty), y \in G, 0 \leqslant \mu < \bar{\mu}\}$, где G — окрестность нуля пространства R^ν и $\bar{\mu}$ — некоторая константа. Предполагается ещё, что вектор-функция f удовлетворяет равномерно по t и при каждом фиксированном μ следующей оценке: $\|f(t, y, \mu)\| = o(\|y\|)$ при $\|y\| \to 0$.

Ставится задача об устойчивости нулевого решения уравнения (36) для малых положительных значений параметра μ.

Замечание 1. *Если пространство E конечномерное, функция Q из правой части уравнения* (1) *дифференцируема по x на множестве K и удовлетворяет* (*равномерно по t*) *оценке $\|\partial Q(t, x, \lambda)/\partial x\| = o\big((\|x\| + \lambda)^{n-1}\big)$ при $\|x\| + \lambda \to 0$* [5], *то задача об устойчивости малых T-периодических решений уравнения* (1) *сводится к задаче об устойчивости нулевого решения уравнения* (36).

Действительно, пусть $\tilde{x}(t, \lambda)$ — малое T-периодическое решение уравнения (1), представимое в виде $\tilde{x}(t, \lambda) = \tilde{x}_0(t)\lambda^{r/p} + o(\lambda^{r/p})$. Полагая в (1) $x = \tilde{x} + y$, $\mu = \lambda^{1/p}$, мы придем к уравнению типа (36).

Сформулированная выше задача изучалась при различных предположениях многими авторами. В статье [6] для её решения был предложен метод, связанный с использованием диаграммы Ньютона, оказавшийся эффективным при изучении критического случая (когда спектр матрицы A пересекает мнимую ось). В [7] указанный метод получил дальнейшее развитие и распространен на случай автономных уравнений, а в статье [8] он использовался для исследования устойчивости дифференциально-разностных уравнений.

Вкратце опишем этот метод. Обозначим через $Y(t, \mu)$ фундаментальную матрицу уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \left(A + \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\mu^i + B(t, \mu)\right) y, \tag{37}$$

нормированную в нуле: $Y(0, \mu) = I$, где I — единичная матрица, а через $M(\mu) = Y(T, \mu)$ — матрицу монодромии этого уравнения. Исследуем сначала асимптотическую структуру матрицы $M(\mu)$. Для этого решим задачу

$$\frac{d\tilde{Y}}{dt} = \left(A + \sum_{i=1}^{k} A_i(t)\mu^i\right)\tilde{Y}, \tag{38}$$

$$\tilde{Y}(0) = I. \tag{39}$$

Полагая

$$\tilde{Y}(t, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} Y_i(t)\mu^i \tag{40}$$

и применяя метод неопределённых коэффициентов, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dY_0}{dt} = AY_0, \quad \frac{dY_i}{dt} = AY_i + \sum_{j+s=i} A_j(t)\, Y_s(t) \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{41}$$

---

[5] Данная оценка согласована с условиями (2)–(4).

Решая систему (41) при начальном условии $Y_0(0) = I$, $Y_i(0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, согласованном с (39), получаем единственный набор для коэффициентов ряда (40). Имеем:

(42)
$$Y_0(t) = e^{At}, \quad Y_i(t) = \int\limits_0^t e^{A(t-\tau)} \sum_{r+s=i} A_r(\tau) Y_s(\tau)\, d\tau \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Используя соотношения (42), получим, что матрица $Y(t, \mu)$ представима в виде

$$Y(t, \mu) = e^{At} + \sum_{i=1}^{k} Y_i(t)\mu^i + \overline{Y}(t, \mu), \tag{43}$$

где Y_i определены по формулам (42), а $\overline{Y}(t, \mu)$ — непрерывная по t и μ матрица, удовлетворяющая оценке $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \|\overline{Y}(t, \mu)\| = o(\mu^k)$.

Полагая в (43) $t = T$, получаем следующую асимптотическую формулу для матрицы монодромии $M(\mu)$:

$$M(\mu) = e^{AT} + \sum_{i=1}^{k} M_i \mu^i + \overline{M}(\mu), \tag{44}$$

где $M_i = Y_i(T)$ и $\overline{M}(\mu) = \overline{Y}(T, \mu)$, так что $\|\overline{M}(\mu)\| = o(\mu^k)$.

Рассмотрим теперь собственные значения $\varrho_i(\mu)$ $(i = 1, \ldots, \nu)$ матрицы $M(\mu)$. Мы их будем называть, как это принято, *мультипликаторами* уравнения (37).

В силу соотношения (44) и непрерывности матрицы $M(\mu)$ на некотором интервале $[0, \mu_0)$ следует, что все мультипликаторы $\varrho_i(\mu)$ также непрерывны на $[0, \mu_0)$ и представимы в виде

$$\varrho_i(\mu) = e^{\gamma_i T} + \sigma_i(\mu) \quad (\sigma_i(0) = 0),\ i = 1, \ldots, \nu, \tag{45}$$

где γ_i — собственные значения матрицы A.

Дадим следующее определение. Мультипликатор $\varrho(\mu)$ назовем мультипликатором устойчивого типа (соответственно неустойчивого типа) на интервале $(0, \bar{\mu})$, если в каждой точке этого интервала выполняется неравенство $|\varrho(\mu)| < 1$ (соответственно $|\varrho(\mu)| > 1$).

Сделаем следующее важное

Замечание 2. *Из непрерывности добавок $\sigma(\mu)$ $(\sigma(0) = 0)$ и формул (45) следует, что каждому собственному значению γ матрицы A, для которого $\operatorname{Re}\gamma < 0$ $(\operatorname{Re}\gamma > 0)$, отвечает мультипликатор устойчивого типа (неустойчивого типа) на некотором интервале $(0, \tilde{\mu})$.*

В основу дальнейших исследований положена следующая теорема А. М. Ляпунова, которую применительно к рассматриваемой здесь задаче сформулируем так:

Если все мультипликаторы уравнения (37) суть мультипликаторы устойчивого типа (неустойчивого типа) на некотором интервале $(0, \tilde{\mu})$, то для каждого $\mu \in (0, \tilde{\mu})$ нулевое решение уравнения (36) экспоненциально устойчиво (соответственно неустойчиво) при $t \to +\infty$.

Из теоремы А. М. Ляпунова и замечания 2 следует, что поставленную задачу можно считать решенной для двух случаев: когда спектр матрицы A расположен в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma < 0$, и когда он пересекается с полуплоскостью $\operatorname{Re}\gamma > 0$. В первом случае имеем экспоненциальную устойчивость, во втором — неустойчивость.

Остается ещё рассмотреть случай, когда спектр матрицы A лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\gamma \leqslant 0$ и пересекает мнимую ось. При этом, очевидно, подлежат исследованию лишь те мультипликаторы, которые отвечают нулевым и чисто мнимым собственным значениям матрицы A.

8. Изучим сначала мультипликаторы, отвечающие резонансным собственным значениям матрицы A, т.е. собственным значениям вида $2\pi n\sqrt{-1}/T$, где n — целое число. В силу соотношений (45) каждый такой мультипликатор представим в виде

$$\varrho(\mu) = 1 + \sigma(\mu) \quad (\sigma(0) = 0). \tag{46}$$

Для определения добавок σ рассмотрим уравнение

$$Cz = -\Big[\sum_{i=1}^{k} M_i \mu^i + \overline{M}(\mu)\Big] z + \sigma z, \tag{47}$$

где $C = e^{AT} - I$.

Следуя статье [6], представим (47) в виде системы

$$Dz = -\Big[\overline{M}(\mu) + \sum_{i=1}^{k} M_i \mu^i\Big] z + \sigma z + \sum_{i=1}^{m} \xi_i \tilde{\psi}_i, \tag{48}$$

$$\xi_i = (z, \tilde{\varphi}_i) \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{49}$$

где m — размерность подпространства решений уравнения $Cz = 0$, $\{\tilde{\varphi}_i\}_1^m = \{(a_1^{(i)}, \ldots, a_\nu^{(i)})\}_1^m$ — ортонормированный базис этого подпространства, $\{\tilde{\psi}_i\}_1^m$ — ортонормированный базис подпространства решений уравнения $C^* z = 0$, где C^* — матрица, сопряжённая с C, $D = C + \sum\limits_{i=1}^{m} [\tilde{\psi}_i a_1^{(i)}, \ldots, \tilde{\psi}_i a_\nu^{(i)}]$ (6), (z, φ_i) — скалярное произведение векторов z и $\tilde{\varphi}_i$.

(6) Символ $[e, \ldots, f]$ означает матрицу, столбцами которой являются векторы $e, \ldots, f$.

Так как матрица D обратима (см. [3]) и $D^{-1}\tilde{\psi}_i = \tilde{\varphi}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, то уравнение (48) можно записать так:

$$z = -D^{-1}\Big[\sum_{i=1}^{k} M_i\mu^i + \overline{M}(\mu)\Big] + \sigma D^{-1}z + \sum_{i=1}^{m}\xi_i\tilde{\varphi}_i. \tag{48¹}$$

В силу непрерывности матрицы $\overline{M}(\mu)$ и соотношения $\overline{M}(0) = 0$ каждому набору $(\mu, \sigma, \xi_1, \ldots, \xi_m)$, если $\mu \geqslant 0$ и $|\sigma|$ достаточно малы, отвечает единственное решение этого уравнения:

$$z = \Big(I - D^{-1}\sigma + D^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{k} M_i\mu^i + \overline{M}(\mu)\Big)\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{m}\xi_i\tilde{\varphi}_i. \tag{50}$$

Подставляя (50) в (49), получаем $G(\sigma, \mu)\xi = 0$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ и $G(0, 0)$ — нулевая матрица.

Справедливо следующее утверждение: $1+\sigma(\mu)$ *является мультипликатором уравнения* (37) *тогда и только тогда, когда* $\sigma(\mu)$ — *малое решение уравнения*

$$\Phi(\sigma, \mu) \equiv \det G(\sigma, \mu) = 0. \tag{51}$$

Таким образом, вопрос свелся к определению малых решений уравнения (51).

Отметим, что функция Φ аналитична по σ, $\Phi(0,0) = 0$ и $\operatorname{ord}\Phi(\sigma, 0) = l$, где l — сумма кратностей всех резонансных собственных значений матрицы A. Ввиду этого число малых решений уравнения (51) равно l, при этом каждое решение считается столько раз, какова его кратность.

Уравнение (51) естественно назвать *уравнением разветвления*. Наряду с ним рассмотрим соответствующее ему „усечённое" уравнение разветвления, получаемое при $\overline{M}(\mu) = 0$. Оно представимо в виде

$$\sum_{i\geqslant l} L_{i0}\sigma^i + \mu\sum_{i+j\geqslant m-1} L_{i,j+1}\sigma^i\mu^j = 0, \quad L_{l,0} \neq 0, \tag{52}$$

причем коэффициенты L подсчитываются по удобным формулам (см. [7]). Число малых решений уравнения (52) равно l, решения определяются методом диаграммы Ньютона и представляются рядами по возрастающим рациональным степеням параметра μ:

$$\sigma(\mu) = \tilde{\sigma}\mu^{r/s} + \tilde{\sigma}_1\mu^{r_1/s_1} + \ldots \tag{53}$$

Оказывается, что при определённых ограничениях на k (см. соотношение (36)) и коэффициенты $L_{i,j}$ отрезки рядов (53) являются асимптотическими приближениями к малым решениям уравнения (51). В частности, в силу свойств диаграммы и теоремы Руше справедлива следующая

Лемма 3. *Пусть выполнены условия:* $k \geqslant l - m + 1$ *и по крайней мере один из коэффициентов* $L_{0,m+i}$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ *отличен от нуля. Тогда каждое малое решение* $\sigma(\mu)$ *уравнения разветвления* (51) *представимо в виде*

$$\sigma(\mu) = \tilde{\sigma}\mu^{r/s} + o(\mu^{r/s}), \quad (r, s) = 1, \tag{54}$$

где $\tilde{\sigma}\mu^{r/s}$ — *первый член разложения* (53), *т.е.* r/s — *наклон звена убывающей части диаграммы Ньютона, составленной для „усечённого" уравнения разветвления* (52), $\tilde{\sigma}$ — *корень определяющего уравнения для этого звена,* $\mu^{1/s}$ — *арифметическое значение корня.*

Из (54) и (46) следует, что каждому корню $\tilde{\sigma}$ с $\operatorname{Re}\tilde{\sigma} < 0$ $(\operatorname{Re}\tilde{\sigma} > 0)$ отвечает мультипликатор устойчивого (неустойчивого) типа. В частности, если диаграмма содержит звено с наклоном r/s и $s \geqslant 3$, то по крайней мере один мультипликатор является мультипликатором неустойчивого типа.

Если $\operatorname{Re}\tilde{\sigma} = 0$, то для исследования соответствующих мультипликаторов мы строим асимптотические формулы типа $\sigma(\mu) = \tilde{\sigma}\mu^{r/s} + \tilde{\sigma}_1\mu^{r_1/s_1} + o(\mu^{r_1/s_1})$, в которых выделена сумма первых двух членов ряда (53). Разумеется, для получения таких формул нужны дополнительные ограничения на k и коэффициенты уравнения (52).

Отметим ещё, что в ряде случаев целесообразно сочетать метод диаграммы Ньютона с методом Рауса–Гурвица (см. [7]).

9. Исследование мультипликаторов, отвечающих нерезонансным чисто мнимым собственным значениям матрицы A, проводится так же, как и для резонансных.

Действительно, пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_{l'}$ — совокупность всех(7) таких нерезонансных собственных значений матрицы A, что $e^{\gamma_1 T} = \ldots = e^{\gamma_{l'}T} = \varrho(0)$. Тогда мультипликаторы, отвечающие γ_i, представляются формулами

$$\varrho_i(\mu) = \varrho(0) + \sigma_i(\mu) \quad (\sigma_i(0) = 0) \ (i = 1, \ldots, l'). \tag{46¹}$$

Так же, как и в п. 8, приходим к уравнению разветвления

$$\tilde{\Phi}(\sigma, \mu) = 0 \tag{51¹}$$

и к соответствующему „усечённому" уравнению разветвления

$$\sum_{i\geqslant l'} \tilde{L}_{i0}\sigma^i + \mu\sum_{i+j\geqslant m'-1} \tilde{L}_{i,j+1}\sigma^i\mu^j = 0, \quad \tilde{L}_{l',0} \neq 0, \tag{52¹}$$

где через m' обозначена размерность подпространства решений уравнения $\big(e^{AT} - \varrho(0)I\big)z = 0$. Для получения асимптотических формул для $\sigma_i(\mu)$ используется метод диаграммы Ньютона, применённый к уравнению (52¹).

(7) Кратное собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность.

Имеет место аналог леммы 3:

Лемма 3[1]. *Пусть выполнены условия: $k \geqslant l'-m'+1$ и по крайней мере один из коэффициентов $\tilde{L}_{0,m'+i}$ $(i = 0, \ldots, k-1)$ отличен от нуля. Тогда каждое малое решение $\sigma(\mu)$ уравнения (51^1) представимо в виде*

$$(54^1)\qquad \sigma(\mu) = \tilde{\sigma}_1\mu^{r/s}+o(\mu^{r/s}),$$

где r/s — наклон звена диаграммы, составленной для (52^1), $\tilde{\sigma}_1$ — корень определяющего уравнения для этого звена, $\mu^{1/s}$ — арифметическое значение корня.

Из (54^1) и (46^1) следует, что корням $\tilde{\sigma}_1$, удовлетворяющим условию $\operatorname{Re}[\tilde{\sigma}_1\bar{\varrho}(0)] < 0$ ($\bar{\varrho}(0)$ — число, сопряженное с $\varrho(0)$), отвечают мультипликаторы устойчивого типа, а корням $\tilde{\sigma}_1$, для которых $\operatorname{Re}[\tilde{\sigma}_1\bar{\varrho}(0)] > 0$, — мультипликаторы неустойчивого типа. Если $\operatorname{Re}[\tilde{\sigma}_1\bar{\varrho}(0)] = 0$, то для исследования соответствующих мультипликаторов строятся асимптотические формулы более высокого порядка.

10. Для иллюстрации изложенного метода исследуем устойчивость решений (34) в (35) уравнения (1^1) (см. п. 6).

Для уравнения (1^1) матрица A имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

так что оба её собственные значения резонансные. Кроме того, $m = l = 2$.

Исследуем сначала решение (34). Полагая в (1^1)

$$\mu = \lambda^{1/2}, \quad x_1 = \frac{\mu}{2\sqrt{5}}(\cos t+3\sin t)+\tilde{x}_1^{(1)}(t, \mu^2)+y_1,$$

$$x_2 = \frac{\mu}{2\sqrt{5}}(\sin t-3\cos t)+\tilde{x}_2^{(1)}(t, \mu^2)+y_2,$$

получаем

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_2+\frac{\mu^3}{2\sqrt{5}}\left\{\left(-\frac{7}{3}\cos^2 t+3\sin t\cos t\right)y_1+(\cos^2 t+3\sin t\cos t)y_2+\right.$$

$$\left.+b_{11}(t, \mu)y_1+b_{12}(t, \mu)y_2\right\}+o(\|y\|),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_1+\frac{\mu^3}{\sqrt{5}}\{(\sin^2 t-3\sin t\cos t)y_1+(\sin t\cos t+3\sin^2 t)y_2+$$

$$+b_{21}(t, \mu)y_1+b_{22}(t, \mu)y_2\}+o(\|y\|),$$

где $\sup\limits_t |b_{is}(t, \mu)| = o(1)$ при $\mu\to 0$ $(i, s = 1, 2)$.

Матрица монодромии для соответствующего линейного уравнения представима в виде

$$(44^1)\qquad M(\mu) = I+\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{12} \end{bmatrix}\nu+o(\nu), \quad \nu = \mu^3,$$

а „усечённое" уравнение разветвления имеет следующий вид

$$(55)\qquad \sigma^2-\frac{17\pi}{6\sqrt{5}}\sigma\nu+\frac{\pi^2}{3}\nu^2+r(\nu, \sigma) = 0,$$

где $\operatorname{ord} r(\nu, \sigma) \geqslant 3$.

Из (44^1) и (55) следует, что $k = 1$ и $L_{02} \neq 0$, так что оба условия леммы 3 выполнены. Убывающая часть диаграммы Ньютона для (55) состоит из одного звена и корнями определяющего уравнения звена являются положительные числа $(17\pi \pm \pi\sqrt{274}/3\sqrt{5})$. Ввиду этого решение (34) неустойчиво для малых $\lambda > 0$.

Аналогично, для решения (35) матрица монодромии и „усечённое" уравнение разветвления принимают соответственно вид

$$M(\mu) = I-\frac{2\pi}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & \frac{5}{12} \end{bmatrix}\nu+o(\nu), \quad \nu = \mu^3,$$

и

$$(56)\qquad \sigma^2+\frac{17\pi}{6\sqrt{5}}\sigma\nu+\frac{\pi^2}{3}\nu^2+\tilde{r}(\nu, \sigma) = 0, \quad \operatorname{ord}\tilde{r}(\nu, \sigma) \geqslant 3.$$

Оба условия леммы 3 выполнены. Убывающая часть диаграммы для уравнения (56) состоит из одного звена и оба корня определяющего уравнения суть отрицательные числа: $-\frac{17\pi}{3\sqrt{5}}+\frac{\pi\sqrt{274}}{3\sqrt{5}}$ и $-\frac{17\pi}{3\sqrt{5}}-\frac{\pi\sqrt{274}}{3\sqrt{5}}$. Следовательно, решение (35) экспоненциально устойчиво для малых $\lambda > 0$.

Цитированная литература

[1] П. Г. Айзенгендлер, М. М. Вайнберг, *О периодических решениях неавтономных систем*, Доклады АН СССР 165. 2 (1965), стр. 255–257.

[2] П. Г. Айзенгендлер, М. М. Вайнберг, *О ветвлении периодических решений автономных систем и дифференциальных уравнений в банаховых пространствах*, Доклады АН СССР 176. 1 (1967), стр. 9–12.

[3] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Москва 1969.

[4] П. Г. Айзенгендлер, *К теории ветвления решений нелинейных уравнений с неаналитическими операторами*, Функциональный анализ (Межвузовский сборник), вып. I, Ульяновск, 1973, стр. 183–194.

[5] L. M. Graves, *Remarks on singular points of functional equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1955), стр. 150–157.
[6] П. Г. Айзенгендлер, *Применение диаграммы Ньютона к задаче об устойчивости периодических решений*, Доклады АН СССР 179.5 (1968), стр. 1015–1018.
[7] П. Г. Айзенгендлер, М. И. Рожанский, *К задаче об устойчивости периодических решений квазилинейных систем*, Учёные записки Ленинградского Гос. педагог. инст. им. А. И. Герцена 501 (1971), стр. 21–47.
[8] П. Г. Айзенгендлер. А. Ф. Алексеев, *Об устойчивости нулевого решения квазилинейных дифференциально-разностных уравнений с периодическими коэффициентами*, Доклады АН СССР 215.3 (1974) стр. 505–508.

Received October 1975 (1074)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXIII. (1978)

Kommutative Banachalgebren und hermitesch-äquivalente Elemente

von

HORST EHMKE (Darmstadt)

Abstract. We study the set H_∞ of Hermitian-equivalent elements in a commutative Banach algebra with unit and give a generalization of the well-known Vidav–Palmer theorem.

1. Hermitesch-äquivalente Elemente. Der Begriff „hermitesch-äquivalent" findet sich in der grundlegenden Arbeit von G. Lumer [3]. Zum Verständnis der Arbeit werden nur einige elementare Kenntnisse über hermitesche Elemente vorausgesetzt. Hierzu sei auf Bonsall–Duncan [1] verwiesen. A bezeichnet eine komplexe Banachalgebra mit 1, X einen komplexen Banachraum, $B(X)$ die Banachalgebra aller beschränkten linearen Operatoren auf X, $\sigma(a)$ das Spektrum von $a \in A$, $\|a\|_\sigma$ seine Spektralnorm. G: $A \to C\big(M(A)\big)$ ist die Gelfand-Transformation.

Definition 1.1.

$$s(a) = \sup\{\|\exp(i\xi a)\|:\ \xi \in \boldsymbol{R}\},\qquad a \in A.$$

$$H_n = \{a \in A:\ s(a) \leqslant n\},\qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

$$H_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n = \{a \in A:\ s(a) < \infty\}.$$

Die Elemente von H_∞ heißen *hermitesch-äquivalent*, die von H_1 *hermitesch* (vgl. [1], S. 55).

Beispiel 1.2. Ist P: $X \to X$ eine stetige Projektion eines komplexen Banachraumes X, so gilt wegen $P^2 = P$:

$$\exp(i\xi P) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi P)^n}{n!} = I - P + P\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\xi)^n}{n!} = I + (e^{i\xi} - 1)P$$

und somit $2\|P\| - 1 \leqslant s(P) \leqslant 2\|P\| + 1$. Für $\|P\| > 1$ gilt daher $P \in H_\infty \setminus H_1$.

Proposition 1.3.

(a) $\lambda H_n \subset H_n$, $\lambda H_\infty \subset H_\infty$ *für* $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $n \in \boldsymbol{N}$.

(b) H_n, $n \in \boldsymbol{N}$, *ist abgeschlossen.*