Bemerkungen. (a) Wie man dem Beweis von Satz 2 entnimmt, genügt es, sämtliche Voraussetzungen nur lokal um $\partial^* P$ zu fordern.

(b) Ebenso gilt, daß die Voraussetzung, daß das analytische Polyeder durch zwei Funktionen gegeben ist, vollkommen unwichtig ist. Solch ein Satz gilt also in analoger Form für jedes analytische Polyedergebiet im $\boldsymbol{C}^2$.

(c) Einen analogen Satz erhält man durch Induktion auch in beliebiger Dimension, wenn das Teilgebiet G durch "polynomiales Eindrücken" nur der $(2n-1)$-dimensionalen offenen Berandungsflächen $\{z \in P\colon |f_i(z)| = 1$ und $|f_j(z)| < 1$ für alle $j \neq i\}$ entsteht.

(d) Es gelten wieder die entsprechenden Aussagen zu den Folgerungen von (2), ebenso die Bemerkung von (1) bezüglich der Łojasiewicz-Ungleichung.

4. Die hier behandelte Frage ist ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Problems:

Sei G ein Gebiet im $\boldsymbol{C}^n$ mit Holomorphiehülle $H(G) \subset \boldsymbol{C}^n$. Unter welchen Voraussetzungen gilt dann, daß die Restruktionsabbildung ${}_N\mathcal{O}(H(G)) \to {}_N\mathcal{O}(G)$ $(N \in \boldsymbol{R}_{>0})$ surjektiv ist. Daß diese Abbildung i.A. nicht surjektiv ist, wurde an einem Beispiel in [4] gezeigt. Für schöne geometrische Gebiete, z.B. sternförmige Gebiete, dagegen ist diese Frage in [4] positiv beantwortet.

Literatur

[1] K. Hoffman, *Minimal boundaries for analytic polyedra*, Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo 9 (1960), pp. 147–160.

[2] — und K. Rossi, *The minimum boundary for an analytic polyedron*, Pacific J. Math. 12 (1962), pp. 1347–1353.

[3] R. Narasimhan, *Cohomology with bounds on complex spaces. Several complex variables I*, Maryland 1970, pp. 141–150.

[4] P. Pflug, *Eigenschaften der Fortsetzungen von in speziellen Gebieten holomorphen polynomialen Funktionen in die Holomorphiehülle*, Göttingen 1972.

[5] — *Glatte Holomorphiegebiete mit innerer plurisubharmonischer Randfunktion sind Banach–Stein*, Arkiv. för Mat. 14.

[6] Y. T. Siu, *Holomorphic un ctions of polynomial growth*, Duke Math. J. 37 (1970), pp. 77–84.

FACHBEREICH MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
BRD 6750 KAISERSLAUTERN
Pfaffenbergstr. 95

Received January 13, 1976 (1112)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXII. (1978)

L^p-Struktur in Banachräumen II

von

EHRHARD BEHRENDS (Berlin)

Abstract. Let X be a real Banach space, $1 \leqslant p < \infty$. A linear continuous projection $E\colon X \to X$ is called L^p-projection, if $\|x\|^p = \|Ex\|^p + \|x - Ex\|^p$ for $x \in X$. We consider complete Boolean algebras B_p of L^p-projections (e.g. if $p \neq 2$, the set of all L^p-projections on X), in particular, the properties of the operators in the Banach algebra generated by B_p, $C_p(B_p)$. After summarizing the results which are consequences of theorems of Bade and Cohen–Sullivan we study the spectral properties of operators in $C_p(B_p)$. It is shown that they behave like normal operators on Hilbert spaces (though in this case the scalars are real). As an application we prove some results concerning the existence of certain projections, general properties of operators in $C_p(B_p)$, and theorems describing the structure of the bi-commutator of subsets of $C_p(B_p)$. As an example we mention the following result which for $p = 2$ includes a classical theorem of Riesz and von Neumann: If $T \in C_p(B_p)$, X is a separable Banach space, then every operator in the bi-commutator of T is a bounded Borel function of T.

Die vorliegende Arbeit setzt die Untersuchungen über L^p-Struktur in Banachräumen fort. In [3] wurde u.a. gezeigt, daß für $p \neq 2$ je zwei L^p-Projektionen kommutieren (eine Projektion $E\colon X \to X$ heißt *L^p-Projektion*, falls $\|x\|^p = \|Ex\|^p + \|x - Ex\|^p$ für alle $x \in X$; dabei ist X ein reeller Banachraum und $1 \leqslant p < \infty$). Hier sollen zunächst in Kapitel 1 einige unmittelbare Folgerungen gezogen werden, die sich mit Hilfe der Resultate in [2], [4] und [7] leicht direkt ergeben. Gleichzeitig sollen einige für die Arbeit wichtige Vorbereitungen und Begriffsbildungen bereitgestellt werden. Eigentlicher Inhalt der Arbeit ist die Untersuchung der in der von den L^p-Projektionen erzeugten Banachalgebra liegenden Operatoren (sog. Cunningham-p-Operatoren). Insbesondere wird eine Spektraltheorie dieser Operatoren entwickelt. Es zeigt sich, daß Cunningham-p-Operatoren Spektraloperatoren vom skalaren Typ im Sinne der Dunfordschen Theorie sind (vgl. Band III von [5]). Allerdings sind die Ergebnisse und Beweismethoden dieser Theorie im allgemeinen nicht übertragbar, da dort an wesentlichen Stellen ausgenutzt wird, daß die Skalare komplex sind.

Als Anwendung werden zwei Ergebnisse von Evans bewiesen, die in [6] mit anderen Methoden erzielt wurden. Diese Resultate dienen dann dazu, weitere Ergebnisse über Cunningham-p-Operatoren herzuleiten.

Insbesondere wird der Bikommutator der Gesamtheit aller Cunningham-p-Operatoren bzw. eines einzelnen Cunningham-p-Operatores näher untersucht.

Die wesentliche Eigenschaft der Gesamtheit aller L^p-Projektionen besteht darin, daß sie — im Falle $p \neq 2$ — eine vollständige Boolesche Algebra von Projektionen bildet. Da in allen Sätzen nur von dieser Eigenschaft Gebrauch gemacht wird, werden wir allgemein von vollständigen Booleschen Algebren von L^p-Projektionen ausgehen. Dadurch wird der Fall $p = 2$ nicht ausgeschlossen, obwohl die Resultate dann natürlich nicht auf die Gesamtheit aller L^2-Projektionen angewendet werden können.

1. Vorbereitungen. Im folgenden sei X ein reeller Banachraum ($X \neq 0$) und $1 \leqslant p < \infty$. Unter einer Projektion auf X verstehen wir eine lineare stetige Abbildung $E\colon X \to X$ mit $E^2 = E$. Insbesondere sind L^p-Projektionen E (Definition s. Einleitung) stetig mit $\|E\| \leqslant 1$. Bilder von L^p-Projektionen heißen *L^p-Summanden*, L^p-Projektionen und L^p-Summanden entsprechen sich eineindeutig ([3], 2.1). Wir übernehmen bzgl. der L^p-Summanden die Bezeichnungsweise aus [3]. Insbesondere wird der zum L^p-Summanden J gehörige komplementäre L^p-Summand mit $J^\perp$ bezeichnet. Ist $J = \text{Bild}\, E$, so gilt $J^\perp = \text{Bild}\, Id - E$, so daß wir für $Id - E$ auch $E^\perp$ schreiben werden.

Unter einer Booleschen Algebra B_p von L^p-Projektionen verstehen wir eine Menge von kommutierenden L^p-Projektionen (die Vertauschbarkeit ist nach [3] im Falle $p \neq 2$ stets sichergestellt), die 0 und Id enthält und mit E, F auch die Operatoren EF, $E+F-EF$ und $Id-E$. Aus der Kommutativität folgt leicht, daß EF und $E+F-EF$ wieder L^p-Projektionen sind; s. [4] (man beachte, daß L^p-Projektionen spezielle Beispiele für $\mathscr{F}$-Projektionen sind). Insbesondere ist die Gesamtheit aller L^p-Projektionen im Falle $p \neq 2$ eine Boolesche Algebra; wir bezeichnen sie mit $B_p(X)$. B_p heißt *vollständig* (bzw. *σ-vollständig*), wenn für jedes wachsende oder fallende Netz $(E_i)_{i\in I}$ (jede wachsende oder fallende Folge $(E_n)_{n\in N}$ in B_p) ein $E \in B_p$ existiert, so daß $E_i \to E$ ($E_n \to E$) in der starken Operatortopologie. In diesem Sinne vollständige Boolesche Algebren sind auch als abstrakte Boolesche Algebren vollständig, doch werden wir Vollständigkeit stets nur in dem stärkeren Sinn gebrauchen. $B_p(X)$ ist, wieder als Folgerung aus den Ergebnissen von [4], eine vollständige Boolesche Algebra von L^p-Projektionen im Falle $p \neq 2$.

Es folgt weiter, daß Summen und Schnitte von Bildern kommutierender L^p-Projektionen wieder L^p-Summanden sind (wegen $\text{Bild}\, EF = \text{Bild}\, E \cap \text{Bild}\, F$, $\text{Bild}\, E+F-EF = \text{Bild}\, E + \text{Bild}\, F$), und für jede kommutierende Familie $(E_i)_{i\in I}$ sind (mit $J_i := \text{Bild}\, E_i$) $\bigcap_{i\in I} J_i$ und $(\mathscr{L}\bigcup_{i\in I} J_i)^-$ ebenfalls L^p-Summanden (das ist für endliche Familien klar, so daß die J_i o.B.d.A. als aufwärts bzw. abwärts filtrierend angenommen werden können. Dann

ist aber $\bigcap_{i\in I} J_i = \text{Bild}\inf\{E_i \mid i \in I\}$ und $(\mathscr{L}\bigcup_{i\in I} J_i)^- = (\bigcup_{i\in I} J_i)^- = \text{Bild}\sup\{E_i \mid i \in I\}$). Aus $(\inf E_i)^\perp = \sup E_i^\perp$ folgt noch $X = \bigcap_{i\in I} J_i \oplus_p (\mathscr{L}\bigcup_{i\in I} J_i)^-$.

Damit ist insbesondere bewiesen, daß vollständige Boolesche Algebren von L^p-Projektionen auch vollständig im Sinne von [2], 2.1, sind, so daß im folgenden alle Ergebnisse aus [2] übernommen werden können. Sei im folgenden B_p eine feste vollständige Boolesche Algebra von L^p-Projektionen auf X. Für die elementaren Eigenschaften derartiger Boolescher Algebren von Projektionen verweisen wir auf die einführenden Kapitel in [2]. Wir bemerken nur, daß sich B_p durch $E \leqslant F \Leftrightarrow EF = E$ ordnen läßt, und daß in dieser Ordnung $EF = E \wedge F$ und $E+F-EF = E \vee F$. E und F sollen disjunkt heißen, wenn $EF = 0$. Wir werden häufig von der Tatsache Gebrauch machen, daß für paarweise disjunkte $E_1, \ldots, E_n$ und $x \in X$ die Ungleichung $\sum_{i=1}^{n} \|E_i x\|^p \leqslant \|x\|^p$ gilt.

Nach dem Satz von Stone gibt es zu B_p einen kompakten extrem unzusammenhängenden Raum $\Omega(B_p)$, so daß B_p isomorph zur Booleschen Algebra der offen-abgeschlossenen Teilmengen von $\Omega(B_p)$ ist. Für $E \in B_p$ sei A_E die entsprechende offen-abgeschlossene Menge, und für offen-abgeschlossenes A in $\Omega(B_p)$ sei E_A die zugehörige Projektion in B_p. Wir erinnern daran, daß jede Borelsche Menge $C \subset \Omega(B_p)$ eindeutig dargestellt werden kann als $C = A^C \Delta K^C$ (Δ = symmetrische Differenz), wo A^C offen-abgeschlossen und K^C von erster Kategorie. Für den Übergang von C zu A^C gelten die folgenden leicht zu verifizierenden Rechenregeln:

(i) $A^{\Omega(B_p)} = \Omega(B_p)$, $A^{\emptyset} = \emptyset$;

(ii) $A^{C_1 \cup C_2} = A^{C_1} \cup A^{C_2}$;

(iii) $A^{\Omega(B_p) \setminus C} = \Omega(B_p) \setminus A^C$;

(iv) $A^{\bigcup C_n} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A^{C_n}\right)^- = \sup\{A^{C_n} \mid n \in \mathbf{N}\}$;

(v) $C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow A^{C_1} \cap A^{C_2} = \emptyset$.

Folglich induziert jede Abbildung $m\colon B_p \to Y$ (Y ein $\mathbf{R}$-Banachraum) mit $m(E+F) = m(E) + m(F)$, $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim m(E_n)$ (E, F disjunkt in B_p, $E_1, \ldots$ Folge in B_p) durch $m(C) := m(E_{A^C})$ ein σ-additives Y-wertiges Maß auf den Borelschen Teilmengen von $\Omega(B_p)$.

Sei $\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ (χ_A = charakteristische Funktion der Menge A) eine stetige Treppenfunktion auf $\Omega(B_p)$ mit o.B.d.A. disjunkten A_i, A_i offen-abgeschlossen und nicht leer. Wir definieren $\varphi(\sum a_i \chi_{A_i}) := \sum a_i E_{A_i} \in [X]$. Da die A_i und damit die E_{A_i} disjunkt sind, folgt leicht $\|\sum a_i E_{A_i}\| = \max |a_i|$, d. h. φ ist eine Isometrie auf der Menge aller stetigen Treppen-Funktionen auf $\Omega(B_p)$, die sich (da $\Omega(B_p)$ extrem unzusammenhängend ist) zu einer Isometrie von $\mathscr{C}(\Omega(B_p))$ nach $[X]$ fortsetzen läßt. Die Fortsetzung werde ebenfalls mit φ bezeichnet. Unter $C_p(B_p)$ verstehen wir die von B_p in $[X]$ erzeugte Banachalgebra. Offensichtlich ist $C_p(B_p) = \text{Bild}\,\varphi$, und φ vermittelt einen isometrischen Algebrenisomorphismus zwischen $\mathscr{C}(\Omega(B_p))$ und $C_p(B_p)$. Im Falle $p \neq 2$ und $B_p = B_p(X)$ heißt $C_p(B_p)$ die *Cunningham-p-Algebra* (in Analogie zu der im Falle $p = 1$ von [1] vorgeschlagenen Bezeichnungsweise), und die Operatoren in $C_p(B_p)$ werden *Cunningham-p-Operatoren* genannt.

Für $f \in \mathscr{C}(\Omega(B_p))$ und $T \in C_p(B_p)$ vereinbaren wir noch die Bezeichnungsweise $\hat{T} := \varphi^{-1}(T), \tilde{f} := \varphi(f)$.

Aus den Untersuchungen von [2] folgen sofort zahlreiche Eigenschaften von $C_p(B_p)$. Wir bemerken hier nur, daß $C_p(B_p)$ in der schwachen (und damit in der starken) Operatortopologie abgeschlossen ist ([2], 4.5) und die $T \in C_p(B_p)$ genau diejenigen Operatoren in $[X]$ sind, die alle von B_p invariant gelassenen abgeschlossenen Unterräume von X ebenfalls invariant lassen. Wir weisen darauf hin, daß für diese Folgerungen die Vollständigkeit von B_p wesentlich ist, σ-Vollständigkeit also nicht hinreichend ist (auch für σ-vollständige B_p werden wir mit $C_p(B_p)$ die von B_p erzeugte Banachalgebra bezeichnen).

Die folgende Definition ist fundamental für die Untersuchung der Operatoren in $C_p(B_p)$. Durch sie können globale Aussagen lokal untersucht werden. Sei wieder B_p vollständige Boolesche Algebra von L^p-Projektionen und $x \in X$. Unter $S(x; B_p)$ verstehen wir den von $\{Ex \mid E \in B_p\}$ erzeugten linearen abschlossenen Unterraum. $S(x; B_p)$ heißt der von x erzeugte *B_p-Zykel*. Es ist klar, daß alle $S(x; B_p)$ unter allen $E \in B_p$ invariant ist. Es ist weiter leicht einzusehen, daß ein abgeschlossener Unterraum Y genau dann unter allen $E \in B_p$ invariant ist, wenn $S(x; B_p) \subset Y$ für alle $x \in Y$. Aus der vorstehenden Charakterisierung der Operatoren in $C_p(B_p)$ folgt damit: $T \in C_p(B_p)$ d.u.n.d., wenn für alle $x \in X$ $T(S(x; B_p)) \subset S(x; B_p)$.

2. Spektraltheorie für Cunningham-p-Operatoren.

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, daß sich für die Operatoren in $C_p(B_p)$ eine Spektraltheorie entwickeln läßt, die derjenigen von normalen Operatoren in Hilberträumen entspricht, es sich also insbesondere um Spektraloperatoren vom skalaren Typ im Sinne der Dunfordschen Theorie handelt. Die Konstruktionen des Spektralmaßes entspricht dem Hilbertraumfall, wobei zu beachten ist, daß in der Hilbertraumtheorie stets von komplexen Räumen ausgegangen wird, während hier alle Räume reell sind.

Mit Hilfe der Spektraltheorie werden einige lokale und globale Folgerungen für die L^p-Struktur erzielt.

2.A. B_p-wertige Maße. Sei (S, Σ) ein Meßraum, d. h. Σ eine σ-Algebra auf der Menge S. Unter einem B_p-wertigen Maß auf (S, Σ) verstehen wir eine Abbildung $\varrho\colon \Sigma \to B_p$ mit den folgenden Eigenschaften:

1. $\varrho(\emptyset) = 0$, $\varrho(S) = Id$;
2. $\varrho(A \cup B) = \varrho(A) + \varrho(B)$ für disjunkte $A, B \in \Sigma$ (dann sind auch $\varrho(A)$ und $\varrho(B)$ disjunkt; insbesondere gilt $\varrho(S \setminus A) = Id - \varrho(A) = \varrho(A)^{\perp}$).

ϱ heißt *σ-additiv*, wenn für disjunkte $A_1, A_2, \ldots$ in Σ stets $\varrho\left(\bigcup_{n\in 1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n\in\boldsymbol{N}} \varrho(A_n)$ gilt. Dabei ist $\sum_{n\in\boldsymbol{N}} \varrho(A_n)$ $(= \sup_{n\in\boldsymbol{N}} \varrho(A_n))$ in der starken Operatortopologie zu verstehen. Nach einem Theorem von Pettis ([5], IV.10.2) ist ϱ genau dann σ-additiv, wenn es schwach σ-additiv ist, wenn also für jedes $x \in X$ und jedes $x' \in X'$ die Abbildung $A \mapsto x'(\varrho(A)x)$ σ-additiv ist. Wir werden im folgenden stets von einem σ-additiven ϱ ausgehen.

Sei $f\colon S \to \boldsymbol{R}$ Linearkombination von charakteristischen Funktionen meßbarer Mengen, d. h. $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ mit o.B.d.A. paarweise disjunkten A_i $(\in \Sigma)$. Wir bezeichnen mit $\int f(s)\,\varrho(ds)$ den Operator $\sum_{i=1}^{n} a_i \varrho(A_i)$ $(\in C_p(B_p))$. Es ist leicht einzusehen, daß diese Definition unabhängig von der speziellen Darstellung von f ist und eine lineare Abbildung auf der Menge $\mathrm{Tr}(S, \Sigma)$ aller reellwertigen meßbaren Treppenfunktionen definiert.

A1 Lemma. *Sei $\mathrm{Tr}(S, \Sigma)$ versehen mit der Maximumsnorm. Dann ist $\int\colon \mathrm{Tr}(S, \Sigma) \to C_p(B_p)$ eine lineare stetige Abbildung mit Norm $\leqslant 1$.*

Beweis. Sei $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i} \in \mathrm{Tr}(S, \Sigma)$ mit o.B.d.A. disjunkten nichtleeren A_i, d. h. $\|f\| = \sup_{i=1,\ldots,n} |a_i|$. Mit den A_i sind auch die $E_i := \varrho(A_i)$ disjunkt. Es folgt für beliebiges $x \in X$:

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i E_i x\Big\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \|E_i x\|^p\Big)^{1/p} \leqslant \|f\| \Big(\sum_{i=1}^{n} \|E_i x\|^p\Big)^{1/p} \leqslant \|f\|\,\|x\|.$$

Damiti st $\big\|\sum_{i=1}^{n} a_i E_i\big\| \leqslant \|f\|$, d. h. $\int$ ist stetig mit $\|\int\| \leqslant 1$. Wegen $\int \mathbf{1}(s)\,\varrho(ds) = Id$ gilt sogar $\|\int\| = 1$; beachte $X \neq 0$.

Wir bemerken noch, daß wegen $\|E_i\| = 1$ für $E_i \neq 0$ die Norm von $\int f(s)\varrho(ds)$ den Wert $\max\{|a_i| \mid i \in \{1, \ldots, n\}, \varrho(A_i) \neq 0\}$ hat. Damit ist $\int$ linear und stetig fortsetzbar auf den Raum $M_b(S, \Sigma)$ aller reelwertigen beschränkten meßbaren Funktionen auf S (Supremumsnorm). Für $f \in M_b(S, \Sigma)$ bezeichnen wir das Bild dieser Abbildung wieder mit $\int f(s)\,\varrho(ds)$.

Durch ϱ werden weitere vektor- bzw. skalarwertige Maße induziert, und zwar definieren wir für $x \in X$, $x' \in X'$:

$$\varrho_x\colon \Sigma \to X, \quad \varrho_x(A) := (\varrho(A))(x),$$

$$\varrho_x^p\colon \Sigma\to\boldsymbol{R},\qquad \varrho_x^p(A):=\|(\varrho(A))(x)\|^p,$$
$$\varrho_{x,x'}\colon \Sigma\to\boldsymbol{R},\qquad \varrho_{x,x'}(A):=x'(\varrho(A)x).$$

Die σ-Additivität von ϱ in der starken Operatortopologie hat unmittelbar zur Folge, daß die ϱ_x, ϱ_x^p, $\varrho_{x,x'}$ σ-additive Maße auf (S,Σ) sind, die — wie im projektionswertigen Fall — zur Definition von Integralen über Funktionen aus $M_b(S,\Sigma)$ Anlaß geben. Wir fassen einige der Eigenschaften dieser Integrale ohne Beweis im folgenden Satz zusammen.

A2 Satz.

(i) *Für $f\in M_b(S,\Sigma)$ ist $\int f(s)\varrho(ds)\in C_p(B_p)$. $\int\colon M_b(S,\Sigma)\to C_p(B_p)$ ist ein Algebrenhomomorphismus mit $\|\int\|=1$.*

(ii) *Für $f\in M_b(S,\Sigma)$ und $x\in X$, $x'\in X'$ ist*

$$\Big(\int f(s)\varrho(ds)\Big)(x)=\int f(s)\varrho_x(ds),$$
$$x'\Big(\int f(s)\varrho(ds)\Big)(x)=\int f(s)\varrho_{x,x'}(ds).$$

Insbesondere ist $\int f(s)\varrho_x(ds)\in S(x;B_p)$.

(iii) *Für $f\in M_b(S,\Sigma)$ und $x\in X$ gilt*

$$\Big\|\int f(s)\varrho_x(ds)\Big\|^p=\int|f(s)|^p\varrho_x^p(ds).$$

Der Hauptgrund für die Betrachtung der vor Satz A2 eingeführten Maße ϱ_x besteht darin, daß sich mit Hilfe der Theorie vektorwertiger Maße ([5], Kapitel III und IV) in Verbindung mit A2 (ii) Folgerungen für projektionswertige Maße ziehen lassen. Insbesondere sind bei festem x alle Funktionen in $M_b(S,\Sigma)$ integrierbar bzgl. ϱ_x im Sinne von [5], IV.10.7, so daß wir als Folgerung aus IV.10.10 in [5] ein dominated-convergence-Theorem für B_p-vertige Maße erhalten:

A3 Satz. *Sei $\varrho\colon\Sigma\to B_p$ ein σ-additives B_p-wertiges Maß. Ist dann $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ eine beschränkte Folge in $M_b(S,\Sigma)$, die punktweise ϱ-fast überall gegen eine Funktion $f\in M_b(S,\Sigma)$ konvergiert, so konvergieren die Operatoren $\int f_n(s)\varrho(ds)$ gegen $\int f(s)\varrho(ds)$ in der starken Operatortopologie.*

2.B. Integration beschränkter Borelfunktionen auf $\Omega(B_p)$. Mit den Methoden aus Abschnitt A soll hier der Isomorphismus $C_p(B_p)\cong\mathscr{C}(\Omega(B_p))$ als Integral über ein B_p-wertiges Maß dargestellt werden. Um die Schreibweise zu vereinfachen, bezeichne Ω im folgenden stets den Raum $\Omega(B_p)$ und $M_b(\Omega)$ den Raum aller beschränkten reellwertigen borelmeßbaren Funktionen auf Ω.

Sei $C\subset\Omega$ eine Borelmenge, d.h. $C=A^C\Delta K^C$, wo A^C offen-abgeschlossen und K^C von erster Kategorie. Durch $\varrho(C):=E_{A^C}$ wird dann eine Abbildung ϱ von der σ-Algebra der Borelmengen von Ω in B_p definiert, wobei wir die Bezeichnungsweise aus Kapitel 1 zugrunde legen. Die dort

angegebenen Eigenschaften der Zuordnung $C\mapsto A^C$ implizieren sofort, daß ϱ ein σ-additives B_p-wertiges Maß ist. Die gemäß Abschnitt A definierte Zuordnung $f\mapsto\int f(\omega)\varrho(d\omega)$ von $M_b(\Omega)$ nach $C_p(B_p)$ ist folglich ein Algebrenhomomorphismus, und für jede beschränkte Folge $(f_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ in $M_b(\Omega)$, die bis auf eine Menge von erster Kategorie (offensichtlich sind das genau die ϱ-Nullmengen) punktweise gegen ein $f\in M_b(\Omega)$ konvergiert, konvergieren die Operatoren $\int f_n(\omega)\varrho(d\omega)$ stark gegen $\int f(\omega)\varrho(d\omega)$.

Da Ω extrem unzusammenhängend ist, ist jedes $f\in M_b(\Omega)$ bis auf eine Menge von erster Kategorie gleich einer stetigen Funktion (die zu f eindeutig bestimmt ist). Folglich ist das Integral über f gleich dem Integral über die entsprechende stetige Funktion, d.h. die Einschränkung des Integrationsprozesses auf $\mathscr{C}(\Omega)$ hat den gleichen Bildbereich. Auf $\mathscr{C}(\Omega)$ ist $\int$ eine Isometrie. Sei dazu $g\in\mathscr{C}(\Omega)$ und $\varepsilon>0$. Wähle eine nicht-leere offen-abgeschlossene Menge A mit $|g|\geqslant\|g\|-\varepsilon$ auf A. Sei noch $x\in\operatorname{Bild}E_A$ mit $\|x\|=1$. Dann ist

$$\Big\|\Big(\int g(\omega)\varrho(d\omega)\Big)(x)\Big\|^p=\int|g(\omega)|^p\varrho_x^p(d\omega)$$
$$\geqslant(\|g\|-\varepsilon)^p\varrho_x^p(A)=(\|g\|-\varepsilon)^p,$$

d.h. $\|\int g(\omega)\varrho(d\omega)\|\geqslant\|g\|$ und folglich $\|\int g(\omega)\varrho(d\omega)\|=\|g\|$. Beachtet man noch, daß jedes $E\in B_p$ Integral über eine geeignete stetige charakteristische Funktion ist, so folgt zusammenfassend, daß $\int$ einen isometrischen Algebrenisomorphismus zwischen $\mathscr{C}(\Omega)$ und $C_p(B_p)$ vermittelt. Dieser Isomorphismus entspricht dem aus Kapitel 1, doch erweist sich im folgenden die integrationstheoretische Interpretation als nützlicher.

Das folgende Ergebnis von Sullivan zeigt, daß jedes x vermöge der Wirkung von $C_p(B_p)$ einen L^p-Raum erzeugt:

B1 Satz. *$S(x;B_p)\cong L^p(\Omega,\varrho_x^p)$ für jedes $x\in X$.*

Beweis. Die Abbildung $Q\colon M_b(\Omega)\to S(x;B_p)$, definiert durch $f\mapsto\int f(\omega)\varrho_x(d\omega)$, ist nach A2 (ii) wohldefiniert und, falls man $M_b(\Omega)$ mit der durch ϱ_x^p induzierten L^p-Halbnorm versieht, wegen A2 (iii) eine Isometrie mit dichtem Bild. Folglich ist Q als Isometrie zwischen den beschränkten Funktionen in $L^p(\Omega,\varrho_x^p)$ und $\{Tx\mid T\in C_p(B_p)\}$ aufzufassen, woraus die Behauptung durch Fortsetzung von Q auf $L^p(\Omega,\varrho_x^p)$ folgt.

2.C. Spektraltheorie für Operatoren in $C_p(B_p)$. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie sich aus dem projektionswertigen Maß auf Ω aus 2.B für jedes $T\in C_p(B_p)$ eine Zerlegung der Eins für T gewinnen läßt. Das entspricht dem Vorgehen in der Hilbertraumtheorie, wo aus dem Satz von Gelfand eine Zerlegung der Eins für normale Operatoren konstruiert werden kann.

Die Eigenschaften von T werden zu den Eigenschaften der zugehörigen Zerlegung der Eins in Beziehung gesetzt. Als leichte Folgerung ergibt sich, daß sich T als Stieltjesintegral über eine monoton wachsende Familie von L^p-Projektionen aus B_p darstellen lät, aus der sich auf einfache Weise das spektrale Verhalten von T ablesen läßt.

Wir untersuchen zunächst einen Funktionalkalkül für Operatoren T aus $C_p(B_p)$, und zwar definieren wir $f(T)$ als $\int f\circ\hat{T}(\omega)\varrho(d\omega)$ für jedes $f\in M_b(\operatorname{Bild}\hat{T})$ (unter $M_b(L)$, L ein topologischer Raum, werden wir von nun an die beschränkten reelwertigen borelmeßbaren Funktionen auf L verstehen). Als Vorbereitung für das weitere Vorgehen zeigen wir im folgenden Lemma, daß $\operatorname{Bild}\hat{T}$ gerade das Spektrum von T ist:

C1 Lemma. *Sei $T\in C_p(B_p)$.*

(i) *Äquivalent sind* (a) *T ist in $[X]$ invertiebar,*
(b) *T ist in $C_p(B_p)$ invertierbar,*
(c) *$0\notin\operatorname{Bild}\hat{T}$.*

(ii) $\sigma(T)=\sigma_{C_p(B_p)}(T)=\operatorname{Bild}\hat{T}$; *dabei ist* $\sigma_{C_p(B_p)}(T):=\{\lambda\mid \lambda Id\text{-}T$ *nicht in* $C_p(B_p)$ *invertierbar*$\}$.

Beweis. (i) (b) $\Rightarrow$ (a) und (b) $\Leftrightarrow$ (c) (wegen $C_p(B_p)\cong\mathscr{C}(\Omega)$) sind klar.

(a) $\Rightarrow$ (c): Sei $0\in\operatorname{Bild}\hat{T}$. Für jedes $\varepsilon>0$ gibt es dann eine nicht-leere offen-abgeschlossene Menge A_ε in Ω mit $|\hat{T}|\leqslant\varepsilon$ in A_ε. Wähle $x_\varepsilon\in\operatorname{Bild}E_{A_\varepsilon}$ mit $\|x_\varepsilon\|=1$. Wegen $\operatorname{supp}\varrho^p_{x_\varepsilon}\subset A_\varepsilon$ ist $\|Tx_\varepsilon\|^p=\|(\int\hat{T}(\omega)\varrho(d\omega))x_\varepsilon\|^p=\int|\hat{T}(\omega)|^p\varrho^p_{x_\varepsilon}(d\omega)\leqslant\varepsilon^p\varrho^p_x(A_\varepsilon)=\varepsilon^p$, d. h. $\|Tx_\varepsilon\|\leqslant\varepsilon$. T kann damit nicht stetig invertierbar sein.

(ii) Durch Anwendung der Äquivalenz aus (i) auf $\lambda_0 Id-T$ erhält man:

$$\lambda_0\notin\sigma(T)\Leftrightarrow\lambda_0\notin\operatorname{Bild}\hat{T}\Leftrightarrow\lambda_0\notin\sigma_{C_p(B_p)}(T).$$

Wegen Lemma C1 ist es sinnvoll, $f(T)$ für jedes $f\in M_b(\sigma(T))$ zu definieren.

C2 Satz. *Sei $T\in C_p(B_p)$.*

(i) *Die Zuordnung $f\mapsto f(T)$ ist ein stetiger Algebrenhomomorphismus mit Norm $\leqslant 1$ von $M_b(\sigma(T))$ (Supremums-Norm) nach $C_p(B_p)$. Für jede beschränkte, in $M_b(\sigma(T))$ punktweise konvergente Folge $(f_n)_{n\in N}$ ist $\lim f_n(T)=(\lim f_n)(T)$ in der starken Operatortopologie.*

(ii) *Die Einschränkung der Zuordnung aus* (i) *auf $\mathscr{C}(\sigma(T))$ ist ein isometrischer Algebrenisomophismus von $\mathscr{C}(\sigma(T))$ auf $A(T)$, die von Id und T erzeugte Banachalgebra in $C_p(B_p)$. Es gilt $Id_{\sigma(T)}(T)=T$ und $\mathbf{1}(T)=Id$.*

(iii) *Für $f\in\mathscr{C}(\sigma(T))$ ist $\sigma(f(T))=f(\sigma(T))$ (spektraler Abbildungssatz).*

Beweis. (i) $f\mapsto f(T)$ ist Komposition der stetigen Algebrenhomomorphismen (mit Norm $\leqslant 1$) $f\mapsto f\circ\hat{T}$ (von $M_b(\sigma(T))$ nach $M_b(\Omega)$) und $g\mapsto\int g(\omega)\varrho(d\omega)$ (von $M_b(\Omega)$ nach $C_p(B_p)$). Der Zusatz ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz A3.

(ii) Von den Abbildungen aus dem Beweis von (i) ist die erste stets isometrisch, die zweite im Fall stetiger Funktionen (vgl. auch Abschnitt A). Die Beziehungen $Id_{\sigma(T)}(T)=T$ und $\mathbf{1}(T)=Id$ sind eine direkte Folgerung aus der Konstruktion der Isomorphie $\mathscr{C}(\Omega)\cong C_p(B_p)$. Daraus ergibt sich, daß $\mathscr{C}(\sigma(T))$ auf $A(T)$ abgebildet wird, denn die Polynome in T (bzw. $Id_{\sigma(T)}$) liegen dicht in $A(T)$ (bzw. $\mathscr{C}(\sigma(T))$).

(iii) Für $f\in\mathscr{C}(\sigma(T))$ ist $(f(T))\hat{}=f\circ\hat{T}$, denn $\{f\mid f\in\mathscr{C}(\sigma(T)),\ (f(T))\hat{}=f\circ\hat{T}\}$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $\mathscr{C}(\sigma(T))$, der alle Polynome enthält. Es folgt $\sigma(f(T))=\operatorname{Bild}(f(T))\hat{}=\operatorname{Bild} f\circ\hat{T}=f(\sigma(T))$.

Bevor wir die Menge aller $f(T)$ genauer untersuchen, definieren wir ein von T induziertes B_p-wertiges Maß auf den Borelmengen von $\sigma(T)$ (Zerlegung der Eins), und zwar sei $\varrho_T(B):=\chi_B(T)$ für $B\subset\sigma(T)$, B Borelmenge.

C3 Satz. (i) *$B\mapsto\varrho_T(B)$ ist ein σ-additives B_p-wertiges Maß;*

(ii) *$B_p(T):=\{\varrho_T(B)\mid B\subset\sigma(T),\ B$ Borelmenge$\}$ ist eine σ-vollständige Boolesche Unteralgebra von B_p (σ-Vollständigkeit im Sinne von Kapitel 1);*

(iii) *Für $f\in M_b(\sigma(T))$ ist $f(T)=\int f(\lambda)\varrho_T(d\lambda)$ (insbesondere also $T=\int\lambda\varrho_T(d\lambda)$).*

Beweis. (i) Aufgrund der Isomorphie $\mathscr{C}(\Omega)\cong C_p(B_p)$ liegen alle stetigen Projektionen in $C_p(B_p)$ schon in B_p (vgl. auch [2], 2.8). Damit gehören alle $\chi_B(T)$ zu B_p. Die Additivität von ϱ_T sowie die Beziehungen $\varrho_T(\sigma(T))=Id$, $\varrho_T(\emptyset)=0$ folgen aus C2. Sei schließlich $B_1,B_2,\ldots$ eine Folge disjunkter Borelmengen in $\sigma(T)$. Dann geht (mit $A_n:=\sum_{i=1}^n B_i$, $A_\infty:=\sum_{n=1}^\infty A_n$) $\chi_{A_n}\circ\hat{T}$ punktweise gegen $\chi_{A_\infty}\circ\hat{T}$ und damit $\chi_{A_n}(T)=\sum_{i=1}^n\varrho_T(B_i)$ gegen $\chi_{A_\infty}(T)=\varrho_T(\sum_{i=1}^\infty B_i)$ in der starken Operatortopologie.

(ii) folgt unmittelbar aus (i).

(iii) Sei $M:=\{f\mid f\in M_b(\sigma(T)),\ f(T)=\int f(\lambda)\varrho_T(d\lambda)\}$. M ist ein abgeschlossener Unterraum von $M_b(\sigma(T))$, der alle meßbaren Treppenfunktionen enthält. Folglich gilt $M=M_b(\sigma(T))$.

Der folgende Satz beschreibt den Zusammenhang zwischen den Punkten von $\sigma(T)$ und der Algebra $B_p(T)$:

C4 Satz. *Sei $T\in C_p(B_p)$.*

(i) (a) *$B\subset\sigma(T)$ offen und nicht leer $\Rightarrow\varrho_T(B)\neq 0$,*
(b) *$\lambda_0\in\sigma(T)$ Eigenwert $\Leftrightarrow\varrho_T(\{\lambda_0\})\neq 0$,*
In diesem Fall ist $\operatorname{Bild}\varrho_T(\{\lambda_0\})$ der Eigenraum zu λ_0,
(c) *Das Residualspektrum von T ist leer.*

(ii) *Für jede Borelmenge B in $\sigma(T)$ ist $\sigma(T_B)\subset B^-$. Dabei ist T_B die*

Einschränkung von T auf den Unterraum Bild $\varrho_T(B)$ (*der von T invariant gelassen wird, denn T und $\varrho_T(B)$ kommutieren*).

Beweis. (i) (a) Sei B offen und nicht leer. Wähle eine stetige Funktion f mit $0 \neq f$, $0 \leqslant f \leqslant \chi_B$. Also ist (in der auf $C_p(B_p)$ durch $\mathscr{C}(\Omega)$ induzierten Ordnung) $0 \neq f(T) \leqslant \chi_B(T) = \varrho_T(B)$.

(b) $\Rightarrow$: Sei $x \neq 0$ und $Tx = \lambda_0 x$. Für jedes Polynom P ist dann $P(T)x = P(\lambda_0)x$. Wählt man noch eine beschränkte Folge $(P_n)_{n\in N}$ von Polynomen, die punktweise auf $\sigma(T)$ gegen $\chi_{\{\lambda_0\}}$ konvergiert, so folgt $\varrho_T(\{\lambda_0\})x = \lim P_n(T)x = \lim P_n(\lambda_0)x = x$.

$\Leftarrow$: $0 = (\lambda - \lambda_0)\chi_{\{\lambda_0\}}$, d.h. $0 = (T - \lambda_0 Id)\varrho_T(\{\lambda_0\})$, d.h. $Tx = \lambda_0 x$ für alle $x \in$ Bild $\varrho_T(\{\lambda_0\})$.

Der Zusatz folgt direkt aus dem Beweis der Äquivalenz.

(c) Beweis s. u., Abschnitt D.

(ii) Sei $\lambda_0 \notin B^-$. Wähle $f \in \mathscr{C}(\sigma(B))$ mit $f(\lambda)(\lambda_0 - \lambda) = 1$ für $\lambda \in B$. Aus $f(\lambda)(\lambda_0 - \lambda)\chi_B(\lambda) = \chi_B(\lambda)$ (auf $\sigma(T)$) folgt dann $f(T)(\lambda_0 Id - T)\varrho_T(B) = \varrho_T(B)$, d. h. $f(T)|_{\text{Bild}\,\varrho_T(B)}$ ist invers zu $(\lambda_0 Id - T)|_{\text{Bild}\,\varrho_T(B)}$.

C5 Korollar. *Jeder isolierte Punkt von $\sigma(T)$ ist ein Eigenwert.*

C6 Korollar. *Für jedes $T \in C_p(B_p(X))$ und jeden L^p-Summanden J ist $T^{-1}(J)$ ebenfalls ein L^p-Summand. Insbesondere ist* Kern T *stets ein L^p-Summand.*

Beweis. $T^{-1}(J)$ ist gerade der Eigenraum zum Eigenwert 0 von $E_J T - E_J$, wo E_J die L^p-Projektion auf J bezeichnet.

Bemerkung. In Verschärfung von C6 geht aus dem Beweis noch hervor: Ist B_p eine vollständige Boolesche Algebra von L^p-Projektionen, $T \in C_p(B_p)$, J ein L^p-Summand, dessen zugehörige Projektion in B_p liegt, so ist $T^{-1}(J)$ ebenfalls ein L^p-Summand, dessen zugehörige Projektion zu B_p gehört.

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen den bisher eingeführten Begriffen. Insbesondere soll gezeigt werden, daß die Operatoren der Form $f(T)$ genau die Operatoren in der von $B_p(T)$ erzeugten Banachalgebra $C_p(B_p(T))$ sind.

C7 Satz. *Sei $T \in C_p(B_p)$. Für $f \in M_b(\sigma(T))$ bezeichnen wir mit*

$$\|f\|^* := \inf\{\|f\cdot\chi_B\| \mid B \subset \sigma(T) \text{ Borelmenge}, \ \varrho_T(B) = Id\}$$

das "wesentliche Supremum" von f. Dann ist

(i) $\|f(T)\| = \|f\|^*$,

(ii) $\| \ \|^*$ *ist eine Halbnorm auf $M_b(\sigma(T))$. $M_b(\sigma(T))|_{\mathrm{Kern}\| \ \|^*}$, versehen mit der durch $\| \ \|^*$ induzierten Norm, ist ein Banachraum,*

(iii) $\{f(T) \mid f \in M_b(\sigma(T))\}$ *ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $C_p(B_p)$.*

Beweis. (i) Sei $B \subset \sigma(T)$ Borelmenge mit $\varrho_T(B) = Id$. Dann ist $f(T) = (f\chi_B)(T)$ und folglich $\|f(T)\| = \|(f\chi_B)(T)\| \leqslant \|f\cdot\chi_B\|$. Damit gilt

"$\leqslant$". Sei nun $\varepsilon > 0$ und $\sum_{i=1}^n a_i\chi_{B_i}$ eine meßbare Treppenfunktion mit disjunkten B_i und $\bigcup_{i=1}^n B_i = \sigma(T)$, so daß $\|f - \sum_{i=1}^n a_i\chi_{B_i}\| \leqslant \varepsilon$. Die Numerierung sei so vorgenommen, daß $\varrho_T(B_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, k$ und $\varrho_T(B_i) = 0$ für $i = k+1, \ldots, n$. Sei nun B eine Borelmenge mit $\varrho_T(B) = Id$. Dann ist $\varrho_T(B \cap B_i) \neq 0$ für $i = 1, \ldots, k$ und folglich (vgl. den Beweis zu A1)

$$\Big\|\Big(\chi_B\Big(\sum_{i=1}^n a_i\chi_{B_i}\Big)\Big)(T)\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^n a_i\chi_{B\cap B_i}(T)\Big\| = \max\{|a_i| \mid i = 1, \ldots, k\}.$$

Es folgt

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_i\chi_{B_i}\Big\|^* = \max\{|a_i| \mid i = 1, \ldots, k\}.$$

Setzen wir noch $B_0 := \bigcup_{i=1}^k B_i$, so folgt (wegen $\varrho_T(B_0) = Id$)

$$\|f\|^* \leqslant \|f\chi_{B_0}\| \leqslant \max\{|a_i| \mid i = 1, \ldots, k\} + \varepsilon$$

und damit

$$\|f(T)\| \geqslant \Big\|\sum_{i=1}^n a_i\chi_{B_i}(T)\Big\| - \varepsilon = \max\{|a_i| \mid i = 1, \ldots, n\} - \varepsilon \geqslant \|f\|^* - 2\varepsilon.$$

Mit $\varepsilon \to 0$ ist damit "$\geqslant$" bewiesen.

(ii) Die Halbnormeigenschaften von $\| \ \|^*$ sind leicht einzusehen (bzw. eine direkte Folgerung aus (i)). Die Vollständigkeit ergibt sich wie im Fall skalarwertiger Maße beim Nachweis der Vollständigkeit des L^∞. Man beachte nur, daß das Infimum in der Definition von $\|f\|^*$ angenommen wird und daß bei der Betrachtung von Cauchy-Folgen $(f_n)_{n\in N}$ von einer für alle f_n gemeinsamen Menge B ausgegangen werden darf (beides Folgerungen aus der σ-Additivität von ϱ_T).

(iii) ist eine direkte Folgerung aus (i) und (ii).

C8 Lemma. *Sei $A_s(T)$ der starke Abschluß von $A(T)$* (zur Definition siehe C2 (ii)), *d. h. die kleinste stark abgeschlossene Unteralgebra von $C_p(B_p)$, die Id und T enthält.*

Für jedes $f \in M_b(\sigma(T))$ ist dann $f(T) \in A_s(T)$. Insbesondere gilt $B_p(T) \subset A_s(T)$.

Beweis. Sei $M := \{f \mid f \in M_b(\sigma(T)), f(T) \in A_s(T)\}$. Der Raum M enthält nach C2 (ii) die stetigen Funktionen auf $\sigma(T)$ und ist wegen C2 (i) abgeschlossen gegen punktweise Limites beschränkter Folgen. Damit gilt $M = M_b(\sigma(T))$.

C9 Satz. *Sei $T \in C_p(B_p)$. Dann ist*

$$A(T) \subset \{f(T) \mid f \in M_b(\sigma(T))\} = C_p(B_p(T)) \subset A_s(T).$$

Beweis. Die erste Inklusion folgt aus C2 (ii), die letzte aus C8 und der Tatsache, daß $A_s(T)$ insbesondere uniform abgeschlossen ist. Zeige daher noch "$=$". Die Algebra $\{f(T) \mid f \in M_b(\sigma(T))\}$ ist wegen C7 abgeschlossen, und $B_p(T)$ ist eine Teilmenge. Folglich gilt "$\supset$". Umgekehrt enthält $C_p(B_p(T))$ alle $\chi_B(T)$ und damit alle $f(T)$ für Treppenfunktionen f. Da alle $f \in M_b(\sigma(T))$ durch Treppenfunktionen approximiert werden können, folgt "$\subset$".

C10 Korollar.

(i) *Sei $A \subset C_p(B_p(X))$ eine stark abgeschlossene Unteralgebra mit $Id \in A$. Dann gibt es eine vollständige Boolesche Unteralgebra B_p von $B_p(X)$, so daß $A = C_p(B_p)$. Dabei ist gerade $B_p = A \cap B_p(X)$.*

(ii) *Die stark abgeschlossenen Unteralgebren A von $C_p(B_p(X))$, $A \neq 0$, entsprechen eineindeutig den vollständigen Booleschen Unteralgebren von $B_p(X)$.*

(iii) *Jede stark abgeschlossene Unteralgebra von $C_p(B_p(X))$ ist auch schwach abgeschlossen (d. h. abgeschlossen in der schwachen Operatortopologie).*

Beweis. (i) Sei $B_p := A \cap B_p(X)$. B_p ist Boolesche Algebra, und Suprema (bzw. Infima) aufwärts (bzw. abwärts) filtrierender Netze gehören zu B_p (da sie Limes in der starken Topologie sind). Folglich ist B_p vollständige Boolesche Algebra. $B_p \subset A$ und damit $C_p(B_p) \subset A$ sind trivialerweise richtig. Ist umgekehrt $T \in A$, so gilt wegen C9 $B_p(T) \subset A_s(T) \subset A$ und folglich $T \in C_p(B_p)$.

(ii) Klar.

(iii) Wegen (i) und Bade 4.5.

Wir bemerken noch, daß ϱ_T bzw. $B_p(T)$ durch die Eigenschaft C3 (iii) eindeutig zu T bestimmt ist, da sich alle $\varrho_T(B)$ durch einen Funktionalkalkül aus T gewinnen lassen. Eine Integraldarstellung von T durch Stieltjesintegrale läßt sich — wie im Fall beschränkter selbstadjungierter Operatoren — leicht aus der Zerlegung der Eins von T herleiten. Definiert man für $\lambda \in \mathbf{R}$ $E_\lambda := \varrho_T(\sigma(T) \cap]-\infty, \lambda])$, so ist die Familie $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ eine monoton steigende rechtsseitig stark stetige Schar von L^p-Projektionen mit beschränktem Träger. Es gilt dann für stetige Funktionen f: $f(T) = \int f(\lambda)\, dE_\lambda$ (Stieltjes-Integral), und die Eigenschaften von $\sigma(T)$ spiegeln sich in denen von $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ gerade so wieder, daß $\lambda_0 \notin \sigma(T)$ d.u.n.d., wenn $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ in einer Umgebung von λ_0 konstant ist und die Eigenwerte von T gerade die Sprungstellen von $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ sind (wobei die Eigenräume sich als die "Sprunghöhe", d. h. Bild $(E_{\lambda_0} - E_{\lambda_0^+})$ ergeben).

Es kann nicht Aufgabe dieser Arbeit sein, nun nach Entwicklung der Spektraltheorie alle diejenigen Ergebnisse für normale Operatoren oder Spektraloperatoren zu übertragen, bei denen die Hilbertraumstruktur nicht wesentlich eingeht oder die Skalare nicht notwendig komplex

sein müssen. Wir erwähnen als Beispiel für ein derartiges Resultat den folgenden Satz, der ein Gegenstück zu C2 (i) darstellt:

C11 Satz. *Sei $(T_i)_{i \in I}$ ein beschränktes Netz von Operatoren in $C_p(B_p)$, das stark gegen $T \in C_p(B_p)$ konvergiert. Ist dann f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine beschränkte Borelmeßbare Funktion, für die der Abschluß der Unstetigkeitsstellen, geschnitten mit $\sigma(T)$, eine ϱ_T-Nullmenge ist, so konvergieren die $f(T_i)$ stark gegen $f(T)$.*

Beweis. Wie im Fall spektraler Operatoren, vgl. [5], XVII. 4.3. Die Voraussetzung über die Unstetigkeitsstellen von f ist wesentlich: $(1/n)Id \to 0$, aber für $f = \chi_{\{0\}}$ ist $f((1/n)Id) = 0$, $f(0) = Id$.

2.D. Anwendungen. Wir beweisen zunächst mit Hilfe der Integrationstheorie B_p-wertiger Maße zwei Sätze von Evans, die in [6] unter Verwendung der Theorie der Integralmoduln erzielt wurden. Als direkte Anwendung zeigen wir, daß jedes $T \in C_p(B_p)$ eine kanonische Zerlegung von X in L^p-Summanden induziert. Nach weiteren Vorbereitungen über Boolesche Algebren von L^p-Projektionen werden anschließend zwei Bikommutatortheoreme bewiesen.

D1 Satz (Evans). *Sei B_p eine vollständige Boolesche Algebra von L^p-Projektionen auf X und $x \in X$. Dann gibt es eine stetige Projektion P mit Norm $\leqslant 1$ in $(B_p)_k$ (für $A \subset [X]$ bezeichne A_k den Kommutator von A in $[X]$), so daß $P(X) = S(x; B_p)$.*

Beweis. Sei $E_x \in B_p$ die Trägerprojektion zu x, d.h. $E_x = \inf\{E \mid E \in B_p, Ex = x\}$. Wir können o.B.d.A. $E_x = Id$ annehmen, da wir andernfalls die nachstehende Konstruktion in Bild E_x durchführen und anschließend zu $P \circ E_x$ übergehen. Weiter sei o.B.d.A. $\|x\| = 1$, so daß ϱ_x^p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf Ω ist und alle Maße $\varrho_{y,x'}$ absolutstetig bezüglich ϱ_x^p sind. Wähle zunächst ein $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$ und $x'Ex = \|Ex\|^p$ für alle $E \in B_p$, z. B. eine Hahn–Banach-Fortsetzung von $f \mapsto \int f(\omega)\, \varrho_x^p(d\omega)$, definiert auf $L^p(\Omega, \varrho_x^p) \cong S(x; B_p)$ (wobei die Stetigkeit von $f \mapsto \int f(\omega)\, \varrho_x^p(\omega)$ bezüglich der L^p-Norm leicht aus der Hölderschen Ungleichung folgt). Mit der Existenz eines derartigen x' wird — für den Fall vollständiger Boolescher Algebren von L^p-Projektionen — ein allgemeines Ergebnis von [2] (Th. 3.1) verschärft, das bei vorgegebenem x die Existenz eines $x' \in X'$ garantiert, für das $x'Ex > 0$ im Falle $Ex \neq 0$ ($E \in B$, B eine vollständige Boolesche Algebra von Projektionen).

Wir definieren nun P: $X \to X$. Für $y \in X$ ist (da $\varrho_{y,x'}$, ϱ_y^p absolutstetig bzgl. ϱ_x^p sind) $\varrho_{y,x'} = h_y \varrho_x^p$ sowie $\varrho_y^p = (f_y)^p \varrho_x^p$ für geeignete, o.B.d.A. stetige numerischwertige Funktionen h_y, f_y. Für $T \in C_p(B_p)$ ist offensichtlich $h_{Ty} = \hat{T} h_y$, $f_{Ty} = |\hat{T}| f_y$, und für $f_y(\omega) = 0$ gilt auch $h_y(\omega) = 0$ (man beachte, daß $\varrho_{y,x'}$ absolutstetig bzgl. ϱ_y^p ist, und mit $\varrho_{y,x'} = g\varrho_y^p$, g stetig, notwendig $g(f_y)^p = h_y$ gilt). Wir behaupten, daß $|h_y| \leqslant f_y$. Wäre da nicht der Fall, so gäbe es ein $y_0 \in X$, eine nicht-leere, offen-abgeschlossene Teilmenge D von Ω mit $h_{y_0}(\omega) > f_{y_0}(\omega) = 1$ auf D, $h_{y_0}(\omega) = f_{y_0}(\omega) = 0$ auf $\Omega\setminus D$ (ist etwa $h_y(\omega) > f_y(\omega)$ für ein $\omega \in \Omega$, so wähle eine offen-abgeschlossene Umgebung D von ω, auf der f_y endlich und von Null verschieden ist und für die $h_y(k) > f_y(k)$ für alle $k \in D$ gilt. Setze dann $y_0 := Sy$, wo $S \in C_p(B_p)$ so gewählt ist, daß $\hat{S} = \chi_D(1/f_y)$). Für $y_1 := (\mathrm{Id} - E_D)x + y_0$ gilt dann

$$\|y_1\|^p = \int_{\Omega\setminus D} \varrho_x^p(d\omega) + \int_D f_{y_0}\varrho_x^p(d\omega) = \|x\|^p = 1,$$

$$\begin{aligned} x'(y_1) = x'\big((\mathrm{Id}-E_D)(x)\big) + x'(y_0) &= \int_{\Omega\setminus D} \varrho_x^p(d\omega) + \int_D h_{y_0}(\omega)_x^p(d\omega) \\ &> \int \varrho_x^p(d\omega) = 1, \end{aligned}$$

d.h. es ergibt sich ein Widerspruch zu $\|x'\| \leqslant 1$. Es folgt

$$\int |h_y|^p \varrho_x^p(d\omega) \leqslant \int f_y^p \varrho_x^p(d\omega) = \|y\|^p < \infty, \quad \text{d.h.} \quad h_y \in L^p(\Omega, \varrho_x^p).$$

Definiere P durch $Py := h_y \in L^p(\Omega, \varrho_x^p) \cong S(x; B)$. P ist offensichtlich linear und stetig mit $\|P\| \leqslant 1$. Für $E \in B_p$ ist $\varrho_{Ey,x'} = \chi_{A_E}\varrho_{y,x'}$, d.h. $h_{Ey} = \chi_{A_E}h_y$, d.h. $PEy = EPy$. Weiter ist $h_x = \mathbf{1}$, d.h. $Px = x$. Für $E \in B_p$ folgt $PEx = Ex$ und damit aus Stetigkeitsgründen $Tz = z$ für alle $z \in S(x; B_p)$.

D2 Lemma. *Sei $J \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, der unter allen $S \in (B_p)_k$ invariant ist. Für jedes $x \in J$ ist dann* $\mathrm{Bild}\,E_x \subset J$ *(E_x = Trägerprojektion von x; vgl. den Beweis von* D1).

Beweis. Sei $x \in J$ und $J_x := \mathrm{Bild}\,E_x$ (J_x ist gerade der kleinste L^p-Summand, der x enthält und dessen zugehörige L^p-Projektion zu B_p gehört). Für jedes $y \in J_x$ ist dann ϱ_y^p absolutstetig bzgl. ϱ_x^p, d. h. $\varrho_y^p = f\varrho_x^p$ für ein $f \geqslant 0$, $f \in L^1(\Omega, \varrho_x^p)$, $f = 0$ außerhalb des Trägers von ϱ_x^p. Wir nehmen weiter an, daß für jedes $n \in \mathbf{N}$ die Menge $B_n := \{\omega |\ f(\omega) \leqslant n\}$ offen-abgeschlossen in Ω ist (andernfalls ist f auf einer Menge erster Kategorie, d. h. ein ϱ_x^p-Nullmenge, abzuändern). Sei E_n die zu B_n gehörige Projektion in B_p, d. h. $\hat{E_n} = \chi_{B_n}$. Dann ist $(\chi_{B_n}f)\varrho_x^p = \varrho_{E_ny}^p$. Wir definieren $T_n\colon B_p(x) \to B_p(y)$ durch $Ex \mapsto EE_ny$. Da aus $Ex = 0$ stets $EE_ny = 0$ folgt, ist T_n wohldefiniert und durch $\sum a_iE_ix \mapsto \sum a_iE_iE_ny$ linear auf $\mathscr{L}B_p(x)$ fortsetzbar. T_n ist auch stetig auf $\mathscr{L}B_p(x)$, denn

$$\begin{aligned} \Big\| \sum a_iE_iE_ny \Big\|^p = \sum |a_i|^p \|E_iE_ny\|^p &= \sum |a_i|^p \varrho_{E_ny}^p(A_{E_i}) \\ &= \sum |a_i|^p \int_{A_{E_i}} f(\omega)\varrho_x^p(d\omega) \leqslant n \sum |a_i|^p \varrho_x^p(A_{E_i}) \\ &= n\sum |a_i|^p \|E_ix\|^p = n\Big\|\sum a_iE_ix\Big\|^p \end{aligned}$$

(dabei wurden die E_i als disjunkt vorausgesetzt). Damit ist T_n linear und stetig auf $S(x; B_p)$ fortsetzbar. Wir bezeichnen die Fortsetzung, deren Bilder offensichtlich in $S(E_ny; B_p)$ liegen, wieder mit T_n. Da T_n nach Konstruktion mit allen $E \in B_p$ kommutiert, gehört $T_n \circ P$ zu $(B_p)_k$, wo P die Projektion auf $S(x; B_p)$ aus Satz D1 ist. Nach Voraussetzung ist J invariant unter $T_n \circ P$, d. h. wegen $x \in J$ ist $T_n \circ Px = E_ny \in J$. Beachtet man schließlich noch $\sup E_n = E_x$ und folglich $\lim E_ny = y$ (da $y \in \mathrm{Bild}\,E_x$), so ergibt sich $y \in J$.

D3 Satz (Evans). *Sei J ein abgeschlossener Unterraum von X, B_p eine vollständige Boolesche Algebra von L^p-Projektionen auf X. J ist genau dann L^p-Summand, dessen zugehörige Projektion zu B_p gehört, wenn J invariant unter allen $T \in (B_p)_k$ ist.*

Beweis. Die eine Richtung ist leicht einzusehen. Sei umgekehrt J invariant unter allen $T \in (B_p)_k$. Wegen D2 ist dann $\mathrm{Bild}\,E_x \subset J$ für jedes $x \in J$ und damit $J = \mathrm{Bild}\sup\{E_x |\ x \in J\} = \big(\mathscr{L}\bigcup_{x\in J} J_x\big)^-$.

D4 Satz. *Sei $T \in C_p(B_p)$ und J ein L^p-Summand, dessen zugehörige L^p-Projektion zu B_p gehört. Dann sind auch $T^{-1}(J)$ und $\big(T(J^\perp)\big)^-$ L^p-Summanden mit zu B_p gehörigen Projektionen, und*

$$X = T^{-1}(J) \oplus_p \big(T(J^\perp)\big)^-.$$

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ist schon gezeigt (Bemerkung nach C6) bzw. eine direkte Folgerung aus D3 ($T(J^\perp)$ und damit $\big(T(J^\perp)\big)^-$ sind unter $(B_p)_k$ invariant). Zeige noch $T^{-1}(J) \cap \big(T(J^\perp)\big)^- = 0$ sowie $T^{-1}(J) + \big(T(J^\perp)\big)^- = X$. Sei $J_0 := T^{-1}(J)^\perp$, wegen $J \subset T^{-1}(J)$ also $J_0 \subset J^\perp$. Weiter gilt $T(J^\perp) = T(J_0)$, da die Elemente aus $T^{-1}(J) \cap J^\perp$ auf 0 abgebildet werden. Folglich ist $\big(T(J^\perp)\big)^- = \big(T(J_0)\big)^- \subset J_0$, d. h. $\big(T(J^\perp)\big)^- \cap T^{-1}(J) = 0$. Sei schließlich $\tilde{J} := \Big(\big(T(J^\perp)\big) \oplus_p T^{-1}(J)\Big)^\perp$. Wegen $J \subset T^{-1}(J)$ ist $\tilde{J} \subset J^\perp$. Andererseits ist $T(\tilde{J}) \subset \tilde{J}$ und folglich (da $\tilde{J} \cap T(\tilde{J}) = 0$) $T(\tilde{J}) = 0$, d. h. $\tilde{J} \subset \mathrm{Kern}\,T \subset T^{-1}(J)$. Mit $\tilde{J} \cap T^{-1}(J) = 0$ folgt $\tilde{J} = 0$.

D5 Korollar. *Für alle $T \in C_p(B_p)$ ist*

$$X = \mathrm{Kern}\,T \oplus_p (\mathrm{Bild}\,T)^-,$$

und die L^p-Projektionen zu diesen L^p-Summanden gehören zu B_p.

D6 Korollar. *$T \in C_p(B_p)$ ist genau dann injektiv, wenn* $\mathrm{Bild}\,T$ *dicht liegt.*

D7 Korollar. *Für jedes $T \in C_p(B_p)$ ist das Residualspektrum von T leer* (zur Definition siehe [5], X. 3).

Wir untersuchen nun den Bikommutator für Teilmengen A von $C_p(B_p)$. Es zeigt sich, daß für $A = C_p(B_p)$ und einelementige A dieser Bikommutator explizit bestimmt werden kann.

D8 Satz. $(C_p(B_p))_{kk} = C_p(B_p)$. *Der Satz besagt gerade, daß sich $C_p(B_p)$ wie eine W^*-Algebra verhält.*

Beweis. "$\supset$" gilt trivialerweise. Sei umgekehrt $T \in (C_p(B_p))_{kk}$. Wir zeigen, daß T jeden Zykel $S(x; B_p)$ in sich überführt (was dann $T \in C_p(B_p)$ impliziert; vgl. Kapitel 1). Sei also $x \in X$ und P die Projektion in $(B_p)_k$ gemäß D1. Nach Voraussetzung gilt $T \circ P = P \circ T$, womit $T(S(x; B_p)) \subset S(x; B_p)$ schon bewiesen ist.

X heiße *lokal B_p-vollständig*, wenn jede σ-vollständige Boolesche Unteralgebra bereits vollständig ist. Hinreichend dafür ist nach [5], XVII.3.21, daß es eine Folge $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ in X gibt, so daß $(\mathscr{L}\{Ex_n | \ n \in \boldsymbol{N}, E \in B_p\})^- = X$ ist (1). Wir bemerken noch, daß eine σ-vollständige Boolesche Unteralgebra genau dann vollständig ist, wenn sie stark ageschlossen ist ([2], 4.7).

D9 Satz. *Sei $T \in C_p(B_p)$. Dann gilt*

$$A(T) \subset \{f(T) | \quad f \in M_b(\sigma(T))\} = C_p(B_p(T)) \subset C_p(B_p(T)^{-s}) = A_s(T) = (T)_{kk}$$

(A^{-s} bezeichnet den starken Abschluß einer Operatorenmenge A). Ist also X lokal B_p-vollständig, so hat jedes $R \in (T)_{kk}$ die Form $R = f(T)$ für ein f aus $M_b(\sigma(T))$.

Beweis. Für die erste Inklusion und das erste Gleichheitszeichen vergleiche C9.

Wegen $B_p(T) \subset A_s(T)$ ist auch $B_p(T)^{-s} \subset A_s(T)$, und $B_p(T)^{-s}$ ist eine vollständige Boolesche Algebra ([2], 2.7). Folglich ist $C_p(B_p(T)^{-s})$ stark abgeschlossene Unteralgebra von $A_s(T)$ ([2], 4.5). Mit $A(T) \subset C_p(B_p(T)^{-s})$ folgt daraus $C_p(B_p(T)^{-s}) = A_s(T)$. Da offensichtlich $A_s(T) \subset (T)_{kk}$, bleibt nur noch $(T)_{kk} \subset C_p(B_p(T)^{-s})$ zu zeigen. Sei dazu $R \in (T)_{kk}$. Wir haben nur zu zeigen (vgl. wieder Kapitel 1), daß R alle Zykeln $S(x; B_p(T)^{-s})$ invariant läßt. Sei also $x \in X$ und P die Projektion aus $(B_p(T)^{-s})_k$ auf $S(x; B_p(T)^{-s})$ gemäß D1. Da insbesondere $P \in (T)_k$ (beachte: $T \in C_p(B_p(T)^{-s})$), gilt $R \circ P = P \circ R$ und damit $R(S(x; B_p(T)^{-s})) \subset S(x; B_p(T)^{-s})$.

Wir bemerken, daß D9 einem Satz von F. Riesz und von Neumann aus der Hilbertraumtheorie entspricht (vgl. [2], 4.4)

Bemerkung. Im allgemeinen gilt in Satz D9 nicht die Gleichheit. Insbesondere gibt es Banachräume, die nicht lokal B_p-vollständig sind. Betrachte dazu den Maßraum ($[0,1]$, Potenzmenge, zählendes Maß). X sei der L^p über diesem Maßraum. Die Menge aller charakteristischen Projektionen (d. h. Projektionen der Form $f \mapsto f \cdot \chi_G$, $G \subset [0,1]$ fest) werde mit B_p bezeichnet. B_p ist eine vollständige Boolesche Algebra von L^p-Projektionen auf X (es läßt sich leicht zeigen, daß sogar $B_p = B_p(X)$,

(1) Das ist bei separablem X für alle B_p erfüllt.

d. h. daß jede L^p-Projektion charakteristisch ist für $p \neq 2$). Dann ist $B_p \cong \mathscr{P}([0,1])$, $C_p(B_p) \cong m([0,1], \boldsymbol{R})$ (= Menge der beschränkten Funktionen von $[0,1]$ nach $\boldsymbol{R}$), $\Omega \cong \beta([0,1]$, diskrete Topologie).

Sei weiter $T \in m([0,1], \boldsymbol{R}) \cong C_p(B_p)$ durch $T\lambda := \lambda$ definiert. Es ist $\sigma(T) = \operatorname{Bild} T = [0,1]$, und für $f \in M_b(\sigma(T))$ ist $(f(T))(\lambda) = f(\lambda)$. Folglich ist $B_p(T)$ isomorph zur Menge aller Borelmengen in $[0,1]$ und $C_p(B_p(T))$ entspricht der Menge aller borelmeßbaren Funktionen in $m([0,1], \boldsymbol{R})$. Damit ist $B_p(T)^{-s} = \mathscr{P}([0,1]) \supsetneqq B_p(T)$, und jede beschränkte nicht borelmeßbare Funktion liegt in $m([0,1], \boldsymbol{R}) \cong C_p(B_p(T)^{-s}) = A_s(T)$, aber nicht in $C_p(B_p(T))$.

Als Folgerung (die natürlich auch direkt verifiziert werden kann) erhalten wir noch, daß $\mathscr{C}[0,1]$ $(\cong A(T))$ dicht liegt in $m([0,1], \boldsymbol{R})$ bezüglich der durch X induzierten starken Topologie.

Literatur

[1] E.M. Alfsen and E.G. Effros, *Structure in real Banach spaces*, Ann. of Math. 96 (1972), pp. 98–173.

[2] W.G. Bade, *On Boolean algebras of projections and algebras of operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), pp. 345–360.

[3] E. Behrends, *L^p-Struktur in Banachräumen*, Studia Math. 55 (1975), pp. 71–85.

[4] H.B. Cohen and F.E. Sullivan, *Projections onto cycles in smooth reflexive Banach spaces*, Pacific J. Math. 34 (1970), pp. 355–364.

[5] N. Dunford and J.T. Schwartz, *Linear operators I–III*, Interscience Publishers, New York.

[6] R. Evans, *Projektionen mit Normbedingungen in reellen Banachräumen*, Dissertation FU Berlin 1974.

[7] F.E. Sullivan, *Structure of real L^p-spaces*, J. Math. Anal. Appl. 32 (1970), pp. 621–629.

I. MATHEMATISCHES INSTITUT DER FREIEN UNIVERSITÄT
Huttenweg 9, Berlin 33

Received January 20, 1976 (1116)