STUDIA MATHEMATICA, T. LXII. (1978)

Bestimmungsflächen für das Randwachstum holomorpher Funktionen auf analytischen Polyedern*

von

PETER PFLUG (Kaiserslautern, B.R.D.)

Zusammenfassung. Sei $G \subset C^n$ ein Holomorphiegebiet mit dem Šilov–Rand $S = S(\bar{G}, A(\bar{G}))$ bezüglich der Algebra $A(\bar{G})$ der auf $\bar{G}$ stetigen, in G holomorphen Funktionen. Folgende Frage wird untersucht: ist das Randwachstum einer auf G holomorphen Funktion bereits durch ihr Verhalten in der Nähe von S bestimmt? Dieses Problem wird für polynomiale Funktionen auf analytischen Polyedern gelöst, wenn man deren Wachstum in einer Umgebung von S auf G kennt; zudem wird gezeigt, wie man den Begriff "in der Nähe von S" präzisieren kann.

1. In [1], [2] wurde für analytische Polyeder P festgestellt, daß der Šilov-Rand $S = S(\bar{P}, A(\bar{P}))$ stets im Bergman-Rand $\partial^* P$ von P enthalten ist; gleichzeitig wurden Bedingungen angegeben, unter denen beide Ränder übereinstimmen. Ersetzt man also den Šilov-Rand durch den Bergman-Rand, so ergibt sich folgender Satz:

Satz 1. Sei *$U \subset C^n$ ein Gebiet; seien $f_1, \ldots, f_q$ $(q \geqslant n \geqslant 2)$ auf U nicht konstante, paarweise verschiedene holomorphe Funktionen mit* $\operatorname{grad} f_j(z) \neq 0$ *auf $\{z \in U: |f_j(z)| = 1\}$, so daß $P: = \{z \in U: |f_j(z)| < 1$ für $1 \leqslant j \leqslant q\}$ ein in U relativ kompaktes Gebiet ist; $V = V(\partial^* P)$ sei eine Umgebung des Bergman-Randes $\partial^* P: = \{z \in \partial P: |f_j(z)| = 1$ für mindestens n Indizes $j\}$ von P.*

Dann existiert eine Zahl $\varkappa \geqslant 1$, so daß jede auf P holomorphe Funktion $f: P \to C$ mit $|f(z)| \leqslant A \operatorname{dist}(z, \partial P)^{-N}$ $(A > 0, N \in N)$ auf $P \cap V$ folgender globalen Abschätzung auf P genügt:

$$|f(z)| \leqslant A\varkappa^N \operatorname{dist}(z, \partial P)^{-N}.$$

Beweis. (a) Setzt man für $1 \leqslant j \leqslant q$: $N_j: = \{z \in U: |f_j(z)| = 1\}$ und $\hat{N}_j: = N_j \cap \bar{P}$, so existiert eine positive Zahl $0 < \varepsilon_1$; so daß die "Schläuche" $U(\hat{N}_j; 2\varepsilon_1): = \{z \in C^n: \operatorname{dist}(z, \hat{N}_j) < 2\varepsilon_1\}$ relativ kompakt in U liegen. Für die auf U plurisuperharmonischen C^∞-Funktionen $\psi_j: = 1 - |f_j|^2$

* Diese Note basiert auf einem Teil der unveröffentlichten Dissertation [4] des Verfassers.

folgt dann mit geeigneten Konstanten $\alpha, \beta > 0$ auf $U(\hat{N}_j; \varepsilon_1) \cap P$:

$$|\psi_j(z)| \leqslant \alpha \operatorname{dist}(z, \hat{N}_j) \quad \text{wegen des Mittelwertsatzes}$$

und

$$|\psi_j(z)| \geqslant \beta \operatorname{dist}(z, N_j) \geqslant \beta \operatorname{dist}(z, \partial P) \quad \text{wegen [5]}.$$

(b) Für positive Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$ mit $\gamma_i < \frac{1}{2}$ bezeichne $P(\gamma) = P(\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$ folgendes analytisches Polyeder:

$$P(\gamma) = \{z \in P: |f_j(z)| < 1-\gamma_j \text{ für } 1 \leqslant j \leqslant q\} \Subset P.$$

Offenbar gilt bei geeignetem $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ für $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_q)$ mit $\gamma_i \leqslant \varepsilon_2$: $\partial^* P(\gamma) \subset V$.

(c) Behauptet wird nun die Existenz einer positiven Zahl $\varepsilon_3 < \varepsilon_2$, so daß für alle $1 \leqslant j \leqslant q$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_3$ und $z \in \partial^* P(\gamma)$ mit $\gamma_i \leqslant \varepsilon_2$ $(i \neq j)$, $\gamma_j = \varepsilon$ und $|f_j(z)| = 1-\varepsilon$ bei geeignetem $\varkappa = \varkappa(\gamma, z)$ und $\gamma_\varkappa \neq \varepsilon_2$ gilt: $\operatorname{dist}(z, \partial P) = \operatorname{dist}(z, \hat{N}_\varkappa) < \varepsilon_1$.

Denn: Offenbar kann man bei geeigneter Wahl von ε_2 annehmen, daß stets $\operatorname{dist}(z, \partial P) < \varepsilon_1$. O.B.d.A. setze man $j = 1$ und $\gamma_2 = \ldots = \gamma_l = \varepsilon_2$ für ein l mit $2 \leqslant l \leqslant q$. Es genügt ein ε_3 so zu finden, daß für alle $\gamma_{l+1} < \varepsilon_2, \ldots, \gamma_q < \varepsilon_2$, $\gamma_1 = \varepsilon \leqslant \varepsilon_3$ und Punkte $z \in \partial^* P(\gamma)$ mit $|f_1(z)| = 1-\varepsilon$ für ein geeignetes $\varkappa \notin \{2, \ldots, l\}$ gilt: $\operatorname{dist}(z, \partial P) = \operatorname{dist}(z, \hat{N}_\varkappa)$. Wäre dies nicht möglich, gäbe es eine Nullfolge δ_ν, Zahlenfolgen $0 < \gamma_\mu^\nu < \varepsilon_2$ für $l+1 \leqslant \mu \leqslant q$, eine Punktfolge $z^\nu \in \partial^* P(\delta_\nu, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_2, \gamma_{l+1}^\nu, \ldots, \gamma_q^\nu)$ mit $z^\nu \to z^0$ und $|f_1(z^\nu)| = 1-\delta_\nu$ und eine Zahl $\varkappa \in \{2, \ldots, l\}$ mit $\operatorname{dist}(z^\nu, \partial P) = \operatorname{dist}(z^\nu, \hat{N}_\varkappa) < \min\limits_{\substack{\mu=1\\ \mu \geqslant l+1}} \operatorname{dist}(z^\nu, \hat{N}_\mu)$. Obwohl $|f_\varkappa(z^\nu)| \leqslant 1-\varepsilon_2 < 1$ gilt, folgt $\operatorname{dist}(z^0, \hat{N}_\varkappa) = 0$, was obige Annahme widerlegt.

(d) Leicht findet man $0 < \varepsilon_4 < \varepsilon_3$, so daß für alle $z \in \partial P^\varepsilon$ mit $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_4$ für geeignetes $j = j(z, \varepsilon)$ gilt: $1 - |f_j(z)| \leqslant \varepsilon_3$; dabei bezeichne $P^\varepsilon := \{z \in P: \operatorname{dist}(z, \partial P) > \varepsilon\}$ die ε-Schrumpfung von P.

(e) Sei jetzt ein Punkt $z^0 \in P - P^{\varepsilon_4}$ beliebig gewählt. Mit einem geeigneten $\varepsilon \leqslant \varepsilon_4$ liegt z^0 auf ∂P^ε; also gilt mit (d) für ein j: $1 - |f_j(z^0)| =: \gamma_j \leqslant \varepsilon_3$. Setzt man für $1 \leqslant i \leqslant q$, $i \neq j$ und $\delta > 1$

$$\gamma_i(\delta) := \begin{cases} \varepsilon_2 & \text{falls } |f_i(z^0)| < 1-\varepsilon_2 \\ 1-\delta |f_i(z^0)| & \phantom{\text{falls }} |f_i(z^0)| \geqslant 1-\varepsilon_2 \end{cases}$$

so folgt nach dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen auf analytischen Mengen:

$$\begin{aligned} |f(z^0)| &\leqslant \sup\{|f(z)|: |f_j(z)| = 1-\gamma_j \text{ und } z \in \partial^* P(\gamma(\delta))\} \\ &\leqslant A \sup\{\operatorname{dist}(z, \partial P)^{-N}: |f_j(z)| = 1-\gamma_j \text{ und } z \in \partial^* P(\gamma(\delta))\}. \end{aligned}$$

Nach (c) gilt für solche z, über die das Supremum gebildet wird:

$$\operatorname{dist}(z, \partial P) = \operatorname{dist}(z, \hat{N}_\varkappa) \quad \text{mit einem } \varkappa,$$

für das $|f_\varkappa(z^0)| \geqslant 1-\varepsilon_2$ gilt.

Mit (a) fortfahrend erhält man:

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(z, \hat{N}_\varkappa) &\geqslant \frac{1}{\alpha}\left(1-|f_\varkappa(z)|^2\right) \geqslant \left(1-(1-\gamma_\varkappa(\delta))^2\right) \cdot \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(1-\delta^2 |f_\varkappa(z^0)|^2\right) \\ &\geqslant \frac{\beta}{\alpha} \frac{1-\delta^2 |f_\varkappa(z^0)|^2}{1-|f_\varkappa(z^0)|^2} \operatorname{dist}(z^0, \partial P) \\ &\geqslant \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{dist}(z^0, \partial P) \min_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{1-\delta^2 |f_l(z^0)|^2}{1-|f_l(z^0)|^2}. \end{aligned}$$

Also gilt, da $\delta > 1$ beliebig war:

$$|f(z^0)| \leqslant A \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-N} \operatorname{dist}(z^0, \partial P)^{-N}.$$

Diese Ungleichung gilt also auf P außerhalb P^{ε_4}, woraus sofort die Behauptung des Satzes hergeleitet werden kann.

Bemerkung. Läßt man die Bedingung $\operatorname{grad} f_j \neq 0$ auf N_j fallen, so bleibt eine abgeschwächte Aussage [4] richtig, indem man die Ungleichung von Łojasiewicz benutzt.

2. Bezeichnet ${}_N\mathcal{O}(G)$ den Banachraum

$${}_N\mathcal{O}(G) := \{f: G \to C \text{ holomorph}: \sup_{z \in G} |f(z)| \operatorname{dist}(z, \partial G)^N < \infty\}$$

so ergibt sich folgendes Korollar:

Folgerung 1. *Seien P und V wie in Satz 1; sei G ein Teilgebiet von P mit $G \supset P \cap V$ und Holomorphiehülle $(G) = P$. Dann gilt: Die Restriktionsabbildung r: ${}_N\mathcal{O}(P) \to {}_N\mathcal{O}(G)$ ist ein topologischer Isomorphismus.*

Außerdem läßt sich ein Resultat von Siu-Narasimhan [3], [6] wie folgt verschärfen:

Folgerung 2. *Seien P, V wie in Satz 1, und sei A eine (p, q)-Matrix von auf $\bar{P}$ holomorphen Funktionen. Dann gibt es eine Zahl $\varkappa = \varkappa(A)$, so daß jedes p-Tupel holomorpher Funktionen $f = (f_1, \ldots, f_p)^t \in A \cdot \Gamma(P, \mathcal{O})^q$ mit $\sup\limits_{z \in P \cap V} |f_j(z)| \operatorname{dist}(z, \partial P)^N < \infty$ bereits Bild eines q-Tupels $g = (g_1, \ldots, g_q)^t \in {}_{N+\varkappa}\mathcal{O}(P)^q$ ist.*

3. Während Satz 1 Wachstumsabschätzungen in einer vollen Umgebung des Bergman-Randes verlangt, gelingt es z. B. für analytische Polyeder im C^2, die Bedingung "in der Nähe" von S von (0) wie folgt zu präzisieren:

Satz 2. *Gegeben sei im C^2 das beschränkte analytische Polyedergebiet $P = \{z \in U(\overline{P}): |f_1(z)| < 1, |f_2(z)| < 1\}$ mit in $U(P)$ nicht konstanten holomorphen Funktionen f_1, f_2 für die $\operatorname{grad} f_i(z) \neq 0$ auf $\{z \in U(\overline{P}): |f_i(z)| = 1\}$ gilt. $G \subset P$ sei ein Teilgebiet folgender Gestalt: $G = \{z \in P: \varphi_1(z) < 0, \varphi_2(z) < 0\}$, wobei die in U definierten C^1-Funktionen φ_1, φ_2 folgende Eigenschaften erfüllen:*

(α) *für Punkte $z \in U$ gilt:*

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z) = 0 \leftrightarrow z \in \partial^* P$$
$$\leftrightarrow \varphi_1(z) = 0 \text{ und } |f_2(z)| = 1$$
$$\leftrightarrow \varphi_2(z) = 0 \text{ und } |f_2(z)| = 1;$$

(β) *für Punkte $z \in \partial P - \partial^* P$ mit $|f_i(z)| = 1$ gilt: $\varphi_i(z) > 0$;*

(γ) *für keinen Punkt $z \in P - G$ gilt: $\varphi_i(z) \geqslant 0$ für $i = 1, 2$;*

(δ) *für Punkte $z \in \partial^* P$ hat man:*

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}\operatorname{grad}\varphi_1(z)\\ \operatorname{grad}\varphi_2(z)\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\operatorname{grad}\psi_2(z)\\ \operatorname{grad}\varphi_i(z)\end{pmatrix} = 2$$

für $i = 1, 2$ und $\psi_2 := 1 - |f_2|^2$.

Dann existiere eine Zahl $\varkappa \geqslant 1$, so daß für jede in P holomorphe Funktion $f: P \to C$ mit $|f(z)| \leqslant A \operatorname{dist}(z, \partial G)^{-N}$ auf G gilt:

Für alle Punkte $z \in P$ ist folgende Abschätzung richtig:

$$|f(z)| \leqslant A\varkappa^N \operatorname{dist}(z, \partial P)^{-N}.$$

Bemerkung. Man sieht sofort, daß die Bedingungen(α)–(γ) natürliche geometrische Eigenschaften beschreiben. (δ) dagegen fordert das transversale Schneiden der berandenden Hyperflächen.

Beweis. (a) O.B.d.A. sei vorausgesetzt: $|\operatorname{grad}\varphi_i(z)| \leqslant 1$ für $z \in U(\overline{P})$ und $i = 1, 2$.

(b) Analog zum Beweis von Satz 1 findet man Konstanten $\alpha \geqslant 1$, $\beta > 0$ und $0 < \varepsilon_1 < 1$, so daß für alle Punkte $z \in U(\partial^* P; \varepsilon_1) \cap P$ gilt: $\beta \operatorname{dist}(z, \partial P) \leqslant 1 - |f_i(z)|^2 \leqslant \alpha \operatorname{dist}(z, \hat{N}_i)$; $\hat{N}_i$ bezeichne wieder $\{z \in \overline{P}: |f_i(z)| = 1\}$.

(c) Behauptung: Es gibt endlich viele Punkte $z^1, \ldots, z^\varkappa \in \partial^* P$ und Umgebungen $\tilde{U}_j = \tilde{U}_j(z^j) \Supset U_j = U_j(z^j)$ für $1 \leqslant j \leqslant \varkappa$ und eine Konstante $\tilde{\varkappa} \in [0, 1]$, so daß gilt:

(1) $\bigcup_{\lambda=1}^{\varkappa} U_\lambda \supset \partial^* P$;

(2) Auf ganz $\tilde{U}_j$ ist eine Koordinatentransformation χ_j ausführbar;

(3) Für alle $z \in P \cap \left(\bigcup_{\lambda=1}^{\varkappa} U_\lambda\right)$ mit $\varphi_i(z) = 0$ gilt:

$$|\varphi_j(z)| \geqslant \tilde{\varkappa} \operatorname{dist}(z, \partial^* P) \quad \text{für} \quad \{i, j\} = \{1, 2\}.$$

Denn: Da $\partial^* P$ kompakt ist, braucht (2) und (3) nur lokal gezeigt zu werden. O.B.d.A. sei $j = 1$ und $i = 2$. $z^0 \in \partial^* P$ sei dann ein beliebiger Punkt des Bergman–Randes. Da sich nach (δ) die Hyperflächen $[\varphi_1 = 0]$ und $[\varphi_2 = 0]$ in z^0 transversal schneiden, findet man o.B.d.A. Umgebungen $\tilde{U} = \tilde{U}(z^0) \subset U(\overline{P})$ und $\tilde{W} = \tilde{W}(0) \subset C^2_{w_1, w_2}$ mit $w_j = u_j + iv_j$ und einen Diffeomorphismus $\chi: \tilde{U} \to \tilde{W}$ mit: $\chi(z^0) = 0$, $\chi(G \cap \tilde{U}) \subset \subset \{w \in \tilde{W}: u_1 < 0, v_1 < 0\}$, $\chi(\tilde{U} \cap \partial^* P) = \{w \in \tilde{W}: w_1 = 0\}$ und $\varphi_i \circ \chi^{-1} = px_1$ für $i = 1, 2$; dabei bezeichne pr_1 die Projektion $(w_1, w_2) \to u_1$. Sei $W = W(0) \Subset \tilde{W}$ eine Vollkugel und $U := \chi^{-1}(W)$, so gilt für $z \in U \cap P$ mit $\varphi_2(z) = 0$: $|\varphi_1(z)| = |\varphi_1 \circ \chi^{-1}(w)| = |u_1| = |w - (0, w_2)| = |w - w'|$ mit $\chi(z) = w = (u_1 + i0, w_2)$ und $w' = (0, w_2) \in W \cap \chi(\partial^* P \cap U)$. Mit $z' := \chi^{-1}(w') \in \partial^* P$ folgt: $|\varphi_1(z)| = |w - w'| = |\chi(z) - \chi(z')| \geqslant C|z - z'| \geqslant C \operatorname{dist}(z, \partial^* P)$, wobei $C = C(z^0) > 0$ gilt. Somit ist (c) verifiziert.

(d) Man wähle jetzt eine positive Zahl $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$ mit:

$$U(\partial^* P; \varepsilon_2) \subset \bigcup_{\lambda=1}^{\varkappa} U_\lambda \quad \text{und} \quad \operatorname{dist}(z, F_i) \geqslant |\varphi_i(z)| \text{ für } z \in U(\partial^* P; \varepsilon_2) \cap P,$$

$i = 1,2$ und $F_i := \{z \in \overline{P}: \varphi_i(z) = 0\}$.

(e) Offenbar gilt dann für eine geeignete Zahl $0 < \varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2$ mit (β):

$$\{z \in P: |f_i(z)| = 1 - \varepsilon, \varphi_1(z) \leqslant 0, \varphi_2(z) \leqslant 0\} \subset U\left(\partial^* P, \frac{\varepsilon_2}{2}\right)$$

für $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_3$ und $i = 1, 2$.

(f) Für $\delta \in (1 - \varepsilon_3, 1)$ setze man:

$$N_i(\delta) := \left\{z \in P: |f_i(z)| = \delta, \varphi_i(z) \leqslant 0, 0 \geqslant \varphi_j(z) \geqslant -\frac{\tilde{\varkappa}}{2\alpha D}(1 - \delta^2)\right\};$$

dabei seien

$$D := 2 \max_{\substack{\lambda = 1, \ldots, \varkappa \\ w \in W_\lambda \\ \nu = 1, \ldots, 4}} |\operatorname{grad} \chi_{\lambda,\nu}^{-1}(w)| + 1$$

mit den nach (c) zu U_λ gehörenden Nullumgebungen W_λ und $\chi_{\lambda,\nu}^{-1}$ die νte Komponentenfunktion von χ_λ^{-1}. Es gilt:

$$N_i(\delta) \Subset U(\partial^* P; \varepsilon_2) \cap P.$$

Behauptung: Für alle $z \in N_i(\delta)$ mit $1-\varepsilon_3 < \delta < 1$ gilt mit einer geeigneten positiven Zahl $L \leqslant \tilde{\varkappa}$: $\varphi_i(z) \leqslant -L\cdot\operatorname{dist}(z, \partial^* P)$. Denn: O.B.d.A. sei $i = 1$ und $j = 2$.

Offenbar braucht man diese Abschätzung jeweils nur für die Schnittmengen $N_1(\delta) \cap U_\lambda$ zu zeigen; es sei o.B.d.A. $\lambda = 1$. Man hat also wieder die lokale Situation:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_1 \Supset U_1 & \to & W_1 \Subset \tilde{W}_1 \\ \text{\rotatebox{90}{$\in$}} & & \text{\rotatebox{90}{$\in$}} \\ z^1 & & \to 0 \end{array}$$

Dann gilt für Punkte $z \in U_1 \cap N_1(\delta)$ wegen $|f_1(z)| = 1-\delta$: $\operatorname{dist}(z, \partial^* P) \geqslant \operatorname{dist}(z, \hat{N}_1) \geqslant \frac{1}{\alpha}(1-|f_1(z)|^2) = \frac{1}{\alpha}(1-\delta^2)$; d.h. für Punkte $z' \in \partial^* P$ gilt stets: $|z-z'| \geqslant \frac{1}{\alpha}(1-\delta^2)$. Damit folgt für $w = \chi_1(z)$ und $w' = \chi_1(z')$:

$$|w-w'| = |\chi_1(z)-\chi_1(z')| \geqslant \frac{1}{D}|z-z'| \geqslant \frac{1}{\alpha D}(1-\delta^2).$$

Also erhält man:

$$|\varphi_1(z)| = |\varphi_1 \circ \chi_1^{-1}(w)| = |u_1| \quad \text{und} \quad 0 \geqslant v_1 \geqslant -\frac{\tilde{\varkappa}}{2\alpha D}(1-\delta^2).$$

Für $w^* = (0, w_2) \in \chi_1(\partial^* P \cap U_1)$ folgt dann:

$$|\varphi_1(z)| = |u_1| \geqslant \cos\frac{\pi}{4}\cdot|w-w^*|$$

$$\geqslant \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{D}|z-z^*| \geqslant \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{D}\operatorname{dist}(z, \partial^* P) \quad \text{mit} \quad z^* := \chi_1^{-1}(w^*).$$

(g) Wegen (β) findet man $0 < \varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_3$, so daß für alle $z \in P-G$ mit $\operatorname{dist}(z, \partial P) \leqslant \varepsilon_4$ und $\varphi_i(z) \geqslant 0$ und $\varphi_j(z) < 0$ gilt: $|f_i(z)| \geqslant 1-\varepsilon_3$.

(h) Sei jetzt $z^0 \in P-G$ mit $d := \operatorname{dist}(z^0, \partial P) < \varepsilon_4$. O.B.d.A. gelte $\varphi_1(z^0) \geqslant 0$ und $\varphi_2(z^0) < 0$. Mit (g) gilt: $|f_1(z^0)| =: \delta \geqslant 1-\varepsilon_3$.

Man betrachte nun die rein-1-dimensionale analytische Menge $A_1(z^0)$ in P: $A_1(z^0) := \{z \in P\colon f_1(z) = f_1(z^0)\}$ und setze $B := \{z \in P\colon \varphi_1(z) > \eta(d)/2, \varphi_2(z) < 0\}$ mit

$$-\eta(d) := \min_{z \in N_1(\delta)} L\cdot\operatorname{dist}(z, \partial^* P) > 0, \quad \text{da} \quad N_1(\delta) \neq \emptyset.$$

Es gilt: $z^0 \in B \cap A_1(z^0) \Subset P$. Mit dem Maximumprinzip folgt dann: $|f(z^0)| \leqslant \|f\|_{\partial B \cap A_1(z^0)}$.

Aus (c) erhält man:

$$A_1(z^0) \cap \partial B \subset A_1(z^0) \cap \left\{z \in P\colon \varphi_1(z) = \frac{\eta(d)}{2}, \varphi_2(z) < 0\right\} \subset G.$$

Für $z \in A_1(z^0) \cap \partial B$ gilt:

$$|f(z)| \leqslant A\operatorname{dist}(z, G)^{-N} \leqslant A\max\left(\operatorname{dist}(z, F_1)^{-N}, \operatorname{dist}(z, F_2)^{-N}\right)$$
$$\leqslant A\max\left(|\varphi_1(z)|^{-N}, |\varphi_2(z)|^{-N}\right).$$

Weiter folgt:

$$|\varphi_1(z)| = \frac{|\eta(d)|}{2} = \frac{L}{2}\cdot\operatorname{dist}(z', \partial^* P) \quad (\text{für ein } z' \in N_1(\delta))$$

$$\geqslant \frac{L}{2}\cdot\operatorname{dist}(z', \hat{N}_1) \geqslant \frac{L}{2\alpha}\cdot\left(1-|f_1(z')|^2\right) = \frac{L}{2\alpha}\cdot\left(1-|f_1(z^0)|^2\right)$$

$$\geqslant \frac{L}{2}\cdot\frac{\beta}{\alpha}\cdot\operatorname{dist}(z^0, \partial P).$$

Wegen (f) gilt:

$$\varphi_2(z) < -\frac{\tilde{\varkappa}}{2\alpha D}\cdot(1-\delta^2) \leqslant -\frac{\tilde{\varkappa}\beta}{2\alpha D}\operatorname{dist}(z^0, \partial P).$$

Also folgt zusammenfassend:

$$|f(z^0)| \leqslant A\left(\frac{L\beta}{2\alpha D}\right)^{-N}\operatorname{dist}(z^0, \partial P)^{-N} = AB^{-N}\operatorname{dist}(z^0, \partial P)^{-N}.$$

(i) Analog wie in (c) folgert man für geeignete Zahlen $0 < \varepsilon_5 \leqslant \varepsilon_4$, $0 < r \leqslant L$, daß für alle Punkte $z \in \partial G \cap P \cap U(\partial^* P; \varepsilon_5)$ gilt:

$$1-|f_2(z)|^2 = \psi_2(z) \geqslant r\operatorname{dist}(z, \partial^* P).$$

(j) Offenbar gilt mit geeignetem $0 < \varepsilon_6 \leqslant \varepsilon_5$ für alle Punkte $z^0 \in G \cap U(\partial^* P; \varepsilon_6)$:

$$\partial G \cap A_1(z^0) \subset (P-P^{\varepsilon_4}) \cap U(\partial^* P; \varepsilon_2).$$

Damit gilt:

$$|f(z^0)| \leqslant \|f\|_{A_1(z^0)\cap\partial G} \leqslant AB^{-N}\sup_{z \in A_1(z^0)\cap\partial G}\operatorname{dist}(z, \partial P)^{-N}.$$

Für diese z berechnet man:

(1) $\operatorname{dist}(z, \hat{N}_1) \geqslant \frac{1}{\alpha}\left(1-|f_1(z)|^2\right) \geqslant \frac{\beta}{\alpha}\operatorname{dist}(z^0, \partial P)$,

(2) $\operatorname{dist}(z, \hat{N}_2) \geqslant \frac{1}{\alpha}\left(1-|f_2(z)|^2\right) \geqslant \frac{r}{\alpha}\operatorname{dist}(z, \partial^* P) \geqslant \frac{r}{\alpha}\operatorname{dist}(z, \hat{N}_1)$

$$\geqslant \frac{r}{\alpha}\,\frac{\beta}{\alpha}\operatorname{dist}(z^0, \partial P).$$

Also ergibt sich:

$$|f(z^0)| \leqslant AB^{-N}\left(\frac{r\beta}{\alpha\cdot\alpha}\right)^{-N}\operatorname{dist}(z^0, \partial P)^{-N};$$

woraus sofort die Behauptung des Satzes folgt.

Bemerkungen. (a) Wie man dem Beweis von Satz 2 entnimmt, genügt es, sämtliche Voraussetzungen nur lokal um $\partial^* P$ zu fordern.

(b) Ebenso gilt, daß die Voraussetzung, daß das analytische Polyeder durch zwei Funktionen gegeben ist, vollkommen unwichtig ist. Solch ein Satz gilt also in analoger Form für jedes analytische Polyedergebiet im $\boldsymbol{C}^2$.

(c) Einen analogen Satz erhält man durch Induktion auch in beliebiger Dimension, wenn das Teilgebiet G durch "polynomiales Eindrücken" nur der $(2n-1)$-dimensionalen offenen Berandungsflächen $\{z \in P: |f_i(z)| = 1$ und $|f_i(z)| < 1$ für alle $j \neq i\}$ entsteht.

(d) Es gelten wieder die entsprechenden Aussagen zu den Folgerungen von (2), ebenso die Bemerkung von (1) bezüglich der Łojasiewicz-Ungleichung.

4. Die hier behandelte Frage ist ein Spezialfall des folgenden allgemeinen Problems:

Sei G ein Gebiet im $\boldsymbol{C}^n$ mit Holomorphiehülle $H(G) \subset \boldsymbol{C}^n$. Unter welchen Voraussetzungen gilt dann, daß die Restruktionsabbildung ${}_N\mathcal{O}(H(G)) \to {}_N\mathcal{O}(G)$ $(N \in \boldsymbol{R}_{>0})$ surjektiv ist. Daß diese Abbildung i.A. nicht surjektiv ist, wurde an einem Beispiel in [4] gezeigt. Für schöne geometrische Gebiete, z.B. sternförmige Gebiete, dagegen ist diese Frage in [4] positiv beantwortet.

Literatur

[1] K. Hoffman, *Minimal boundaries for analytic polyedra*, Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo 9 (1960), pp. 147–160.

[2] — und K. Rossi, *The minimum boundary for an analytic polyedron*, Pacific J. Math. 12 (1962), pp. 1347–1353.

[3] R. Narasimhan, *Cohomology with bounds on complex spaces. Several complex variables I*, Maryland 1970, pp. 141–150.

[4] P. Pflug, *Eigenschaften der Fortsetzungen von in speziellen Gebieten holomorphen polynomialen Funktionen in die Holomorphiehülle*, Göttingen 1972.

[5] — *Glatte Holomorphiegebiete mit innerer plurisubharmonischer Randfunktion sind Banach–Stein*, Arkiv. för Mat. 14.

[6] Y. T. Siu, *Holomorphic un ctions of polynomial growth*, Duke Math. J. 37 (1970), pp. 77–84.

FACHBEREICH MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN
BRD 6750 KAISERSLAUTERN
Pfaffenbergstr. 95

Received January 13, 1976 (1112)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXII. (1978)

L^p-Struktur in Banachräumen II

von

EHRHARD BEHRENDS (Berlin)

Abstract. Let X be a real Banach space, $1 \leqslant p < \infty$. A linear continuous projection $E\colon X \to X$ is called L^p-projection, if $\|x\|^p = \|Ex\|^p + \|x - Ex\|^p$ for $x \in X$. We consider complete Boolean algebras B_p of L^p-projections (e.g. if $p \neq 2$, the set of all L^p-projections on X), in particular, the properties of the operators in the Banach algebra generated by B_p, $C_p(B_p)$. After summarizing the results which are consequences of theorems of Bade and Cohen–Sullivan we study the spectral properties of operators in $C_p(B_p)$. It is shown that they behave like normal operators on Hilbert spaces (though in this case the scalars are real). As an application we prove some results concerning the existence of certain projections, general properties of operators in $C_p(B_p)$, and theorems describing the structure of the bi-commutator of subsets of $C_p(B_p)$. As an example we mention the following result which for $p = 2$ includes a classical theorem of Riesz and von Neumann: If $T \in C_p(B_p)$, X is a separable Banach space, then every operator in the bi-commutator of T is a bounded Borel function of T.

Die vorliegende Arbeit setzt die Untersuchungen über L^p-Struktur in Banachräumen fort. In [3] wurde u.a. gezeigt, daß für $p \neq 2$ je zwei L^p-Projektionen kommutieren (eine Projektion $E\colon X \to X$ heißt *L^p-Projektion*, falls $\|x\|^p = \|Ex\|^p + \|x - Ex\|^p$ für alle $x \in X$; dabei ist X ein reeller Banachraum und $1 \leqslant p < \infty$). Hier sollen zunächst in Kapitel 1 einige unmittelbare Folgerungen gezogen werden, die sich mit Hilfe der Resultate in [2], [4] und [7] leicht direkt ergeben. Gleichzeitig sollen einige für die Arbeit wichtige Vorbereitungen und Begriffsbildungen bereitgestellt werden. Eigentlicher Inhalt der Arbeit ist die Untersuchung der in der von den L^p-Projektionen erzeugten Banachalgebra liegenden Operatoren (sog. Cunningham-p-Operatoren). Insbesondere wird eine Spektraltheorie dieser Operatoren entwickelt. Es zeigt sich, daß Cunningham-p-Operatoren Spektraloperatoren vom skalaren Typ im Sinne der Dunfordschen Theorie sind (vgl. Band III von [5]). Allerdings sind die Ergebnisse und Beweismethoden dieser Theorie im allgemeinen nicht übertragbar, da dort an wesentlichen Stellen ausgenutzt wird, daß die Skalare komplex sind.

Als Anwendung werden zwei Ergebnisse von Evans bewiesen, die in [6] mit anderen Methoden erzielt wurden. Diese Resultate dienen dann dazu, weitere Ergebnisse über Cunningham-p-Operatoren herzuleiten.