If $q_0 = \infty$ and $q_1 < \infty$ or $q_1 = \infty$ and $q_0 < \infty$, the result follows in the same way by taking $1/q_0 = 0$, respectively $1/q_1 = 0$.

If $p_1 = \infty$, it follows directly that I_2 is dominated by (2) and

$$J_2 \leqslant A\Big(\int_0^\infty [w(y^{1/\sigma})f^*(y)]^q y^{q/p-1}\,dy\Big)^{1/q} \leqslant A\Big(\int_0^\infty [w(y^{1/\sigma})f^*(y)]^p\,dy\Big)^{1/p}$$

by Lemma 2.

An examination of the proof shows that the result extends to $0 < p_i \leqslant q_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1$, provided that for $0 < p < 1$, $w \in W^0(p/q - p/q_1)$ if $q_0 < q_1$ and $w \in W_0(p/q - p/q_1)$ whenever $q_1 < q_0$.

We single out a specific weight in the following

COROLLARY. (a) *If $q_0 < q_1$ and $0 < \beta < (1/q - 1/q_1)/(1/q_0 - 1/q)$, then*

$$\Big(\int_0^\infty x^{-\beta(q/q_0-1)}(Tf)^*(x)^q\,dx\Big)^{1/q} \leqslant A\Big(\int_0^\infty x^{-\beta(p/p_0-1)}f^*(x)^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

(b) *If $q_1 < q_0$ and $(1/q - 1/q_1)/(1/q - 1/q_0) < \beta < 0$, then*

$$\Big(\int_0^\infty x^{\beta(q/q_0-1)}(Tf)^*(x)^q\,dx\Big)^{1/q} \leqslant A\Big(\int_0^\infty x^{\beta(p/p_0-1)}f^*(x)^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

EXAMPLE. Let T be defined by $Tf = \hat{f}$, where $\hat{f}$ is the is Fourier transform of f. Since T is of type $(1, \infty)$ and (2.2) we obtain for $w \in W_0(1/2 - 1/p)$, $1 < p < 2$,

$$\Big\{\int_0^\infty [w(x)\hat{f}^*(x)]^q\,dx\Big\}^{1/q} \leqslant A\Big\{\int_0^\infty [w(1/x)f^*(x)]^p\,dx\Big\}^{1/p},$$

$1/q = 1 - 1/p$, an extension of the Hausdorff–Young inequality.

I wish to thank Professor A. Torchinsky for providing the proof of Lemma 1 and the correspondence we had on these topics.

References

[1] E. M. Stein, *Interpolation of linear operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 83 (1956), pp. 482–492.

[2] — *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton 1970.

[3] E. M. Stein and G. Weiss, *Interpolation of operators with change of measures*, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), pp. 159–172.

[4] —, — *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton 1971.

McMASTER UNIVERSITY
HAMILTON, ONTARIO, CANADA

Received October 13, 1975
New version April 3, 1976 (1072)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXII. (1978)

Suites concordantes d'espaces normés et leurs applications I

par

CZESŁAW GÓŹDŹ (Lublin)

Résumé. Nous exposons dans ce travail une méthode pour l'"approximation" des éléments d'un espace de Banach (ou de Hilbert) donné par des suites concordantes d'espaces normés (dans les applications pratiques ces espaces ont un nombre fini de dimensions). Nous indiquons aussi une réalisation numérique de ces considérations dans les problèmes variationnels aux dérivées partielles qui se présentent dans la théorie de l'élasticité ([3]).

1. Construction d'un espace de suites concordantes. Soit une suite d'espaces normés $(X_n, \|\cdot\|_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et supposons données les applications linéaires continues $\varphi_{n,m}\colon X_n \to X_m$ $(m \geqslant n = 1, 2, \ldots)$.

Par $\boldsymbol{P}(X_n)$ nous désignerons l'ensemble de toutes les suites $\{x_n\}$ telles que $x_n \in X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ et satisfaisant à la condition

$$p(\{x_n\}) \overset{\text{df}}{=} \overline{\lim}\, \|x_n\|_n < \infty. \tag{1.1}$$

Nous admettons les définitions suivantes:

DÉFINITION (1.1). Les éléments de l'ensemble

$$C = [\{x_n\} \in \boldsymbol{P}(X_n) \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{n_\varepsilon} \bigwedge_{m \geqslant n \geqslant n_\varepsilon} \|x_m - \varphi_{n,m}x_n\|_m \leqslant \varepsilon]. \tag{1.2}$$

seront appelés *suites concordantes*.

DÉFINITION (1.2). Les éléments de l'ensemble

$$C_s = [\{x_n\} \in \boldsymbol{P}(X_n)\colon \bigvee_{n_0} \bigvee_{x_{n_0} \in X_{n_0}} x_n = \varphi_{n_0,n}x_{n_0} \text{ pour } n \geqslant n_0] \tag{1.3}$$

seront appelés *suites presque constantes*.

Remarque. Nous identifierons les suites qui ne diffèrent que par un nombre fini de coordonnées.

LEMME (1.1). *Si les applications $\varphi_{n,m}$ satisfont à l'hypothèse*

$$\bigwedge_{n_0} \bigwedge_{x_{n_0} \in X_{n_0}} \sup_{n \geqslant n_0} \|\varphi_{n_0,n}x_{n_0}\|_n < \infty$$

et si les espaces X_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des espaces de Banach, on a

$$(1.4)\qquad \bigwedge_{n_0}\bigvee_{\beta_{n_0}}\bigwedge_{x_{n_0}\in X_{n_0}}\bigwedge_{n\geqslant n_0}\|\varphi_{n_0,n}x_{n_0}\|_n \leqslant \beta_{n_0}\|x_{n_0}\|_{n_0}.$$

Démonstration. Posons:

$$q_n(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \|\varphi_{n_0,n}x\|_n, \qquad \text{pour} \qquad x \in X_{n_0}.$$

Les fonctionnelles q_n $(n \geqslant n_0)$ sont subadditives, positivement homogènes, définies sur un espace de Banach X_{n_0} et pour tout $x \in X_{n_0}$ la suite $q_n(x)$ est bornée en vertu de l'hypothèse admise. En appliquant le théorème de Banach–Steinhaus on obtient la conclusion (1.4).

Les deux lemmes suivants sont évidents.

LEMME (1.2). *L'ensemble C est un espace linéaire si l'on définit l'addition des suites et la multiplication par un scalaire de la manière suivante*:

$$(1.5)\qquad \{x_n\}+\{y_n\} = \{x_n+y_n\},$$

$$(1.6)\qquad \lambda\{x_n\} = \{\lambda x_n\}.$$

LEMME (1.3). *Si X_n sont des espaces normés (pas nécessairement complets) et si les applications $\varphi_{n,m}: X_n \to X_m$ $(m \geqslant n = 1, 2, \ldots)$ satisfont à la condition* (1.4), *toute suite satisfaisant à la condition*

$$(1.2')\qquad \bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{n_\varepsilon}\bigwedge_{m\geqslant n\geqslant n_\varepsilon}\|x_m-\varphi_{n,m}x_n\|_m \leqslant \varepsilon$$

est concordante, c'est-à-dire $p(\{x_n\}) < \infty$.

Soit

$$C_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} [\{x_n\} \in C\colon p(\{x_n\}) = 0].$$

Nous désignerons l'espace-quotient C/C_0 par $\overline{\{X_n\}}$ (ou bien X) et ses éléments par $\overline{\{x_n\}}$ (ou bien x).

Admettant que l'on a, pour $x \in X$,

$$(1.7)\qquad \|x\| \stackrel{\mathrm{df}}{=} p(\{x_n\}),$$

où $\{x_n\}$ est une représentation quelconque de l'élément x, on obtient un espace normé. Nous allons prouver que c'est un espace complet.

THÉORÈME (1.1). *Si X_n sont des espaces normés, l'espace $X = \overline{\{X_n\}}$ avec la norme définie par* (1.7) *est complet.*

Démonstration. Soit $x^\nu \in X = \overline{\{X_n\}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ une suite satisfaisant à la condition de Cauchy

$$(1)\qquad \bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\nu_\varepsilon}\bigwedge_{\mu\geqslant\nu\geqslant\nu_\varepsilon}\|x^\mu-x^\nu\| \leqslant \varepsilon.$$

Soient $\{x_k^\nu\}_{k\in N}$ des représentations des éléments x^ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$. La condition (1) et la définition de $\|\cdot\|$ entraînent l'existence d'une suite croissante $\{\nu_i\}_{i\in N}$ telle que

$$(2)\qquad \overline{\lim_k}\|x_k^{\nu_i}-x_k^\mu\|_k < \frac{1}{2^i} \qquad \text{pour} \qquad \mu \geqslant \nu_i.$$

En particulier on aura

$$(3)\qquad \overline{\lim_k}\|x_k^{\nu_i}-x_k^{\nu_{i+1}}\|_k < \frac{1}{2^i}.$$

En vertu de (1) il existe une constante $M < \infty$ telle que

$$(4)\qquad \|x^\nu\| \leqslant M, \qquad \text{pour} \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$

Choisissons une suite croissante d'indices $\{k_i\}_{i\in N}$ satisfaisant aus conditions:

$$(5)\qquad \|x_k^{\nu_i}-x_k^{\nu_{i+1}}\|_k \leqslant \frac{1}{2^{i-1}}, \qquad \text{pour} \qquad k \geqslant k_i;$$

$$(6)\qquad \|x_l^{\nu_i}-\varphi_{k,l}x_k^{\nu_i}\|_l < \frac{1}{2^i}, \qquad \text{pour} \qquad l \geqslant k \geqslant k_i;$$

$$(7)\qquad \|x_k^{\nu_i}\|_k \leqslant M+1, \qquad \text{pour} \qquad k \geqslant k_i.$$

L'existence d'une telle suite $\{k_i\}_{i\in N}$ résulte, respectivement, de (3), de la concordance des suites $\{x_k^\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, de (4) et de la définition de $\|\cdot\|$ dans l'espace X.

Posons:

$$(8)\qquad x_k \stackrel{\mathrm{df}}{=} x_k^{\nu_i}, \qquad \text{pour} \qquad k_i \leqslant k < k_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

(1) Nous allons prouver que la suite $\{x_k\}$, définie par la formule (8) est concondrdante. Pour les indices $l > k$ il existe des $k_j < k_i$ tels que $k_i \leqslant l < k_{i+1}$ et $k_j \leqslant k < k_{j+1}$. On aura:

$$\|x_l-\varphi_{k,l}x_k\|_l = \|x_l^{\nu_i}-\varphi_{k,l}x_l^{\nu_j}\|_l \leqslant \|x_l^{\nu_i}-x_l^{\nu_j}\|_l + \|x_l^{\nu_j}-\varphi_{k,l}x_k^{\nu_j}\|_l.$$

Pour le second terme on aura, en vertu de (6):

$$\|x_l^{\nu_j}-\varphi_{k,l}x_k^{\nu_j}\|_l \leqslant \frac{1}{2^j}, \qquad \text{puisque} \qquad l > k \geqslant k_j.$$

Pour le premier terme on a la limitation:

$$\|x_l^{\nu_i}-x_l^{\nu_j}\|_l \leqslant \sum_{p=j}^{i-1}\|x_l^{\nu_{p+1}}-x_l^{\nu_p}\|_l \leqslant \sum_{p=j}^{i-1}\frac{1}{2^{p-1}} \leqslant \frac{1}{2^{j-2}},$$

puisque $l > k_i > k_{i-1} > \ldots > k_j$, et que pour un tel l a lieu l'inégalité (5).

Finalement on obtient:

(9) $$\|x_l-\varphi_{k,l}x_k\|_l \leqslant \frac{1}{2^{j-2}}+\frac{1}{2^j}\leqslant\frac{1}{2^{j-3}}, \quad \text{pour} \quad l>k\geqslant k_j.$$

Les formules (7) et (9) prouvent que suite $\{x_k\}$ est concordante.

(2) La suite x^ν converge vers x. Pour $\nu>\nu_j$ on a:

(2) $$\overline{\lim_k}\, \|x_k^{\nu_j}-x_k^\nu\|_k \leqslant \frac{1}{2^j}.$$

Si $k_j<k_i\leqslant k<k_{i+1}$, on a:

$$\|x_k^\nu - x_k\|_k = \|x_k^\nu - x_k^{\nu_i}\|_k \leqslant \|x_k^\nu-x_k^{\nu_j}\|_k+\|x_k^{\nu_j}-x_k^{\nu_i}\|_k.$$
$$\leqslant \|x_k^\nu - x_k^{\nu_j}\|_k + \sum_{p=j}^{l-1}\|x_k^{\nu_{p+1}}-x_k^{\nu_p}\|_k.$$

De même que précédemment on trouve, pour $\nu>\nu_j$ et $k_j<\ldots<k_i\leqslant k_1$

$$\|x_k^\nu-x_k\|_k\leqslant\frac{1}{2^{j-1}}+\frac{1}{2^{j-2}}\leqslant\frac{1}{2^{j-3}}.$$

De là on tire:

$$\|x^\nu - x\|\leqslant \frac{1}{2^{j-3}}, \quad \text{pour} \quad \nu>\nu_j.$$

Cette dernière inégalité prouve que $\lim_{\nu\to\infty}\|x^\nu-x\|=0$.

Dans les applications nous profiterons du

THÉORÈME (1.2). *Si les applications* $\varphi_{n,m}: X_n\to X_m$ $(m\geqslant n=1,2,\ldots)$ *satisfont à la condition* (1.4) *et si*

(1.8) $$\bigwedge_{n_0}\bigwedge_{x_{n_0}\in X_{n_0}} \overline{\lim_{m\geqslant n\to\infty}}\, \|\varphi_{n_0,m}x_{n_0}-\varphi_{n,m}\varphi_{n_0,n}x_{n_0}\|_m=0,$$

on a:

(a) *il existe des applications* $\varphi_n: X_n\to X$ $(n=1,2,\ldots)$ *linéaires, bornées, définies par les formules:*

(1.9) $$\bigwedge_{x_n\in X_n}\varphi_n x_n \overset{\mathrm{df}}{=} \overline{\{\varphi_{n,k}x_n\}_{k\geqslant n}} \quad (n=1,2,\ldots).$$

(b) *L'ensemble* $\bigcup_{n=1}^\infty \varphi_n(X_n)$ *est dense dans* X.

Démonstration.

(a) Posons

(1) $$\bigwedge_{x_{n_0}\in X_{n_0}} y_k \overset{\mathrm{df}}{=}\varphi_{n_0,k}x_{n_0}, \quad \text{pour} \quad k\geqslant n_0.$$

De la condition (1.4) on tire:

(2) $$p(\{y_k\}) = \overline{\lim_k}\, \|\varphi_{n_0,k}x_{n_0}\|_k\leqslant\overline{\lim_k}\, \beta_{n_0}\|x_{n_0}\|_{n_0}<\infty.$$

Les formules (2) et (1.8) prouvent que $\{x_k\}\in C$. De là résulte la formule (1.9).

(b) Soit x un élément quelconque de l'espace X et $\{x_k\}_{k\in N}$ une représentation concordante quelconque de cet élément ($x=\overline{\{x_k\}}$). Posons pour $k=1,2,\ldots$:

$$x^{(k)}\overset{\mathrm{df}}{=}\varphi_kx_k=\overline{\{\varphi_{k,l}x_k\}_{l\geqslant k}}\in\bigcup_{n=1}^\infty\varphi_n(x_n).$$

Pour $\varepsilon>0$ il existe un k_ε tel que, si $l\geqslant k\geqslant k_\varepsilon$, $\|x_l-\varphi_{k,l}x_k\|_l\leqslant\varepsilon$, puisque $\{x_k\}$ est concordante. De là résulte:

$$\|x^{(k)}-x\| = \overline{\lim_l}\, \|\varphi_{k,l}x_k-x_l\|_l\leqslant\varepsilon, \quad \text{pour} \quad k\geqslant k_\varepsilon.$$

2. Construction des espaces de Hilbert. Nous allons considérer une suite d'espaces réels de Hilbert $(H_n,(\cdot,\cdot)_n)$ $(n=1,2,\ldots)$ ainsi que les applications $\varphi_{n,m}: H_n\to H_m$ $(m\geqslant n=1,2,\ldots)$.

Appliquant les considérations du n° précédent à l'espace de Banach $(H_n, \|x_n\|_n=\sqrt{(x_n,x_n)_n})$ on peut obtenir (moyennant les hypothèses précédentes) un espace de Banach $H=\overline{\{H_n\}}$. Les théorèmes qui suivent fourniront une réponse à la question: quand existe-t-il dans $\overline{\{H_n\}}$ un produit scalaire donnant la norme d'après la formule (1.7)?

Faisons d'abord quelques remarques préliminaires. Nous admettrons dans ce qui suit que les applications linéaires $\varphi_{n,m}: H_n\to H_m$ $(m\geqslant n=1,2,\ldots)$ satisfont à la condition

(1.4) $$\bigwedge_{n\in N}\bigwedge_{x_n\in X_n}\bigvee_{\beta_n}\bigwedge_{m\geqslant n}\|\varphi_{n,m}x_n\|_m\leqslant\beta_n\|x_n\|_n.$$

De la condition (1.4) résulte l'existence des applications conjuguées $\varphi^*_{n,m}: H_m\to H_n$ $(m\geqslant n=1,2,\ldots)$, définies par la formule

(2.1) $$\bigwedge_{x_n\in H_n}\bigwedge_{y_m\in H_m}(\varphi_{n,m}x_n,y_m)_m=(x_n,\varphi^*_{n,m}y_m)_n.$$

THÉORÈME (2.1). *Si les* $\varphi_{n,m}$ *satisfont aux hypothèses du théorème* (1.2) *et à la condition:*

(2.2) $$\bigwedge_{n\in N}\bigwedge_{x_n\in H_n}\{\text{la suite numérique } \{\|\varphi_{n,m}x_n\|_m\}_{m\geqslant n} \text{ est convergente}\},$$

il existe dans $H=\overline{\{H_n\}}$ *un produit scalaire donné par la formule:*

(2.3) $$(\overline{\{x_n\}},\overline{\{y_n\}})=\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)_n.$$

Démonstration. Soit $x_n, y_n \in H_n$ (n fixé). Pour tout $m \geqslant n$ on a l'égalité

$$(\mathrm{N}_1) \qquad \|\varphi_{n,m}x_n+\varphi_{n,m}y_n\|_m^2+\|\varphi_{n,m}x_n-\varphi_{n,m}y_n\|_m^2 = 2(\|\varphi_{n,m}x_n\|_m^2+\|\varphi_{n,m}y_n\|_m^2),$$

puisque $\varphi_{n,m}x_n$, $\varphi_{n,m}y_n$ sont des éléments de l'espace de Hilbert $(H_m, (\cdot,\cdot)_m)$.

En vertu du théorème (1.2) les suites $\{\varphi_{n,m}x_n\}_{m\geqslant n}$, $\{\varphi_{n,m}y_n\}_{m\geqslant n}$ sont concordantes. L'hypothèse (2.2) assure l'existence des limites des deux membres de l'égalité (N_1) lorsque $m\to\infty$. En vertu du théorème (1.2) ces limites sont respectivement: $\|\varphi_n x_n+\varphi_n y_n\|+\|\varphi_n x_n-\varphi_n y_n\|$ et $2(\|\varphi_n x_n\|+\|\varphi_n y_n\|)$. Par conséquent

$$(\mathrm{N}_2) \qquad \bigwedge_{x_n,y_n\in H_n} \|\varphi_n x_n+\varphi_n y_n\|+\|\varphi_n x_n-\varphi_n y_n\| = 2(\|\varphi_n x_n\|+\|\varphi_n y_n\|).$$

Désignons par $H^{(n)}$ le sous-espace linéaire $\varphi_n(H_n)\subset H=\overline{\{H_n\}}$:

$$(2.4) \qquad \begin{gathered} H^{(n)}=\varphi_n(H_n)\subset H, \\ \bigwedge_{x\in H^{(n)}\subset H}\|x\|^{(n)}=\|x\|. \end{gathered}$$

En vertu de (N_2) et d'un théorème de J. von Neumann il existe dans $H^{(n)}$ un produit scalaire donné par la formule

$$(1) \qquad (\varphi_n x_n,\varphi_n y_n)^{(n)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{4}(\|\varphi_n x_n+\varphi_n y_n\|^2-\|\varphi_n x_n-\varphi_n y_n\|^2).$$

Appliquant d'abord la formule (1.7), puis l'hypothèse (2.2), on obtient:

$$\begin{aligned} (\varphi_n x_n,\varphi_n y_n)^{(n)} &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{4}(\|\varphi_n x_n+\varphi_n y_n\|^2+\|\varphi_n x_n-\varphi_n y_n\|_n^2 \\ &= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{4}(\|\varphi_{n,m}x_n+\varphi_{n,m}y_n\|_m^2-\|\varphi_{n,m}x_n-\varphi_{n,m}y_n\|_m^2) \\ &= \lim_{m\to\infty}(\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n)_m, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la formule (2.3) pour $x=\varphi_n x_n$, $y=\varphi_n y_n\in H$.

Soient $\{x'_m\}_{m\geqslant n}$, $\{y'_m\}_{m\geqslant n}$ des représentations quelconques des éléments $x=\varphi_n x_n=\overline{\{\varphi_{n,m}x_n\}_{m\geqslant n}}$, $y=\varphi_n y_n=\overline{\{\varphi_{n,m}y_n\}_{m\geqslant n}}$, c'est-à-dire:

$$(2) \qquad \overline{\lim_m}\|x'_m-\varphi_{n,m}x_n\|_m=\overline{\lim_m}\|y'_m-\varphi_{n,m}y_n\|_m=0.$$

De l'inégalité

$$(3) \qquad \begin{aligned} &|(x'_m,y'_m)_m-(\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n)_m| \\ &\quad\leqslant \|x'_m-\varphi_{n,m}x_n\|_m\cdot\|\varphi_{n,m}y_n\|_m+\|y'_m-\varphi_{n,m}y_n\|_m-\|\varphi_{n,m}x_n\|_m \end{aligned}$$

on tire, en tenant compte du fait que les suites qui y figurent sont bornées:

$$(4) \qquad \lim_m(x'_m,y'_m)_m=\lim_m(\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n)_m.$$

L'égalité (4) prouve que la définition (2.3) ne dépend pas de la représentation des éléments qui y figurent. Il résulte de ce qui précède que dans l'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi_n(H_n)$, dense dans $H=\overline{\{H_n\}}$, il existe un produit scalaire, donné par la formule (2.3), engendrant dans H une norme donnée par la formule (1.7). L'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi_n(H_n)$ étant dense dans H, ce produit s'étend par continuité à tout l'espace comme il suit: pour $x=\overline{\{x_n\}}$ et $y=\overline{\{y_n\}}$ on pose:

$$(5) \qquad (x,y)\stackrel{\mathrm{df}}{=}\lim_n(\varphi_n x_n,\varphi_n y_n).$$

Soient $\{x'_n\}$ et $\{y'_n\}$ des représentations concordantes, distinctes de $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, des éléments x, y, c'est-à-dire:

$$(6) \qquad \lim_n\|x_n-x'_n\|_n=\lim_n\|y_n-y'_n\|_n=0.$$

Pour $\varepsilon>0$ quelconque il existe un $\overline{n}$ tel que

$$(7) \qquad \|x_n-x'_n\|_n<\varepsilon \quad\text{et}\quad \|y_n-y'_n\|_n<\varepsilon, \quad\text{pour}\quad n\geqslant\overline{n};$$

$$(8) \qquad \|\varphi_{n,m}x'_n-x'_m\|_m\leqslant\varepsilon; \quad \|\varphi_{n,m}x_n-x_m\|_m\leqslant\varepsilon, \quad\text{pour}\quad m\geqslant n\geqslant\overline{n},$$

$$(9) \qquad C_1=\sup_{m\geqslant n=1,2,\ldots}[\|\varphi_{n,m}x_n\|_m, \|\varphi_{n,m}x'_n\|_m]<\infty.$$

Des formules (6)–(9) on tire:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \|\varphi_n x_n-\varphi_n x'_n\| &= \overline{\lim_m}\|\varphi_{n,m}x_n-\varphi_{n,m}x'_n\|_m \leqslant \overline{\lim_m}\|\varphi_{n,m}x_m-x_m\|_m+ \\ &\quad+\overline{\lim_m}\|\varphi_{n,m}x'_n-x'_m\|_m+\overline{\lim_m}\|x_m-x'_m\|_m\leqslant 2\varepsilon, \end{aligned}$$

pour $n\geqslant\overline{n}$. De la formule (10) résulte:

$$(11) \qquad \lim_n\|\varphi_n x_n-\varphi_n x'_n\|=0.$$

On démontre de même que

$$(12) \qquad \lim_n\|\varphi_n y_n-\varphi_n y'_n\|=0.$$

Les égalités (11) et (12) prouvent que la définition (5) est correcte.

Il ne reste qu'à établir la formule (2.3). Soit, pour $\varepsilon>0$, $\overline{n}$ un indice tel que les conditions (8) et (9) soient vérifiées pour $\{x_n\}$ et $\{y_n\}$, et que

$$(13) \qquad |(x,y)-(\varphi_n x_n,\varphi_n y_n)|\leqslant\varepsilon, \quad\text{pour}\quad n\geqslant\overline{n}.$$

Il existe un $\overline{m}$ tel que

$$(14)\qquad |(x,y)-(\varphi_{\bar n,m}x_{\bar n},\varphi_{\bar n,m}y_{\bar n})_m|\leqslant 2\varepsilon,\quad \text{pour}\quad n\geqslant \overline{m}.$$

Pour $m\geqslant\overline{m}$ on a l'inégalité:

$$(15)\qquad \begin{aligned} &|(x,y)-(x_m,y_m)_m|\\ &\quad\leqslant |(x,y)-(\varphi_{\bar n,m}x_{\bar n},\varphi_{\bar n,m}y_{\bar n})_m|+|(x_m,y_m)_m-(\varphi_{\bar n,m}x_{\bar n},\varphi_{\bar n,m}y_{\bar n})_m|\\ &\quad\overset{(14)}{\leqslant} 2\varepsilon+\|x_m-\varphi_{\bar n,m}x_{\bar n}\|_m\cdot\|y_m\|_m+\|\varphi_{\bar n,m}x_{\bar n}\|_m\cdot\|\varphi_{\bar n,m}y_{\bar n}-y_m\|_m\\ &\quad\overset{(8),(9)}{\leqslant} 2\varepsilon+\varepsilon\cdot\sup_m\|y_m\|_m+C\cdot\varepsilon. \end{aligned}$$

($\{y_m\}$ étant concordante, on a évidemment $\sup\limits_m\|y_m\|_m<\infty$). De l'inégalité (15) résulte la formule

$$(2.3)\qquad (x,y)=\lim_m(x_m,y_m)_m.$$

Si donc les $\varphi_{n,m}$ ne satisfont pas aux hypothèses du théorème (1.2), $H=\overline{\{H_n\}}$ est aussi, dans certains cas, un espace de Hilbert. On a:

THÉORÈME (2.2). *Si les applications $\varphi_{n,m}\colon H_n\to H_m$ $(m\geqslant n=1,2,\ldots)$ satisfont à la condition*

$$(2.5)\qquad \bigwedge_{\substack{x_n\in X_n\\ n=1,2,\ldots}}\ \bigwedge_{m\geqslant n}\|x_n-\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}x_n\|_n\leqslant\gamma_n\|x_n\|_n,$$

où $\lim\limits_n\gamma_n=0$; *ou à la condition équivalente*

$$(2.6)\qquad \bigwedge_{\substack{x_n,y_n\in X_n\\ n=1,2,\ldots}}\ \bigwedge_{m\geqslant n}|(\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n)_m-(x_n,y_n)|\leqslant\gamma_n\|x_n\|,$$

il existe dans l'espace $H=\overline{\{H_n\}}$ un produit scalaire défini par la formule

$$(2.3)\qquad (\overline{\{x_n\}},\overline{\{y_n\}})\overset{\mathrm{df}}{=}\lim_n(x_n,y_n)_n,$$

engendrant la norme (1.7).

Démonstration. 1) Nous établirons d'abord l'équivalence de (2.5) et (2.6).

(2.5) ⇒ (2.6):

$$|(\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n)_m-(x_n,y_n)|=|(x_n,\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n)_n-(x_n,y_n)_n|\leqslant\gamma_n\|x_n\|_n\|y_n\|_n$$

(2.6) ⇒ (2.5): Remplaçant dans (2.6) x_n par $y_n-\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n$, on obtient:

$$(1)\qquad \begin{aligned} L&=\big|(\varphi_{n,m}(y_n-\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n),\varphi_{n,m}y_n)_m-(y_n-\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n,y_n)_n\big|\\ &\leqslant\gamma_n\|y_n-\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n\|_n\cdot\|y_n\|_n. \end{aligned}$$

Transformons le premier membre de l'inégalité (1) comme il suit:

$$(2)\qquad \begin{aligned} L&=|(y_n-\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n,\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n)_n-(y_n-\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n,y_n)_n|\\ L&=|(y_n-\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n,\varphi^*_{n,m}\varphi_{n,m}y_n-y_n)_n|. \end{aligned}$$

De (1) et (2) résulte l'implication (2.6) ⇒ (2.5).

2) Nous établirons maintenant la formule (2.3). Soient $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ des représentations concordantes des éléments $x,y\in H$. Nous allons montrer que la suite $(x_n,y_n)_n$ satisfait à la condition de Cauchy. Posons

$$(3)\qquad C=\sup_{\substack{n=1,2,\ldots\\ m\geqslant n}}[\|x_n\|_n,\|y_n\|_n,\|\varphi_{n,m}x_n\|_m,\|\varphi_{n,m}y_n\|_m].$$

Comme $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sont concordantes, on a $C<\infty$. Pour $\varepsilon>0$ il existe un $\bar n$ tel que

$$(4)\qquad \begin{aligned} &\|\varphi_{n,m}x_n-x_m\|_m\leqslant\varepsilon,\\ &\|\varphi_{n,m}y_n-y_m\|_m\leqslant\varepsilon,\\ &\gamma_n\leqslant\varepsilon, \end{aligned}$$

pourvu que $m\geqslant n\geqslant\bar n$.

De (4) et de (2.6) résultent les inégalités:

$$\begin{aligned} &|(x_m,y_m)_m-(x_n,y_n)_n|\\ &\quad\leqslant|(x_m,y_m)_m-(\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n)_m|+|(\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n)_m-(x_n,y_n)_n|\\ &\quad\leqslant|(x_m-\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n)_m|+|(\varphi_{n,m}x_n,\varphi_{n,m}y_n-y_m)_m|+\gamma_n\|x_n\|_n\cdot\|y_n\|_n\\ &\quad\leqslant\varepsilon\cdot C+C\cdot\varepsilon+\varepsilon\cdot C^2, \end{aligned}$$

pour $m\geqslant n\geqslant\bar n$. Cela prouve que dans (2.3) la limite existe.

3) La légitimité de la définition (2.3) a été établie dans la démonstration du théorème (2.1).

4) La formule (2.3) définit un produit scalaire dans $H=\overline{\{H_n\}}$. Par exemple, pour $x=\overline{\{x_n\}}$, $y=\overline{\{y_n\}}$, $z=\overline{\{z_n\}}\in H$ on a:

$$\begin{aligned} (x,y+z)&\overset{\mathrm{df}}{=}\lim_n(x_n,y_n+z_n)_n=\lim_n[(x_n,y_n)_n+(x_n,z_n)_n]\\ &=\lim_n(x_n,y_n)_n+\lim_n(x_n,z_n)_n\overset{\mathrm{df}}{=}(x,y)+(x,z). \end{aligned}$$

5) Le produit scalaire ainsi défini engendre la norme (1.7):

$$(x,x)\overset{\mathrm{df}}{=}\lim_n(x_n,x_n)_n=\overline{\lim_n}\|x_n\|_n^2=\|x\|^2.$$

Dans le théorème suivant nous indiquerons un procédé pour "approcher" les fonctionnelles linéaires bornées sur $H=\overline{\{H_n\}}$.

Soit une suite $\{x_n\} \in \boldsymbol{P}(X_n)$ (la suite $\{x_n\}$ n'étant pas supposée concordante). Il peut arriver que la condition suivante soit remplie:

(2.7) $$\bigwedge_{\{h_n\}\in C} \lim_n (x_n, h_n)_n \text{ existe (est un nombre réel).}$$

Si la condition (2.7) est remplie, on peut poser:

(2.8) $$\bigwedge_{h=\overline{\{h_n\}}\in H} g(h) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_n (x_n, h_n)_n.$$

De même que dans la démonstration du théorème (2.1), la définition (2.8) ne dépend pas de la représentation concordante $\{h_n\}$ de l'élément h (si $\{x_n\}$ est fixée). On voit aisément que (2.8) définit une fonctionnelle linéaire bornée g: $H = \overline{\{H_n\}} \to R$. En effet, soit $h = \overline{\{h_n\}}$, $h^{(1)} = \overline{\{h_n^{(1)}\}}$. De la définition (2.8) on tire:

1) $g(\alpha h+\beta h^{(1)}) = \lim\limits_n (x_n, \alpha h_n+\beta h_n^{(1)})_n = \lim\limits_n \alpha (x_n, h_n)_n + \lim\limits_n \beta (x_n, h_n)_n$ $= \alpha g(h)+\beta g(h^{(1)})$;

2) $|g(h)| = |\lim\limits_n (x_n, h_n)_n| = \lim\limits_n (x_n, h_n)_n \leqslant \overline{\lim\limits_n} \|x_n\|_n \cdot \overline{\lim\limits_n} \|h_n\|_n$;

d'où l'on tire:

$$|g(h)| \leqslant p(\{x_n\}) \|h\|.$$

Des formules 1) et 2) il résulte, en vertu d'un théorème de Riesz, que dans $H = \overline{\{H_n\}}$ il existe une représentation $y \in H$ de la fonctionnelle (2.8), c'est-à-dire que

(2.9) $$(y, h) = g(h) = \lim_n (x_n, h_n)_n.$$

Récapitulant les considérations précédentes on obtient le Corollaire (2.1).

Si les applications $\varphi_{n,m}$: $H_n \to H_m$ sont telles que le produit scalaire dans $H = \overline{\{H_n\}}$ est défini par la formule (2.3), si la suite $\{x_n\} \in \boldsymbol{P}(X_n)$ et si la condition (2.7) est remplie, il existe un $y \in H$ tel que

(2.9) $$\bigwedge_{h\in H} (y, h) = \lim_n (x_n, h_n)_n.$$

Nous établirons maintenant une condition nécessaire et suffisante pour que la formule (2.8) définisse une fonctionnelle linéaire bornée sur $H = \overline{\{H_n\}}$.

Théorème (2.3). *Si les applications $\varphi_{n,m}$: $H_n \to H_m$ satisfont aux hypothèses du théorème (1.2) et à la condition (2.6) dans le théorème (2.2) et si la suite $\{x_n\}$ est telle que*

(*) $$\{x_n\} \in \boldsymbol{P}(H_n),$$

(**) $$\bigvee_{C<\infty} \bigwedge_{n=1,2,\ldots} \|\varphi_n x_n\| \leqslant C,$$

la condition (2.7) est vérifiée si et seulement si la suite $\varphi_n x_n \in H$ $(n = 1, 2, \ldots)$ est faiblement convergente vers le $y \in H = \overline{\{H_n\}}$ défini par la formule (2.9).

Démonstration. Pour montrer que la condition énoncée dans la conclusion du théorème est nécessaire, supposons remplie (2.7). Nous allons montrer que

(1) $$\bigwedge_{f=\overline{\{f_n\}}\in H} \lim_n (\varphi_n x_n - y, f) = 0.$$

On a les limitations:

(2) $$|(\varphi_n x_n - y, f)| \leqslant |(\varphi_{n,m} x_n, f_m)_m - (\varphi_n x_n, f)| + \\ + |(\varphi_{n,m} x_n, f_m)_m - (x_n, f_n)_n| + |(y, f) - (x_n, f_n)_n|$$

et

(2′) $$|\varphi_n x_n - y, f)| \leqslant |(\varphi_{n,m} x_n, f_m)_m - (\varphi_n x_n, f)| + \\ + |(\varphi_{n,m} x_n, f_m)_m - (\varphi_{n,m} x_n, \varphi_{n,m} f_n)_m| + \\ + |(\varphi_{n,m} x_n, \varphi_{n,m} f_n)_m - (x_n, f_n)_n| + |(y, f) + (x_n, f_n)_n|.$$

Profitant de l'hypothèse (2.6) on obtient:

(3) $$|(\varphi_n x_n - y, f)| \leqslant |(\varphi_{n,m}, x_n, f_m)_m - (\varphi_n x_n, f)| + \\ + \|\varphi_{n,m} x_n\|_m \cdot \|f_m - \varphi_{n,m} f_n\|_m + \gamma_n \|x_n\| \cdot \|f_n\|_n + \\ + |(y, f) - (x_n, f_n)_n|.$$

Pour $\varepsilon > 0$ il existe un n_ε tel que pour $n \geqslant n_\varepsilon$ sont remplies les inégalités:

(4) $$\|f_m - \varphi_{n,m} f_n\|_m \leqslant \varepsilon, \quad \text{pour} \quad m \geqslant n \geqslant n_\varepsilon,$$

puisque $\{f_n\} \in C$,

(5) $$\gamma_n \|x_n\|_n \cdot \|f_n\|_n \leqslant \varepsilon,$$

puisque l'on a (*) et $\{f_n\} \in C$, et que $\lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n = 0$,

(6) $$|(y, f) - (x_n, f_n)_n| \leqslant \varepsilon, \quad \text{en vertu de (2.7).}$$

En faisant tendre m vers l'infini dans (3), on obtient, moyennant (4), (5), (6) et (**), l'inégalité

$$|(\varphi_n x_n - y, f)| \leqslant 0 + C\cdot\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, \quad \text{pour} \quad n \geqslant n_\varepsilon,$$

dont découle la convergence faible de la suite $\varphi_n x_n$ vers y.

Pour prouver que la condition énoncée dans la conclusion du théorème est suffisante, supposons que $\{x_n\}$ satisfasse à (*), (**) et que la suite $\varphi_n x_n$ soit faiblement convergente vers $y \in H = \overline{\{H_n\}}$. Soit h un élément quelconque de l'espace H et $\{h_n\}$ sa représentation concordante. Nous allons prouver que

(7) $$\lim_n (x_n, h_n)_n = (y, h).$$

On a l'inégalité:

$$|(x_n, h_n)_n - (y, h)| \leqslant |(x_n, h_n)_n - (\varphi_{n,m}x_n, \varphi_{n,m}h_n)_m| + \\ + |(\varphi_{n,m}x_n, \varphi_{n,m}h_n - h_m)_m + |(\varphi_{n,m}x_n, h_m)_m - (\varphi_n x_n, h)| + \\ + |(\varphi_n x_n, h) - (y, h)|.$$

Par un raisonnement pareil à celui qui a été fait dans la première partie de la démonstration on obtient la formule (7).

Remarque (2.1). Soit G un ensemble dense dans $H = \overline{\{H_n\}}$. Désignons par $\mathscr{G}$ l'ensemble des représentations concordantes des éléments de l'ensemble G. Le théorème (2.3) reste vrai si (2.7) est remplie pour $\{h_n\} \in \mathscr{G}$.

Remarque (2.2). Si les hypothèses du théorème (1.2) sont satisfaites et si le produit scalaire dans $H = \{H_n\}$ est donné par la formule (2.3), la suite

$$x_n \overset{\text{df}}{=} \varphi_n^* y \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

satisfait pour $y \in H$ quelconque à la condition (2.7).

En effet, on a pour tout $h = \overline{\{h_n\}} \in H$:

$$\lim_n (x_n, h_n)_n \overset{\text{df}}{=} \lim_n (\varphi_n^* y, h_n)_n \overset{\text{df. } \varphi_n^*}{=} \lim_n (y, \varphi_n^* h_n) = (y, h),$$

puisque l'on a, en vertu du théorème (1.2), $\lim_n \|h - \varphi_n h_n\|_n = 0$.

3. Application. Nous indiquerons dans ce qui suit une méthode de de solution approximative d'un problème variationnel aux dérivées partielles ([2], [3]). L'élément $\bar{x} \in H = \overline{\{H_n\}}$ minimalisant la fonctionnelle Φ: $H \to R$ satisfait à la condition:

(3.1) $$\bigwedge_{h \in H} \psi(\bar{x}, h) = 0,$$

où ψ est la dérivée de la fonctionnelle Φ.

Nous allons chercher une représentation concordante $\{x_n\}$ ($x_n \in H_n$; $n = 1, 2, \ldots$) de l'élément $\bar{x}$ qui satisfait à (3.1). Les éléments x_n seront définis par les équations

$(3.1)_n$ $$\bigwedge_{h_n \in H_n} \psi_n(x_n, h_n) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

pour certaines fonctionnelles ψ_n: $H_n \times H_n \to R$, "approchant" la fonctionnelle ψ.

THÉORÈME (3.1). Hypothèses:

(o) *Les applications* $\varphi_{n,m}$: $H_n \to H_m$ ($m \geqslant n = 1, 2, \ldots$) *satisfont aux hypothèses du théorème* (1.2) *et le produit scalaire dans* $H = \overline{\{H_n\}}$ *est donné par la formule* (2.3).

Soit une suite de fonctionnelles ψ_n: $H_n \times H_n \to R$ ($n = 1, 2, \ldots$) *satisfaisant aux conditions:*

(a) *pour* $x_n \in H_n$ *quelconque fixé,* $\psi_n(x_n, \cdot)$ *est une fonctionnelle linéaire bornée sur* H_n $(\psi_n(x_n, \cdot) \in H_n^* = H_n)$;

(b) *il existe une constante commune* $L < \infty$ *telle que*

$$\bigwedge_{x_n, y_n, h_n \in H_n} |\psi_n(x_n, h_n) - \psi_n(y_n, h_n)| \leqslant L \|x_n - y_n\|_n \cdot \|h_n\|_n$$

pour $n = 1, 2, \ldots$ *et les fonctionnelles* $\psi_n(0, \cdot)$ *sont équibornées;*

(c) $$\bigvee_{\alpha > 0} \bigwedge_{h \in N} \bigwedge_{x_n, y_n \in H_n} \psi_n(x_n, x_n - y_n) - \psi_n(y_n, x_n - y_n) \geqslant \alpha \|x_n - y_n\|_n^2;$$

(d) $$\bigwedge_{n \in N} \bigwedge_{x_n, h_n \in H_n} \bigwedge_{\varrho \geqslant n} |\varphi_\varrho(\varphi_{n,\varrho}x_n, \varphi_{n,\varrho}h_n) - \psi_n(x_n, h_n)| \leqslant \delta_n \|x_n\|_n \cdot \|h_n\|_n, \text{ où } \lim_n \delta_n = 0,$$

(e) *il existe une fonction croissante* M: $R^+ \to R^+$ *telle que*

$$\bigwedge_n \bigwedge_{p \geqslant n} \sup_{\|x\|_n \leqslant r} \|\psi_p(\varphi_{n,p}x_n, \cdot)\|_p \leqslant M(r).$$

Conclusion: *Il existe une fonctionnelle* ψ: $H \times H \to R$ $(H = \overline{\{H_n\}})$ *définie par la formule:*

(1) $$\bigwedge_{x, h \in H} \psi(x, h) \overset{\text{df}}{=} \lim_{n \to \infty} \psi_n(x_n, h_n),$$ *où* $x = \overline{\{x_n\}}$, $h = \overline{\{h_n\}}$, *et satisfaisant aux conditions:*

(2) $\psi(x, \cdot)$ *est linéaire bornée sur* H *pour tout* $x \in H$ *fixé;*

(3) $$\bigwedge_{x, y, h \in H} |\psi(x, h) - \psi(y, h)| \leqslant \|x - y\| \cdot \|h\|;$$

(4) $$\bigwedge_{x, y \in H} \psi(x, x - y) - \psi(y, x - y) \geqslant \alpha \|x - y\|^2;$$

(5) *dans tout espace* H_n *il existe exactement un* x_n *tel que pour tout* $h_n \in H_n$ *on a*

$(3.1)_n$ $$\psi_n(x_n, h_n) = 0;$$

(6) *la suite* $\varphi_n x_n$ (x_n *définie dans* (5)) *converge vers* $x \in H = \overline{\{H_n\}}$, *qui satisfait à*

(3.1) $$\bigwedge_{h \in H} \psi(x, h) = 0.$$

Avant de démontrer le théorème (3.1) nous allons rappeler quelques faits résultant de l'hypothèse (o), établis dans les paragraphes 1 et 2.

1) Il existe des applications φ_n: $H_n \to H = \overline{\{H_n\}}$ ($n = 1, 2, \ldots$) définies par la formule:

(1.9) $$\bigwedge_{x_n \in H_n} \varphi_n x_n \overset{\text{df}}{=} \overline{\{\varphi_{n,k}x_n\}}_{k \geqslant n}.$$

2) L'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty}\varphi_n(H_n)$ est dense dans $\overline{\{H_n\}}$, de sorte que pour toute représentation concordante $\{x_n\}$ de l'élément $x\in H$ la suite $\varphi_n x_n\in H$ $(n=1,2,\ldots)$ est fortement convergente vers x.

3) Il existe des applications conjuguées $\varphi^*_{n,m}\colon H_m\to H_n$ et $\varphi^*_n\colon H\to H_n$, définies par les formules

$$\text{(2.1)}\qquad \begin{gathered}\bigwedge_{x_n\in H_n}\ \bigwedge_{y_m\in H_m}(\varphi_{n,m}x_n,\,y_m)_m=(x_n,\,\varphi^*_{n,m}y_m)_n,\\ \bigwedge_{x_n\in H_n}\ \bigwedge_{y\in H}(\varphi_n x_n,\,y)=(x_n,\,\varphi^*_n y)_n.\end{gathered}$$

Passons maintenant à la démonstration du théorème (3.1). Soit $\{x_n\}$ une suite concordante représentant l'élément $x\in H$.

En vertu de (a) et d'un théorème de Riesz il existe des opérations $F_n\colon H_n\to H_n$ telles que

$$\psi_n(x_n,\,h_n)=\big(F_n(x_n),\,h_n\big)_n\qquad(n=1,2,\ldots).$$

De l'hypothèse (b) il résulte que les opérations F_n satisfont à la condition de Lipschitz avec la même constante L et que la suite $\|F_n(x_n)\|_n$ est bornée, pourvu que $\|x_n\|$ soit borné.

La condition (d) peut maintenant être écrite sous la forme:

$$\big|\big(\varphi^*_{n,p}F_p(\varphi_{n,p}x_n)-F_n(x_n),\,h_n\big)_n\big|\leqslant\delta_n\|x_n\|_n\cdot\|h_n\|_n.$$

En mettant $h_n=\varphi^*_{np}F_p(\varphi_{n,p},x_n)-F_n(x_n)$ dans la derniére inégalité on obtient

$$\text{(3.2)}\qquad \|\varphi^*_{n,p}F_p(\varphi_{n,p}x_n)-F_n(x_n)\|_n\leqslant\delta_n\|x_n\|_n.$$

En vertu de (3.2) on a, pour toute suite concordante $\{h_n\}$:

$$\begin{aligned}&\lim_{p\geqslant n\to\infty}\big|\big(F_p(x_p),\,h_p\big)_p-\big(F_n(x_n),\,h_n\big)_n\big|\\ &\leqslant\lim_{p\geqslant n\to\infty}\big(\|F_p(x_p)\|_p\cdot\|h_p-\varphi_{n,p}h_n\|_p+L\|x_p-\varphi_{n,p}x_n\|_p\cdot\|\varphi_{n,p}h_n\|_p+\delta_n\|x_n\|_n\cdot\|h_n\|_n\big)\\ &=p\big(\{F_n(x_n)\}\big)\cdot 0+L\cdot 0\cdot\|h\|+0\cdot p(\{x_n\})\cdot\|h\|=0.\end{aligned}$$

Cela veut dire que la suite $\{F_n(x_n)\}$ satisfait aux hypothèses du corollaire (2.1). Il existe donc un élément de l'espace $H=\{H_n\}$ que nous désignerons par $F(x)$, tel que

$$\text{(1')}\qquad \bigwedge_{\{h_n\}\in C}\lim_{n\to\infty}\psi_n(x_n,\,h_n)_n=\lim_{n\to\infty}\big(F_n(x_n),\,h_n\big)_n=\big(F(x),\,h\big),$$

ou autrement

$$\psi(x,\,h)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x_n,\,h_n)_n.$$

Les conditions (2), (3) et (4) sont vérifiées, en effet:

$$\text{(2)}\qquad \|\psi(x,\cdot)\|=\|F(x)\|\leqslant\overline{\lim}\,\|F_n(x_n)\|_n;$$

$$\text{(3)}\qquad \begin{aligned}|\psi(x,h)-\psi(y,h)|&=\lim_n|\psi_n(x_n,h_n)-\psi_n(y_n,h_n)|\\ &\leqslant\overline{\lim_n}\,L\|x_n-y_n\|_n\cdot\overline{\lim_n}\,\|h_n\|_n=L\|x-y\|\cdot\|h\|;\end{aligned}$$

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned}\psi(x,x-y)-\psi(y,x-y)&=\lim_n\big(\psi_n(x_n,x_n-y_n)-\psi_n(y_n,x_n-y_n)\big)\\ &\geqslant\overline{\lim_n}\,a\|x_n-y_n\|_n^2=a\|x-y\|.\end{aligned}$$

L'existence et l'unicité des solutions des équations

$$\text{(3.1')}\qquad F(x)=0\quad\text{et}\quad F_n(x_n)=0\quad(n=1,2,\ldots)$$

résulte de [2].

Nous allons montrer que la suite qui satisfait aux équations

$$F_n(x_n)=0\qquad(n=1,2,\ldots)$$

est une représentation concordante de l'élément $x\in H$ satisfaisant à

$$F(x)=0.$$

De (c) il résulte que F_n^{-1} existent et satisfont à la condition de Lipschitz avec la constante $1/\sqrt{a}$. De la seconde partie de l'hypothèse (b) il résulte que la suite $x_n=F_n^{-1}(0)$ $(n=1,2,\ldots)$, est bornée.

Posons:

$$r=\sup_n\|F_n^{-1}(0)\|_n.$$

En vertu de l'hypothèse (e) on aura:

$$\text{(7)}\qquad \sup_{p\geqslant n=1,2\ldots}\|F_p(\varphi_{n,p}x_n)\|_p\leqslant M(r)<\infty.$$

Soit $h\in H$ un élément quelconque et $\{h_n\}$ une représentation concordante quelconque de cet élément. Moyennant (3.2) et (3.1') on obtient l'inégalité:

$$\text{(8)}\qquad \big|\big(F_p(\varphi_{n,p}x_n),\,h_p\big)_p\big|\leqslant\|F_p(\varphi_{n,p}x_n)\|_p\cdot\|h_p-\varphi_{n,p}h_n\|_p+\delta_n\|x_n\|_n\cdot\|h_n\|_n.$$

Faisant tendre p vers ∞ dans (8) on obtient (en vertu de (1') et (7)):

$$\text{(9)}\qquad \big|\big(F(\varphi_n x_n),\,h\big)\big|\leqslant M(r)\|h-\varphi_n h_n\|+\delta_n\|x_n\|_n\cdot\|h_n\|_n.$$

En tenant compte de l'inégalité (9), du fait que la suite $\|F(\varphi_n x_n)\|$ est bornée (ce qui résulte de (7)), que $\{h_n\}$ est concordante ($\Rightarrow\|h-\varphi_n h_n\|\to 0$), de l'hypothèse (d) ($\lim\delta_n=0$) et du fait que les suites $\|x_n\|_n$ et $\|h_n\|_n$ sont bornées, on trouve que la suite $F(\varphi_n x_n) \in H$ converge faiblement vers zéro.

Pour $\{x_n\}$ satisfaisant à (3.1′) on tire de (3.2):

$$\|\varphi_n^* F(\varphi_n x_n)\| \leqslant \delta_n \|x_n\|_n. \tag{10}$$

Pour x satisfaisant à l'équation (3.1′) $F(x) = 0$ on a, en vertu de (4) et (10):

$$\begin{aligned} \lim_n \alpha \|\varphi_n x_n - x\|^2 &\leqslant \lim_n \big(F(\varphi_n x_n) - F(x),\, \varphi_n x_n - x\big) \\ &= -\lim_n \big(F(\varphi_n x_n),\, x\big) + \lim_n \big(F(\varphi_n x_n),\, \varphi_n x_n\big) \\ &= 0 + \lim_n \big(\varphi_n^* F(\varphi_n x_n),\, x_n\big) \\ &\leqslant \overline{\lim_n}\, \delta_n \|x_n\|_n^2 = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

De (11) on déduit le dernier point de la conclusion:

$$\lim_n \|\varphi_n x_n - x\| = 0. \tag{6}$$

Du théorème que nous venons d'établir résulte le suivant, plus facile dans les applications.

THÉORÈME (3.1′). *Supposons vérifiées les hypothèses:*

(o′) *les applications* $\varphi_{n,m}\colon H_n \to H_m$ *satisfont aux hypothèses du théorème* (1.2) *et à la condition* (2.5) ($\Leftrightarrow$ (2.6)); (a), (b), (c), (d) *dans le théorème* (3.1).

Dans ces conditions les points (1), (2), (3), (4), (5) *de la conclusion du théorème* (3.1) *sont vrais et*

(6′) *la suite définie dans* (5) *est concordante et* $x = \overline{\{x_n\}}$ *satisfait à*

$$\bigwedge_{h \in H} \psi(x, h) = 0. \tag{3.1}$$

Démonstration. 1) En vertu du théorème (2.1) on a l'implication:
1) En vertu du théorème (2.1) on a l'implication:

$$(\mathrm{o}') \Rightarrow (\mathrm{o}).$$

2) De la condition (2.6) il résulte qu'il existe des constantes $\beta', \beta > 0$ telles que

$$\beta' \|x_n\|_n \leqslant \|\varphi_n x_n\| \leqslant \beta \|x_n\|_n. \tag{3.3}$$

De (3.3) et de l'égalité

$$\lim_n \|\varphi_n x_n - x\| = 0$$

il résulte que $\{x_n\}$ est une représentation concordante de l'élément x.

3) En vertu de (3.3) la suite $\{x_n\}$ bornée et les opérations équilipschitziennes F_n vérifient la condition (7) dans la démonstration du théorème précédent:

$$\sup_{p \geqslant n = 1, 2, \ldots} \|F_p(\varphi_{n,p} x_n)\|_n < \infty. \tag{7}$$

Remarque (3.1). La conclusion du théoréme (3.1) reste vraie si l'on remplace l'hypothèse (d) par l'hypothèse

$$(\mathrm{d}_1) \qquad \bigwedge_{\substack{x_n \in H_n \\ h_p \in H_p}} |\psi_p(\varphi_{n,p} x_n,\, h_p) - \psi_n(x_n,\, \varphi_{n,p}^* h_p)| \leqslant \varrho_n \|x_n\|_n \cdot \|h_p\|_p, \text{ où } \lim_{n\to\infty} \varrho_n = 0,$$

ou par l'hypothèse

$$(\mathrm{d}_2) \qquad \bigwedge_{h_n x_n \in H_n} |\psi_p(\varphi_{n,p} x_n,\, \varphi_{n,p} h_n) - \psi_n(x_n,\, h_n)| \leqslant \lambda_n p_n(x_n) \|h_n\|_n,$$

où $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ et p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sont des fonctionnelles telles que $\sup\limits_n p_n(x_n) < \infty$, pourvu que $\sup\limits_n \|x_n\|_n < \infty$.

Nous indiquerons encore une méthode approchée de solution du problème (3.1), dans laquelle les solutions approchées s'obtiennent directement dans l'espace de Hilbert $H = \overline{\{H_n\}}$. Cette méthode nous a été suggérée par T. Leżański.

Nous supposerons dans ce qui suit que les hypothèses du théorème (3.1) sont vérifiées.

Admettons la notation:

$$H^{(n)} \overset{\mathrm{df}}{=} \varphi_n(H_n) \subset \overline{\{H_n\}}.$$

En vertu des hypothèses admises pour $\varphi_{n,m} H^{(n)} \subset H = \overline{\{H_n\}}$ est un espace de Hilbert (avec restriction du produit scalaire dans $\overline{\{H_n\}}$).

Le raisonnement que nous avons fait dans la démostration du théorème (3.1) nous permet de définir la fonctionnelle $\psi_{(n)}\colon H^{(n)} \times H^{(n)} \to R$ comme il suit:

$$(\alpha) \qquad \bigwedge_{x_n, h_n \in H_n} \psi_{(n)}(\varphi_n x_n,\, \varphi_n h_n) \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{k\to\infty} \psi_k(\varphi_{n,k} x_n,\, \varphi_{n,k} h_n).$$

Appliquant à la fonctionnelle $\psi_{(n)}$ les considérations du travail [2] on peut trouver un $x^{(n)} \in H^{(n)}$ tel que

$$(\beta) \qquad \bigwedge_{h^{(n)} \in H^{(n)}} \psi_{(n)}(x^{(n)},\, h^{(n)}) = 0.$$

Nous allons montrer que la suite $x^{(n)} \in H^{(n)} \subset H$ $(n = 1, 2, \ldots)$ converge vers la solution de l'équation:

$$F(x) = 0.$$

En vertu d'un théorème de Riesz il existe une opération $F_{(n)}\colon H^{(n)}\to H^{(n)}$ telle que

$$(\gamma)\qquad \bigwedge_{x^{(n)}h^{(n)}\in H^{(n)}} \psi_{(n)}(x^{(n)}, h^{(n)}) = \big(F_{(n)}(x^{(n)}), h^{(n)}\big).$$

L'égalité (α) peut être mise sous la forme:

$$\bigwedge_{x^{(n)}h^{(n)}\in H^{(n)}} \big(F_{(n)}(x^{(n)}), h^{(n)}\big) = \big(F(x^{(n)}), h^{(n)}\big),$$

d'où l'on tire la formule

$$(\delta)\qquad F_{(n)}(x^{(n)}) = \mathrm{proj}|_{H^{(n)}} F(x^{(n)}).$$

Comme auparavant, on constate que les $F_{(n)}^{-1}$ satisfont à la condition de Lipschitz avec constante $1/\sqrt{a}$ et que les suites $x^{(n)} \overset{\text{df}}{=} F_n^{-1}(0)$ et $F(x^{(n)})$ sont bornées.

De (δ) il résulte que $F(x^{(n)})$ est orthogonale à $H^{(n)}\subset H$ (puisque $F_{(n)}(x^{(n)}) = 0$). La suite $F(x^{(n)})$, étant bornée, est faiblement convergente vers 0 (car $\bigcup_{n=1}^{\infty} H^{(n)}$ est un sous-ensemble dense dans H).

Supposons que $x\in H$ satisfasse à l'équation

$$(3.1')\qquad F(x) = 0.$$

Alors:

$$\lim_{n\to\infty} a\|x^{(n)}-x\|^2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\big(F(x^{(n)})-F(x), x^{(n)}-x\big) \leqslant \lim_{n\to\infty}\big|\big(F(x^{(n)}), x\big)\big| = 0,$$

puisque $\big(F(x^{(n)}), x^{(n)}\big) = 0$, et $F(x^{(n)})$ converge faiblement vers 0. Nous avons ainsi démontré le

Théorème (3.2). *Si les hypothèses du théorème* (3.1) *sont vérifiées, la suite*

$$x^{(n)} = F_{(n)}^{-1}(0) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

où $F_{(n)}$ sont définis par les formules (γ), *est fortement convergente vers l'élément $x\in H$ qui satisfait à* (3.1), $\bigwedge_{h\in H}\psi(x, h) = 0$.

Nous indiquerons maintenant, en prenant comme exemples les fonctionnelles qui interviennent dans les problèmes variationnels aux dérivées partielles, une réalisation numérique du théorème (3.1).

Nous commencerons par un exemple de représentation de l'espace $H_0^1(\Omega)$ sous forme d'une suite concordante d'espaces de Hilbert H_n à un nombre fini de dimensions.

Exemple (3.1). Soient H_n ($n = 1, 2, \ldots$) les espaces de suites réelles à m indices:

$$x_n = \{x_n^{i_1,\ldots,i_m}\}_{i_1=0,\ldots,i_m=0}^{2^{N_n^{(1)}},\ldots,i_m=2^{N_n^{(m)}}},$$

telles que $x_n^{i_1,\ldots,i_m} = 0$ si dans le système $(i_1, \ldots, i_m)$ au moins un indice i_k prend la valeur extrémale 0 ou $2^{N_n^{(k)}}$. Nous admettons que les suites $N_n^{(k)}$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) sont croissantes par rapport à n. Nous désignerons par Ω_n l'ensemble des m-indices $(i_1, \ldots, i_m)$ $(i_1 = 0, \ldots, 2^{N_n^{(1)}}, \ldots, i_m = 0, \ldots, 2^{N_n^{(m)}})$.

Si $x_n\in H_n$, nous désignerons par $\partial_r x_n$ ($r = 1, 2, \ldots, n$) l'élément de l'espace H_n défini comme il suit:

$$(3.3)\qquad \partial_r x_n \overset{\text{df}}{=} \{y_n^{j_1,\ldots,j_m}\}_{j=0,\ldots,j_m=0}^{2^{N_n^{(1)}},\ldots,2^{N_n^{(m)}}},$$

où

$$y_n^{j_1,\ldots,j_m} \overset{\text{df}}{=} \begin{cases} \dfrac{x_n^{j_1,\ldots,j_r+1,\ldots,j_m} - x^{j_1,\ldots,j_r,\ldots,j_m}}{\dfrac{1}{2^{N_n^{(r)}}}}, & \text{si}\quad j_r < 2^{N_n^{(r)}},\\ 0, & \text{si}\quad j_r = 2^{N_n^{(r)}}. \end{cases}$$

Pour $x_n\in H_n$ nous admettons la définition

$$(3.4)\qquad \mathop{\mathsf{S}}_{\Omega_n} x_n \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2^{N_n^{(1)}+\ldots+N_n^{(m)}}} \sum_{i_1=0;\ldots,i_m=0}^{2^{N_n^{(1)}},\ldots,2^{N_n^{(m)}}} x_n^{i_1,\ldots,i_m}.$$

Dans l'espace H_n nous définissons le produit scalaire par la formule:

$$(x_n, y_n)_n \overset{\text{df}}{=} \mathop{\mathsf{S}}_{\Omega_n} \sum_{r=1}^{m} \partial_r x_n \circ \partial_r y_n,$$

(où "$\circ$" désigne la multiplication scalaire des suites). Les applications $\varphi_{n,p}\colon H_n\to H_p$ ($p\geqslant n \doteq 1, 2, \ldots$) seront définies comme il suit:

$$\varphi_{n,p} x_n = \{x_p^{j_1,\ldots,j_m}\}_{j_1=0,\ldots,j_m=0}^{2^{N_p^{(1)}},\ldots,2^{N_p^{(m)}}},$$

où

$$x_p^{j_1,\ldots,j_m} = x_n^{i_1,\ldots,i_m} + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{j_k}{2^{N_p^{(k)}}} - \frac{i_k}{2^{N_n^{(k)}}}\right)\frac{x_n^{i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_m} - x_n^{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_m}}{1/2^{N_n^{(k)}}},$$

le système d'indices satisfaisant à l'inégalité

$$\left(\frac{i_1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m}{2^{N_n^{(m)}}}\right) \leqslant \left(\frac{j_1}{2^{N_p^{(1)}}}, \ldots, \frac{j_m}{2^{N_p^{(m)}}}\right) \leqslant \left(\frac{i_1+1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m+1}{2^{N_n^{(m)}}}\right).$$

On a les égalités suivantes:

$$\bigwedge_{p\geqslant n} \bigwedge_{x_n\in H_n} \|\varphi_{n,p} x_n\|_p = \|x_n\|_n, \tag{1}$$

$$\bigwedge_{n\leqslant k\leqslant p} \varphi_{n,p} = \varphi_{k,p}\circ\varphi_{n,k}, \tag{2}$$

$$\bigwedge_{n\leqslant p} \bigwedge_{y_p\in H_p} \varphi_{n,p}^{*} y_p = \{y_p^{i,2^{N_p^{(1)}-N_n^{(1)}}, \ldots, i_m 2^{N_p^{(m)}-N_n^{(m)}}}\}_{i_1=0,\ldots,i_m=0}^{2^{N_n^{(1)}},\ldots,2^{N_n^{(m)}}}. \tag{3}$$

Des égalités (1), (2) et des théorèmes (1.2) et (2.1) (ou (2.2)) il résulte que $H = \overline{\{H_n\}}$ est un espace de Hilbert, dans lequel e sous-ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(H_n)$ est dense.

Soit $\Omega = \underbrace{\langle 0,1\rangle \times \ldots \times \langle 0,1\rangle}_{m} \subset R^m$; le m-indice $(i_1, \ldots, i_m)$ $(i_1 = 0, \ldots, 2^{N_n^{(1)}}, \ldots, i_m = 0, \ldots, 2^{N_n^{(m)}})$ peut être considéré comme identique au point

$$\left(\frac{i_1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m}{2^{N_n^{(m)}}}\right) \in \Omega$$

et l'élément $x_n \in H_n$ identique à une fonction définie sur un réseau dans Ω.

Nous allons prouver que l'espace $H = \overline{\{H_n\}}$ ainsi construit est linéairement isométrique à $H_0^1(\Omega)$. En effet, l'application

$$\Phi\colon \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(H_n) \to H_0^1(\Omega)$$

définie par la formule:

$$\Phi(\varphi_n x_n)(t_1, \ldots, t_m) = x_n^{i_1,\ldots,i_m} + \sum_{k=1}^{m} \left(t_k - \frac{i_k}{2^{N_n^{(k)}}}\right) \frac{x_n^{i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_m} - x_n^{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_m}}{1/2^{N_n^{(k)}}} \tag{4}$$

pour $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \Omega$ tels que

$$\left(\frac{t_1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m}{2^{N_n^{(m)}}}\right) \leqslant t \leqslant \left(\frac{i_1+1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m+1}{2^{N_n^{(m)}}}\right)$$

est une isométrie linéaire. En effet:

1) Les dérivées distributives des fonctions $\Phi(\varphi_n x_n)$

$$\frac{\partial \Phi(\varphi_n x_n)}{\partial t_k} = \frac{x_n^{i_1,\ldots,i_k+1,\ldots,i_m} - x_n^{i_1,\ldots,i_k,\ldots,i_m}}{1/2^{N_n^{(k)}}} \tag{5}$$

pour

$$\left(\frac{i_1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m}{2^{N_n^{(m)}}}\right) \leqslant t \leqslant \left(\frac{i_1+1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m+1}{2^{N_n^{(m)}}}\right) \quad (t \in \Omega),$$

appartiennent à $L^2(\Omega)$;

2) La fonction $\Phi(\varphi_n x_n)$ s'annule sur la frontière de Ω et elle est continue aux points-frontières.

$$\|\Phi(\varphi_n x_n)\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\varphi_n x_n\|. \tag{6}$$

On déduit de là qu'il existe une extension de l'isométrie Φ à tout l'espace $H = \overline{\{H_n\}}$.

En profitant du fait que $D(\Omega)$ (fonctions suffisamment régulières à supports compacts dans Ω) est dense dans $H_0^1(\Omega)$ (voir [1]), on peut montrer que l'ensemble des fonctions de la forme (4) est dense dans $H_0^1(\Omega)$. L'ensemble $\bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi_n(H_n) \subset H = \overline{\{H_n\}}$ étant dense, il résulte de là que les espaces $H = \overline{\{H_n\}}$ et $H_0^1(\Omega)$ sont équivalents.

Exemple (3.2). Supposons données les fonctions $a_r \in C^1(R^m)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ satisfaisant aux conditions:

$$\bigwedge_{r=0,\ldots,m} \bigvee_{0\leqslant L_r<\infty} \bigwedge_{t,t'\in R^m} |a_r(t_1, \ldots, t_m) - a_r(t_1', \ldots, t_m')| \leqslant L_r \sum_{i=1}^{m} \left[|t_i - t_i'|^2\right]^{1/2}. \tag{3.5}$$

Posons $L = \max L_r$

$$\bigvee_{0<\alpha} \bigwedge_{t\in R^m} \bigwedge_{\tau\in R^m} \sum_{1\leqslant r,s\leqslant m} \frac{\partial a_r}{\partial t_s}(t)\tau_r\tau_s \geqslant a_1 \sum_{r=1}^{m} \tau_r^2 \tag{3.6}$$

et, de plus,

$$\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} a_1 - L_0 > 0.$$

Pour $\Omega = \underbrace{\langle 0;1\rangle \times \ldots \times \langle 0;1\rangle}_{m} \subset R^m$ soit ψ une extension continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ de la fonctionnelle définie par la formule:

$$\bigwedge_{x,h\in M} \psi(x, h) = \sum_{r=1}^{n} \int_{\Omega} a_r\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_m}\right)\frac{\partial h}{\partial t_r} + \int_{\Omega} a_0\left(\frac{\partial x}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial t_m}\right)h, \tag{3.7}$$

où

$$M = \{x \in C^2(\Omega):\ x|\partial\Omega = 0\}.$$

L'existence de la fonctionnelle ψ résulte de la condition (3.5) et du fait que M est dense dans $H_0^1(\Omega)$.

Les conditions (3.5) et (3.6) que nous venons d'admettre, et la définition (3.7) entraînent les conditions (2), (3) et (4) de la conclusion du théorème (3.1).

Dans ce qui suit H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ et $H = \{\overline{H_n}\}$ désigneront les espaces définis dans l'exemple (3.1) et ∂_r seront les opérations différentielles définies par la formule (3.3).

Nous allons montrer que les fonctionnelles $\psi_n\colon H_n \times H_n \to R$ $(n = 1, 2, \ldots)$, définies par la formule:

$$\text{(3.8)} \qquad \bigwedge_{x_n h_n \in H_n} \psi_n(x_n, h_n) \overset{\text{df}}{=} \sum_{r=1}^{m} \mathop{S}_{\Omega_n} a_r(\partial_1 x_n, \partial_2 x_n, \ldots, \partial_m x_n)\partial_r h_n + \mathop{S}_{\Omega_n} a_0(\partial_1 x_n, \ldots, \partial_m x_n) h_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

satisfont aux hypothèses (a), (b), (c) du théorème (3.1) et à la condition (d_2) de la remarque (3.1). Pour abréger l'écriture nous désignerons $a_r(\partial_1 x_n, \ldots, \partial_m x_n)$ par $a_r(\partial x_n)$.

(a) Cette condition résulte immédiatement des inégalités suivantes:

$$\text{(3.9)} \qquad \Big|\mathop{S}_{\Omega_n} a_r(\partial x_n)\partial_r h_n\Big| \leqslant \Big[\mathop{S}_{\Omega_n} |a_r(\partial x_n)|^2\Big]^{1/2} \cdot \Big[\mathop{S}_{\Omega_n} |\partial_r h_n|^2\Big]^{1/2},$$

$$\text{(3.10)} \qquad \mathop{S}_{\Omega_n} h_n^2 \leqslant \mathop{S}_{\Omega_n} \sum_{r=1}^{m} |\partial_r h_n|^2,$$

qui découlent de la définition (3.4) de la fonctionnelle "$\mathop{S}_{\Omega_n}$" et de l'inégalité de Hölder.

(b) Des conditions (3.5) et (3.9) on tire:

$$|\psi_n(x_n, h_n) - \psi_n(y_n, h_n)| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \Big|\mathop{S}_{\Omega_n} [a_r(\partial x_n) - a_r(\partial y_n)]\partial_r h_n\Big| + \Big|\mathop{S}_{\Omega_n} [a_0(\partial x_n) - a_0(\partial y_n)] h_n\Big| \leqslant \sum_{r=1}^{m} \Big(\mathop{S}_{\Omega_n} |a_r(\partial x_n) - a_r(\partial y_n)|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\mathop{S}_{\Omega_n} |\partial_r h_n|^2\Big)^{1/2} +$$
$$+ \Big(\mathop{S}_{\Omega_n} |a_0(\partial x_n) - a_0(\partial y_n)|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\mathop{S}_{\Omega_n} |h_n|^2\Big)^{1/2} \leqslant L \sum_{r=1}^{m} \Big(\sum_{s=1}^{m} |\partial_s x_n - \partial_s y_n|^2\Big)^{1/2} \times$$
$$\times \Big(\mathop{S}_{\Omega_n} |\partial_r h_n|^2\Big)^{1/2} + L_0 \Big(\sum_{s=1}^{m} |\partial_s x_n - \partial_s y_n|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\mathop{S}_{\Omega_n} |h_n|^2\Big)^{1/2}.$$

En mettant (3.10) dans la dernière inégalité on obtient:

$$\text{(b)} \qquad |\psi_n(x_n, h_n) - \psi_n(y_n, h_n)| \leqslant L(m+1)\|x_n - y_n\|_n \cdot \|h_n\|_n.$$

Il est évident que les fonctionnelles $\psi_n(0, \cdot)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sont équibornées.

$$\text{(c)} \qquad \psi_n(x_n, x_n - y_n) - \psi_n(y_n, x_n - y_n)$$
$$= \sum_{r=1}^{m} \mathop{S}_{\Omega_n} [a_r(\partial x_n) - a_r(\partial y_n)]\partial_r(x_n - y_n) + \mathop{S}_{\Omega_n} [a_0(\partial x_n) - a_0(\partial y_n)](x_n - y_n)$$
$$= \mathop{S}_{\Omega_n} \sum_{r=1}^{m} \Big(\sum_{s=1}^{m} \frac{\partial a_r}{\partial t_s}(\theta_n)\partial_s(x_n - y_n)\partial_r(x_n - y_n) + \mathop{S}_{\Omega_n} [a_0(\partial x_n) - a_0(\partial y_n)](x_n - y_n).$$

Profitant de (3.5) et (3.6) on obtient:

$$\text{(c)} \qquad \psi_n(x_n, x_n - y_n) - \psi_n(y_n, x_n - y_n) \geqslant (\alpha_1 - L_0)\|x_n - y_n\|_n^2.$$

$$\text{(d}_2\text{)} \qquad \psi_p(\varphi_{n,p} x_n, \varphi_{n,p} h_n) - \psi_n(x_n, h_n)$$
$$= \sum_{r=1}^{m} \Big[\mathop{S}_{\Omega_p} a_r(\partial\varphi_{n,p} x_n)\partial_r \varphi_{n,p} h_n - \mathop{S}_{\Omega_n} a_r(\partial x_n)\partial_n h_n\Big] + \mathop{S}_{\Omega_p} a_0(\partial\varphi_{n,p} x_n)\varphi_{n,p} h_n - \mathop{S}_{\Omega_n} a_0(\partial x_n) h_n$$
$$= \mathop{S}_{\Omega_p} a_0(\partial\varphi_{n,p} x_n)\varphi_{n,p} h_n - \mathop{S}_{\Omega_n} a_0(\partial x_n) h_n.$$

Moyennant la formule:

$$\bigwedge_{h_n \in H_n} \varphi_{n,p}^{(1)} h_n = \{h_p^{j_1,\ldots,j_p}\}_{j_1=0,\ldots,j_m=0}^{2^{N_p^{(1)}},\ldots,2^{N_p^{(m)}}},$$

où

$$h_p^{j_1,\ldots,j_m} = h_n^{i_1,\ldots,i_m}$$

pour

$$\left(\frac{i_1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m}{2^{N_n^{(m)}}}\right) \leqslant \left(\frac{j_1}{2^{N_p^{(1)}}}, \ldots, \frac{j_m}{2^{N_p^{(m)}}}\right) \leqslant \left(\frac{i_1+1}{2^{N_n^{(1)}}}, \ldots, \frac{i_m+1}{2^{N_n^{(m)}}}\right)$$

on obtient:

$$|\psi_p(\varphi_{n,p} x_n, \varphi_{n,p} h_n) - \psi_n(x_n, h_n)| = \Big|\mathop{S}_{\Omega_p} a_0(\partial\varphi_{n,p} x_n)(\varphi_{n,p} h_n - \varphi_{n,p}^{(1)} h_n)\Big|$$
$$\leqslant \Big(\mathop{S}_{\Omega_p} a_0(\partial\varphi_{n,p} x_n)^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\mathop{S}_{\Omega_p} (\varphi_{n,p} h_n - \varphi_{n,p}^{(1)} h_n)^2\Big)^{1/2}.$$

De la définition il résulte

$$\text{(3.11)} \qquad \mathop{S}_{\Omega_p} a_0(\partial\varphi_{n,p} x_n)^2 = \mathop{S}_{\Omega_n} a_0(\partial x_n)^2.$$

Pour le second facteur dans la dernière inégalité on a la limitation:

$$(3.12)\qquad \Big(\int_{\Omega_p}(\varphi_{n,p}h_n-\varphi_{n,p}^{(1)}h_n)^2\Big)^{1/2}\leqslant \frac{\sqrt{m}}{2^{N_n^{(1)}+\ldots+N_n^{(m)}}}\cdot\|h_n\|_n.$$

Enfin, moyennant (3.5), (3.11) et (3.12) on obtient

$$(\mathrm{d}_2)\qquad |\psi_p(\varphi_{n,p}x_n,\varphi_{n,p}h_n)-\psi_n(x_n,h_n)|\leqslant\frac{\sqrt{m}\big(L_0\|x_n\|_n+|a_0(0)|\big)}{2^{N_n^{(1)}+\ldots+N_n^{(m)}}}\|h_n\|_n.$$

Remarque (3.2). Dans le cas où les fonctions a_r dépendent de x et de $t=(t_1,\ldots,t_m)$, les limitations sont pareilles.

Bibliographie

[1] J. L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, v. 1. Paris 1968.

[2] T. Leżański, *Eine effektive Lösungsmethode nichtlinearer Gleichungen in Hilbertschen Räumen*, Math. Annalen 158 (1965), pp. 377–386.

[3] I. M. Gelfand, S. W. Fomin, *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1970.

Received November 15, 1975
New version May 6, 1976 (1092)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXII. (1978)

On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces II

by

P. WOJTASZCZYK (Warszawa)

Abstract. We prove that an unconditional basis in $X+Y$ is a direct sum of bases in summands provided every operator from Y into X is compact.

The main result of the present paper is Theorem 2.1, which says that all unconditional bases in $X+Y$ are direct sums of bases in summands, provided every operator from Y into X is compact. The interesting thing is that we do not know a priori that X and Y have unconditional bases. This decomposition of unconditional bases in direct sums of l_p-spaces was proved in [4]. One of the main steps in the proof of Theorem 2.1 is Theorem 1.1, which generalizes Theorem 3.5 of [4] and describes complemented subspaces in certain direct sums of Banach spaces.

This paper is a direct continuation of [4]. The proofs use the same ideas as in [4].

The proof of Theorem 1.1 is an extension of the argument given in [4], so we only point out the necessary changes. The first section of this paper cannot be read independently of Section 3 of [4]. The proof of Theorem 2.1 is selfcontained. All our notations and unexplained notions are those of [4].

1. The following theorem improves Theorem 3.5 of [4].

THEOREM 1.1. *Let X and Y be Banach spaces (real or complex) such that every operator from Y into X is strictly singular. Let V be a complemented subspace of $X+Y$. Then there exists an isomorphism $\varphi\colon X+Y\xrightarrow{\text{onto}}X+Y$ such that*

$$\varphi(V)=\varphi(V)\cap X+\varphi(V)\cap Y.$$

For the proof we give only two propositions, the rest is exactly the same as in [4]. We will denote by P_X the projection from $X+Y$ onto X annihilating Y and $P_Y=I-P_X$.

PROPOSITION 1.2. *Let X, Y, V be complex Banach spaces satisfying the assumptions of Theorem 1.1. Then there exists a projection $P_1\colon X+Y\to X+Y$ such that $P_XP_1P_Y=0$ and there exists a Fredholm operator*