STUDIA MATHEMATICA, T. LXII. (1978)

Sur la primarité des espaces $C(\alpha)$

par

PIERRE BILLARD (Marseille)

Résumé. Nous établissons la primarité des espaces de Banach $C(\alpha)$ où α est un ordinal dénombrable infini.

Position du problème. La primarité d'un espace de Banach B signifie par définition qu'à chaque fois que nous avons une décomposition vectorielle topologique $B = X \oplus Y$ de B alors l'un au moins des deux facteurs X et Y est isomorphe à B. Nous obtiendrons ici la primarité des espaces $C(\alpha)$ en désignant par $C(\alpha)$ l'espace de Banach, pour la norme uniforme, des fonctions réelles continues sur le segment $[1, \alpha]$ des ordinaux inférieurs ou égaux à l'ordinal dénombrable non fini et fixé α, le segment $[1, \alpha]$ étant muni de sa topologie usuelle d'ordre qui est compacte.

Puisque la primarité de $C([0,1])$ ($[0,1]$ est ici le segment usuel de la droite réelle) est connue (Cf. [2]), il en résultera (Cf. [4]) que tous les espaces de Banach $C(K)$ (K compact) qui sont séparables de dimension infinie sont primaires.

Toute notre argumentation sera réelle et d'après [1] nous pouvons fixer nos idées sur l'étude de $C_0(\omega^{\omega^\alpha})$ = sous espace de $C(\omega^{\omega^\alpha})$ constitué des $f \in C(\omega^{\omega^\alpha})$ vérifiant $f(\omega^{\omega^\alpha}) = 0$, α étant un ordinal dénombrable $\geqslant 1$.

Afin d'éviter des constructions trop longues qui masqueraient nos méthodes, dans les Sections 2 et 3 nous fixons notre attention sur le cas $C_0(\omega^{\omega^\alpha})$ avec $\alpha = 1$ mais dans la Section 4 nous montrons comment nos méthodes donnent le cas général de $C_0(\omega^{\omega^\alpha})$ avec α dénombrable $\geqslant 1$.

1. Sur certaines basis de $C(\alpha)$.

DÉFINITION 1. Soit α un ordinal dénombrable $\geqslant 1$; en écrivant dans l'arithmétique des ordinaux $\alpha = \omega^{\alpha_k} n_k + \omega^{\alpha_{k-1}} n_{k-1} + \ldots + \omega^{\alpha_0} n_0$ (n_j entier > 0 pour $0 \leqslant j \leqslant k$ et ω_1 = premier ordinal non dénombrable $> \alpha_k > \alpha_{k-1} > \ldots > \alpha_0 \geqslant 0$) α_0 définira le *type de* α; par exemple, les points isolés de $[1, \omega_1[$ sont les points de $[1, \omega_1[$ de type 0.

DÉFINITION 2. Soit β un ordinal limite dénombrable $\geqslant 1$ et désignons par I l'un des deux intervalles d'ordinaux $[1, \beta]$ et $[1, \beta[$.

Une partie A de I sera dite *normale* si elle est fermée dans I et de même type d'ordre que I. Une famille $[\varphi(\alpha);\alpha]_{\alpha\in A}$ de segments de I indexée sur une partie normale A de I sera dite une *famille normale associée à A* si elle vérifie

(1) $\forall\alpha,\ \alpha\in A\Rightarrow\varphi(\alpha)$ est isolé dans I et $\varphi(\alpha)\leqslant\alpha$,

(2) pour chaque ordinal ξ les segments $[\varphi(\alpha),\alpha]$ pour lesquels type de α (dans A) $=\xi$ sonts deux à deux disjoints,

(3) $\forall\alpha\forall\alpha',\ \alpha$ et $\alpha'\in A\Rightarrow[\varphi(\alpha),\alpha]$ et $[\varphi(\alpha'),\alpha']$ sonts disjoints ou sinon l'un d'eux est inclus dans l'autre,

(4) $\forall\xi,\ \xi\in I\Rightarrow\{\alpha,\ \alpha\in A$ et $\xi\in[\varphi(\alpha),\alpha]\}$ est fini.

DÉFINITION 3. Soient β et I comme dans la définition 2, A une partie normale de I, $[\varphi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in A}$ une famille normale associée et pour chaque $\alpha\in A$ notons χ_α la fonction caractéristique $\chi_{[\varphi(\alpha),\alpha]}$ du segment $[\varphi(\alpha),\alpha]$ de I. Une application $n\to\chi_{\alpha_n}$ de l'ensemble $\boldsymbol{N}=[1,\omega[$ des entiers $\geqslant 1$ dans l'ensemble $\{\chi_\alpha,\ \alpha\in A\}$ sera dite une *numérotation normale de $\{\chi_\alpha,\ \alpha\in A\}$* si elle vérifie

(5) $n\to\chi_\alpha$ est une bijection de N sur $\{\chi_\alpha,\ \alpha\in A\}$,

(6) $\forall n\forall n',\ n$ et $n'\in N$ et $[\varphi(\alpha_{n'})\,\alpha_{n'}]\supset[\varphi(\alpha_n),\alpha_n]\Rightarrow n'\leqslant n$.

LEMME 1. *Soit $\xi\in[1,\omega_1[$, A une partie normale de $[1,\omega^\omega[$, $[\varphi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in A}$ une famille normale associée et $n\to\chi_{\alpha_n}$ une numérotation normale de $\{\chi_\alpha,\ \alpha\in A\}$. Dans ces conditions la suite $(\chi_{\alpha_n})_{n=1,2,\ldots}$ est une base monotone du sous espace fermé B de $C_0(\omega^{\omega^\xi})$ engendré par les χ_α ($\alpha\in A$).*

Démonstration. Clairement (1) donne $\forall\alpha,\ \alpha\in A\Rightarrow\chi_\alpha\in C_0(\omega^{\omega^\xi})$; il nous suffit donc de vérifier la classique K condition avec $K=1$, cas dans lequel il suffit de vérifier

$$(7)\qquad \Big\|\sum_{1\leqslant n\leqslant m}\lambda_n\chi_{\alpha_n}\Big\|\leqslant\Big\|\sum_{1\leqslant n\leqslant m+1}\lambda_n\chi_{\alpha_n}\Big\|\qquad(\lambda_n\in\boldsymbol{R}\ \text{pour}\ 1\leqslant n\leqslant m+1).$$

Nous avons deux cas seulement à examiner; dans le premier cas $\forall n$, $1\leqslant n\leqslant m\Rightarrow[\varphi(\alpha_n),\alpha_n]\cap[\varphi(\alpha_{m+1}),\alpha_{m+1}]=\emptyset$ ce qui rend (7) immédiat; dans le deuxième cas la normalité de $n\to\chi_{\alpha_n}$ donne des entiers $1\leqslant n_1<n_2<\ldots<n_k\leqslant m$ ($k>0$) vérifiant

(8) $\forall j,\ 1\leqslant j\leqslant k\Rightarrow[\varphi(\alpha_{n_j}),\alpha_{n_j}]\supset[\varphi(\alpha_{m+1}),\alpha_{m+1}]$ et $\alpha_{n_k}\notin[\varphi(\alpha_{m+1}),\alpha_{m+1}]$ et $\forall n,\ 1\leqslant n\leqslant m$ et $n\notin\{n_1,\ldots,n_k\}\Rightarrow[\varphi(\alpha_n),\alpha_n]\cap[\varphi(\alpha_{m+1}),\alpha_{m+1}]=\emptyset$ et $\alpha_{n_k}\notin[\varphi(\alpha_n),\alpha_n]$;

si $\alpha\in[1,\omega^{\omega^\xi}[$ vérifie $\alpha\notin[\varphi(\alpha_{m+1}),\alpha_{m+1}]$ alors clairement $\big(\sum_{1\leqslant n\leqslant m}\lambda_n\chi_{\alpha_n}\big)(\alpha)=\big(\sum_{1\leqslant n\leqslant m+1}\lambda_n\chi_{\alpha_n}\big)(\alpha)$ et si α vérifie $\alpha\in[\varphi(\alpha_{m+1}),\alpha_{m+1}]$ de (8) nous déduisons $\big(\sum_{1\leqslant n\leqslant m}\lambda_n\chi_{\alpha_n}\big)(\alpha)=\big(\sum_{1\leqslant n\leqslant m+1}\lambda_n\chi_{\alpha_n}\big)(\alpha_{n_k})=\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\lambda_{n_j}$ ce qui rend encore (7) immédiat et le lemme 1 est établi.

Si dans le lemme 1 nous avons $A=[1,\omega^{\omega^\xi}[$ alors le théorème de Stone–Weierstrass donne immédiatement $B=C_0(\omega^{\omega^\xi})$, sinon en désignant par τ l'isomorphisme d'ordre de $[1,\omega^{\omega^\xi}[$ sur A et en associant, à chaque $\alpha\in[1,\omega^{\omega^\xi}[$, le plus petit ordinal $\psi(\alpha)\in[1,\omega^{\omega^\xi}[$ pour lequel $\tau(\psi(\alpha))\in[\varphi(\tau(\alpha)),\tau(\alpha)]$ nous avons

(9) $\forall\alpha\forall\beta,\ \alpha$ et $\beta\in[1,\omega^{\omega^\xi}[\Rightarrow(\beta\in[\psi(\alpha),\alpha]\Leftrightarrow\tau(\beta)\in[\tau(\psi(\alpha)),\tau(\alpha)]\Leftrightarrow\tau(\beta)\in[\varphi(\tau(\beta)),(\beta)])$.

Par construction $[\psi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in[1,\omega^{\omega^\xi}[}$ est visiblement une famille normale associée à $[1,\omega^{\omega^\xi}[$ qui vérifie $\forall\alpha\forall\beta,\ \alpha$ et $\beta\in[1,\omega^{\omega^\xi}[\Rightarrow([\psi(\alpha),\alpha]\supset[\psi(\beta),\beta]\Leftrightarrow[\varphi(\tau(\alpha)),\tau(\alpha)]\supset[\varphi(\tau(\beta)),\tau(\beta)])$ donc en définissant $T(f)$ (définition non ambigüe à cause de l'indépendance linéaire des $\chi_{[\psi(\alpha),\alpha]}$ ($\alpha\in[1,\omega^{\omega^\xi}[$)) pour chaque combinaison linéaire $f=\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\lambda_j\chi_{[\psi(\alpha'_j),\alpha'_j]}$ des $\chi_{[\psi(\alpha),\alpha]}$ ($\alpha\in[1,\omega^{\omega^\xi}[$) par $T(f)=\sum_{1\leqslant j\leqslant k}\lambda_j\chi_{[\varphi(\tau(\alpha'_j)),\tau(\alpha'_j)]}$ nous avons $\|f\|=\|T(f)\|$ et puisque d'après (9) nous avons $\forall\beta,\ \beta\in[1,\omega^{\omega^\xi}[\Rightarrow f(\beta)=T(f)(\tau(\beta))$ nous avons obtenu le

LEMME 2. *Soient ξ, A et $[\varphi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in A}$ comme dans le lemme 1. Dans ces conditions si τ est l'isomorphisme d'ordre de $[1,\omega^{\omega^\xi}[$ sur A et si B est le sous espace fermé de $C_0(\omega^{\omega^\xi})$ engendré par les $\chi_\alpha=\chi_{[\varphi(\alpha),\alpha]}$ ($\alpha\in A$) alors il existe une unique application linéaire et isométrique T de $C_0(\omega^{\omega^\xi})$ sur B qui vérifie*

$$\forall\beta\forall f,\ \beta\in[1,\omega^{\omega^\xi}[\ \textit{et}\ f\in C_0(\omega^{\omega^\xi})\Rightarrow f(\beta)=T(f)(\tau(\beta)).$$

2. Sélection d'une certaine partie normale de $[1,\omega^\omega[$.

Nous nous fixons une projection continue P de $C_0(\omega^\omega)$ de projection supplémentaire Q et nous écrivons

(10) $C_0(\omega^\omega)=X\oplus Y$ où $X=P(C_0(\omega^\omega))$ et $Y=Q(C_0(\omega^\omega))$.

LEMME 3. *Il est possible de former une suite strictement croissante $(\mu'_p)_{p=1,2,\ldots}$ d'entiers $\geqslant 1$ telle que quel que soit p et quels que soient les sous ensembles E_0 et E_1 de $[1,\omega^{\mu'_p}]$ vérifiant $[1,\omega^{\mu'_p}]=E_0\cup E_1$ alors l'un au moins de ces deux sous ensembles contient une partie fermée A_p de $[1,\omega^{\mu'_p}]$ de même type d'ordre que $[1,\omega^p]$ et telle que pour chaque entier q vérifiant $0\leqslant q\leqslant p$ les points de A_p de type q (au sens de A_p) sont d'un même type r_q (au sens de $[1,\omega^{\mu'_p}]$).*

Etablissons d'abord le lemme 3 sans la condition sur les types des éléments de A. Pour $p=1$, nous pouvons prendre $\mu'_1=2$; en effet, supposons par exemple $\omega^2\in E_1$; s'il existe une suite strictement croissante de points de $E_1\cap[1,\omega^2[$ qui converge vers ω^2 la construction de A_1 est claire, sinon il existe un entier $\nu\geqslant 1$ vérifiant $[\omega\nu,\omega^2[\cap E_1=\emptyset$ et nous pouvons prendre $A_1=[(\omega\nu)+1,\omega(\nu+1)]$.

Supposons les entiers $\mu_1' < \mu_2' < \ldots < \mu_p'$ construits ($p \geqslant 1$) et satisfaisant les conditions demandées; prenons $\mu_{p+1}' = \mu_p' + p + 2$; les points de $[1, \omega^{\mu_{p+1}'}]$ de type $\geqslant p+2$ forment une partie fermée F de $[1, \omega^{\mu_{p+1}'}]$ de même type d'ordre que $[1, \omega^{\mu_p'}]$, donc par l'hypothèse de récurrence nous avons une partie fermée G de F qui est par exemple incluse dans E_1 et qui est du même type d'ordre que $[1, \omega^p]$; si pour chaque point $\alpha \in G$ qui est isolé dans G et dont α' désigne le précédant dans G nous pouvons trouver, dans l'intervalle $]\alpha', \alpha[$ de $[1, \omega^{\mu_{p+1}'}]$, une suite strictement croissante de points de $E_1 \cap \{\beta, \beta \in [1, \omega^{\mu_{p+1}'}]$ et type de $\beta < p+2\}$ qui converge vers α (au sens de $[1, \omega^{\mu_{p+1}'}]$) la construction de A_{p+1} est claire, sinon nous avons un point $\alpha \in G$ qui est isolé dans G, un point $\beta \in [1, \omega^{\mu_{p+1}'}]$ avec type de $\beta < p+2$ vérifiant $\alpha' < \beta < \alpha$ et tel que l'intervalle $]\beta, \alpha[$ de $[1, \omega^{\mu_{p+1}'}]$ ne contienne aucun point de E_1; puisque α est de type $\geqslant p+2$, $]\beta, \alpha[$ contient un segment de la forme $[\gamma+1, \gamma+\omega^{p+1}]$ que nous pouvons prendre pour A_{p+1}.

Pour $p = 1$, A_1 est simplement de la forme $A_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\alpha\}$ où $(\alpha_j)_{j=1,2,\ldots}$ est une suite strictement croissante de points de $[1, \omega^{\mu_1'}]$ qui converge (au sens de $[1, \omega^{\mu_1'}]$) vers α; puisque au sens de $[1, \omega^{\mu_1'}]$ nous avons type de $\alpha_j \leqslant \mu_{1-1}'$ pour $j = 1, 2, \ldots$, nous pouvons former une sous suite $(\alpha_{j_k})_{k=1,2,\ldots}$ de $(\alpha_j)_{j=1,2,\ldots}$ pour laquelle nous avons (au sens de $[1, \omega^{\mu_1'}]$) type de $\alpha_{j_k} =$ constante et il suffit de remplacer A_1 par $\{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots\} \cup \{\alpha\}$ pour que A_1 réponde aux conditions sur les types indiquées dans l'énoncé du lemme 3.

Supposons le résultat réalisé jusqu'à $p \geqslant 1$ compris et soit cette fois $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_j < \ldots$ la suite strictement croissante de tous les points de A_{p+1} qui, au sens de A_{p+1}, sont de type p, suite qui converge vers le point α de A_{p+1} qui, au sens de A_{p+1}, est du type $p+1$; pour $j = 1, 2, \ldots$ en posant $F_j = \{\alpha, \alpha \in A_{p+1}$ et $\alpha_{j-1} < \alpha \leqslant \alpha_j\}$ ($\alpha_0 = 0$ par convention) nous pouvons appliquer à F_j l'hypothèse de récurrence, c'est-à-dire former une partie fermée G_j de F_j, de même type d'ordre que $[1, \omega^p]$ dont les éléments d'ordre q (au sens de G_j) sont de même type $r_{j,q}$ (au sens de $[1, \omega^{\mu_{p+1}'}]$) pour $0 \leqslant q \leqslant p$; puisque les $r_{j,q}$ sont $\leqslant \mu_{p+1}' - 1$, nous n'avons qu'un nombre fini de possibilités de suites $(r_{j,q})_{0 \leqslant q \leqslant p}$, donc nous pouvons former une suite strictement croissante $(j_k)_{k=1,2,\ldots}$ d'entiers $\geqslant 1$ telle que la suite $(r_{j_k,q})_{0 \leqslant q \leqslant p}$ ne dépende pas de k; dans ces conditions il suffit visiblement de remplacer A_{p+1} par $(\bigcup_{1 \leqslant k} G_{j_k}) \cup \{\alpha\}$ pour que les points de A_{p+1} répondent aux conditions sur leurs types indiquées dans l'énoncé du lemme 3 qui se trouve ainsi établi.

Celà étant, en partant de la partie normale $[1, \omega^\omega[$ de $[1, \omega^\omega[$, il est clair que la famille $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in [1, \omega^\omega[}$ de segments de $[1, \omega^\omega[$ qui est définie par les conditions

(11) $\forall \alpha$, α isolé $\in [1, \omega^\omega[\Rightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$,

(12) $\varphi(\omega^k) = \omega^{k-1}+1$ pour $k = 2, 3, \ldots$ et $\varphi(\omega) = 1$,

(13) $\forall \alpha$, $\alpha \in [1, \omega^\omega[$ et α s'écrivant, dans l'arithmétique des ordinaux, sous la forme $\alpha = \omega^{k+q} n_{k+q} + \ldots + \omega^k n_k$ avec $n_k > 1$ ou avec $n_k = 1$ et $\max(n_{k+1}, \ldots, n_{k+q}) \geqslant 1 \Rightarrow \varphi(\alpha) = \omega^{k+q} n_{k+q} + \ldots + \omega^{k+1} n_{k+1} + \omega^k(n_k - 1) + 1$

est une famille normale associée à $[1, \omega^\omega[$.

Numérotations normales du genre Γ_1. Nous entendons ainsi la formation d'une partie normale A de $[1, \omega^\omega[$ pour laquelle $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in A}$ est une famille normale associée et d'une numérotation normale $n \to \chi_{\alpha_n}$ de $\{\chi_\alpha, \alpha \in A\}$ selon la construction que nous allons décrire et qui, sans la condition (17) et en prenant, pour $n = 1, 2, \ldots$, $\chi_{\alpha_{n+1}}$ avec α_{n+1} le plus petit possible donne ce que nous appellerons la *numérotation normale naturelle* de $\{\chi_\alpha, \alpha \in [1, \omega^\omega[\}$; l'ensemble $\{\mu_\alpha, \alpha \in [1, \omega^\omega[\}$ des formes coordonnées de la base monotone ainsi formée de $C_0(\omega^\omega)$ (Cf. lemme 1) verifie donc, avec les symboles de Kronecker,

(14) $\forall \alpha \forall \alpha'$, α et $\alpha' \in [1, \omega^\omega[\Rightarrow \mu_\alpha(\chi_{\alpha'}) = \delta_{\alpha,\alpha'}$ et $1 \leqslant \|\mu_\alpha\| \leqslant 2$.

Fixons un réel $\varepsilon > 0$ que nous préciserons plus tard et construisons une injection $n \to \chi_{\alpha_n}$ de $N = [1, \omega[$ dans $\{\chi_\alpha, \alpha \in [1, \omega^\omega[\}$ comme suit.

Nous prenons $\alpha_1 = \omega$ puis $\alpha_2 = \nu$ entier $\geqslant 1$ vérifiant

(15) $|\mu_{\alpha_1}(P(\chi_{\alpha_2}))| + |\mu_{\alpha_1}(Q(\chi_{\alpha_2}))| + |\mu_{\alpha_2}(P(\chi_{\alpha_1}))| + |\mu_{\alpha_2}(Q(\chi_{\alpha_1}))| < \varepsilon$

ce qui est possible en vertu d'une part de la convergence faible vers 0 des suites $(P(\chi_\nu))_{\nu=1,2,\ldots}$ et $(Q(\chi_\nu))_{\nu=1,2,\ldots}$ et d'autre part de la convergence, dans la numérotation normale naturelle, de $\sum_{\alpha \in [1, \omega^\omega[} \mu_\alpha(P(\chi_{\alpha_1}))$ et de $\sum_{\alpha \in [1, \omega^\omega[} \mu_\alpha(Q(\chi_{\alpha_1}))$.

Prenons maintenant $\alpha_3 = \omega^r$ où r est entier > 1 vérifiant

(16) $$\sum_{1 \leqslant n \leqslant 3} \Big(\sum_{1 \leqslant n' \leqslant 3 \text{ et } n' \neq n} \big(|\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\alpha_{n'}}))| + |\mu_{\alpha_n}(Q(\chi_{\alpha_{n'}}))| \big) \Big) < \varepsilon$$

ce qui est possible pour les mêmes raisons qu'à l'instant; ensuite nous prenons $\alpha_4 = \omega^{r-1}s$ (s entier > 1), $\ldots$, α_m, $\ldots$ réalisant pour $m = 2, 3, \ldots$

(17) $$\sum_{1 \leqslant n \leqslant m} \Big(\sum_{1 \leqslant n' \leqslant m \text{ et } n' \neq n} \big(|\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\alpha_{n'}}))| + |\mu_{\alpha_n}(Q(\chi_{\alpha_{n'}}))| \big) \Big) < \varepsilon;$$

d'une façon générale, en commençant par prendre χ_{α_1} avec $\alpha_1 = \omega$, lorsque nous venons de prendre χ_{α_n} de type q (c'est-à-dire type de $\alpha_n = q$), pour prendre $\chi_{a_{n+1}}$, outre la condition (17) que nous réalisons comme il est dit après (15), nous envisageons deux cas:

1er cas: χ_{a_n} est emboité (au sens des supports) dans un χ_{a_m} $(m < n)$ de type $q+1$; alors nous envisageons trois sous cas:

1er sous cas: il existe un premier $\chi_{a_{m'}}$ $(m' < n)$ de type $q+1$ se situant immédiatement après χ_{a_m}; alors nous prenons $\chi_{a_{n+1}}$ de type q emboité dans $\chi_{a_{m'}}$ avec $\chi_{a_{n+1}}$ se situant au delà des $\chi_{a_{m''}}$ $(m'' < n)$ de type q emboités dans $\chi_{a_{m'}}$; s'il n'existe pas un tel $\chi_{a_{m'}}$ nous envisageons les deux sous cas suivants:

2ème sous cas: $q \geqslant 1$; alors nous envisageons le premier $\chi_{a_{m'}}$ $(m' \leqslant n)$ de type q et nous prenons $\chi_{a_{n+1}}$ de type $q-1$ emboité dans $\chi_{a_{m'}}$ avec $\chi_{a_{n+1}}$ se situant au delá des $\chi_{a_{m''}}$ $(m'' < n)$ de type $q-1$ emboités dans $\chi_{a_{m'}}$;

3ème sous cas: $q = 0$; alors nous prenons $\chi_{a_{n+1}}$ avec $a_{n+1} = \omega^l$ où l'entier $l > 1$ est tel que $\chi_{a_{n+1}}$ se situe au delà des $\chi_{a_{n'}}$ $(1 \leqslant n' \leqslant n)$;

2ème cas: χ_{a_n} de type $q \geqslant 1$ n'est emboité dans aucun χ_{a_m} $(m < n)$; alors nous prenons $\chi_{a_{n+1}}$ de type $q-1$ emboité dans χ_{a_n}.

Clairement $A = \{a_n, n = 1, 2, \ldots\}$ est une partie normal de $[1, \omega^\omega[$, $[\varphi(a), a]_{a\in A}$ une famille normale associée et $n \to \chi_{a_n}$ une numérotation normale de $\{\chi_a, a \in A\}$.

Dans cette numérotation normale du genre Γ_1 le but de la condition (17) est de rendre négligeables les interactions des χ_a $(a \in A)$; cette précaution se revèlerait inutile sans la possibilité d'isoler les $\chi_a (a \in A)$ des actions des χ_a $(a \notin A)$ au moyen de la projection R de $C_0(\omega^\omega)$ sur $B(=$ sous espace fermé de $C_0(\omega^\omega)$ engendré par les χ_a $(a \in A))$ que nous allons maintenant construire et qui rend possible le calcul de 3.

Cette construction de R repose sur la possibilité de construire une numérotation normale $j \to \chi_{a'_j}$ de $\{\chi_{a'}, a' \in [1, \omega^\omega[\}$ associée à la numérotation normale $n \to \chi_{a_n}$ de $\{\chi_a, a \in A\}$ du genre Γ_1 que nous venons de construire en ce sens q'elle verifie

(18) si $(j_n)_{n=1,2,\ldots}$ est la mise sous la forme d'une suite strictement croissante d'entiers de l'ensemble $\{j, a'_j \in A\}$ nous avons $\forall n$, $a_n = a'_{j_n}$ (autrement dit $(\chi_{a_n})_{n=1,2,\ldots}$ est une sous suite de $(\chi_{a_j})_{j=1,2,\ldots}$).

Un exemple d'une numérotation normale $j \to \chi_{a'_j}$ de $\{\chi_{a'}, a' \in [1, \omega^\omega[\}$ vérifiant (18) est suggéré par un classement possible des χ_a $(a \notin A)$ en lacunes de 1ère espèce (constituées de χ_a, $a \notin A$ et χ_a emboité dans un χ_β, $\beta \in A$) et de 2ème espèce (constituées de χ_a, $a \notin A$ et χ_a disjoint des χ_β, $\beta \in A$).

La possibilité d'un tel classement apparait naturellement dans les étapes de la construcion de $n \to \chi_{a_n}$, la $n$ème étape étant la prise de $\chi_{a_{n+1}}$ qui se trouve emboité ou non dans un $\chi_{a_{m'}}$ $(m' \leqslant n)$ d'où deux éventualités:

1ère éventualité: nous sommes dans le 3ème sous cas; l' désignant le plus grand entier vérifiant $\chi_\omega l' \in \{\chi_{a_{n'}}, 1 \leqslant n' \leqslant n\}$ il y a une lacune de 2ème espèce, à savoir l'ensemble des χ_a emboités dans un $\chi_\omega l''$ avec $l' < l'' < l$;

2ème éventualité: nous ne sommes pas dans le 3ème sous cas; alors $\chi_{a'_{n+1}}$ de type q' est emboité dans $\chi_{a_{m'}}$ $(m' \leqslant n)$ de type $q'+1$ et il y a une lacune de 1ère espèce, à savoir l'ensemble des χ_a de type q' strictement situés entre le dernier des $\chi_{a_{m''}}$ $(m'' \leqslant n)$ de type q' emboités dans $\chi_{a_{m'}}$ et $\chi_{a_{n+1}}$.

En conséquence en partant de $1 = j_1$ et $a'_{j_1} = a_1 = \omega$ et en supposant construits $1 = j_1 < \ldots < j_n$ et $a'_1, \ldots, a'_{j_n}$ avec $a'_{j_1} = a_1, \ldots, a'_{j_n} = a_n$ construisons $a'_{j_n+1}, a'_{j_n+2}, \ldots, a'_{j_{n+1}}$ en envisageant les deux éventualités précédentes:

1ère éventualité: nous prenons $j_{n+1} = j_n+1$ et $a'_{j_{n+1}} = a_{n+1}$;

2ème éventualité: $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ désignant les lacunes de 2ème espèce qui précèdent $\chi_{a_{n+1}}$, pour chaque entier σ vérifiant $1 < \sigma < s$ nous posons $\Lambda'_\sigma = \{\chi_\beta, \chi_\beta \in \Lambda_\sigma - \{\chi_{a'_j}, 1 \leqslant j \leqslant j_n\}$ et type de $\chi_\beta = q'$ et ((il n'existe pas $\chi_\gamma \in \Lambda_\sigma$ contenant strictement χ_β) ou (χ_β est le 1er élément de $\Lambda_\sigma - \{\chi_{a'_j}, 1 \leqslant j \leqslant j_n\}$ de type q' emboité dans un $\chi_{a'_{j'}} (1 \leqslant j' \leqslant j_n)$ de type $q'+1$)); enfin Λ désignant la lacune de 1ère espèce de cette 2ème éventualité, $a'_{j_n+1}, a'_{j_n+2}, \ldots a'_{j_{n+1}}$ sont formés de façon que les éléments $\chi_{a'_{j_n+1}}, \chi_{a'_{j_n+2}}, \ldots$ $\ldots, \chi_{a'_{j_{n+1}}}$ de $\big(\bigcup_{1<\sigma<s} \Lambda'_\sigma\big) \cup \Lambda \cup \{\chi_{a_{n+1}}\}$ soient dans l'ordre naturel croissant.

Clairement $j \to \chi_{a'_j}$ est une numérotation normale de $\{\chi_{a'}, a' \in [1, \omega^\omega[\}$ qui vérifie

(19) $(\chi_{a'_{j_n}})_{n=1,2,\ldots}$ est sous base complémentée de $(\chi_{a'_j})_{j=1,2,\ldots}$ (Cf. lemme 1).

En effet, si nous n'avons pas (19) il existe $f = \sum_{1 \leqslant j} \mu_{a'_j}(f) \chi_{a'_j} \in C_0(\omega^\omega)$ avec divergence de $\sum_{1 \leqslant n} \mu_{a'_{j_n}}(f) \chi_{a'_{j_n}}$, d'où un réel $\eta > 0$ tel que quel que soit l'entier $N > 0$, nous avons des entiers n' et n'' vérifiant $N < n' \leqslant n''$ et

$$\Big\| \sum_{n' \leqslant n \leqslant n''} \mu_{a'_{j_n}}(f) \chi_{a'_{j_n}} \Big\| > \eta$$

d'où l'existence de $a \in [1, \omega^\omega[$ vérifiant

$$\Big| \sum_{n' \leqslant n \leqslant n''} \mu_{a'_{j_n}}(f) \chi_{a'_{j_n}}(a) \Big| > \eta;$$

nous avons $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tels que $\chi_{a'_{j_{n_1}}}, \ldots, \chi_{a'_{j_{n_k}}}$ soient les $\chi_{a'_{j_n}}$ qui vérifient $n' \leqslant n \leqslant n''$ et $\chi_{a'_{j_n}}(a) = 1$; par la construction de $n \to \chi_{a_n} = \chi_{a'_{j_n}}$ nous avons: type de $\chi_{a'_{j_{n_1}}} = 1 +$ type de $\chi_{a'_{j_{n_2}}} = \ldots = (k-1) +$ type de $\chi_{a'_{j_{n_k}}}$ ce qui montre, avec (18), que $\chi_{a'_{j_{n_1}}}, \ldots, \chi_{a'_{j_{n_k}}}$ sont aussi les $\chi_{a'_j}$ qui vérifient $j_{n_1} \leqslant j \leqslant j_{n_k}$ et $\chi_{a'_j}(a) = 1$ d'où

$$\Big| \sum_{j_{n_1} \leqslant j \leqslant j_{n_k}} \mu_{a'_j}(f) \chi_{a'_j}(a) \Big| > \eta$$

en contradiction avec la convergence de $\sum\limits_{1\leqslant j} \mu_{a'_j}(f)\chi_{a'_j}$; ce raisonnement qui établit (19) établit aussi que nous ne pouvons pas trouver un entier $m>0$ et un ordinal $\alpha\in[1,\omega^\omega[$ vérifiant

$$\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant m}\mu_{a'_{j_n}}(f)\chi_{a'_{j_n}}(\alpha)\Big|>2\|f\|;$$

résumons avec le

Lemme 4. *Nous pouvons selectionner une partie normale A de $[1,\omega^\omega[$ telle que $[\varphi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in A}$ est une famille normale associée où φ: $[1,\omega^\omega[\to[1,\omega^\omega]$ est définie par* (11), (12) *et* (13), *et nous pouvons selectionner une numérotation normale $n\to\chi_{\alpha_n}$ de $\{\chi_\alpha,\ \alpha\in A\}$ telle que si les μ_α ($\alpha\in A$) sont les formes liné·ires continues sur $C_0(\omega^\omega)$ de* (14) *alors nous avons*

(20) $\forall f,\ f\in C_0(\omega^\omega)\Rightarrow R(f)=\sum\limits_{1\leqslant n}\mu_{\alpha_n}(f)\chi_{\alpha_n}$ *converge et R est une projection de $C_0(\omega^\omega)$ sur le sous espace fermé B de $C_0(\omega^\omega)$ engendré par les χ_{α_n} ($n=1,2,\ldots$) de norme $\leqslant 2$,*

(21) $\sum\limits_{1\leqslant n}\Big(\sum\limits_{1\leqslant n'\text{ et }n'\neq n}\big(|\mu_{\alpha_n}(P(\chi_{\alpha_{n'}}))|+|\mu_{\alpha_n}(Q(\chi_{\alpha_{n'}}))|\big)\Big)\leqslant\varepsilon.$

D'après (14) et (20) nous avons

$$\forall\alpha,\ \alpha\in A\Rightarrow\mu_\alpha\big(RP(\chi_\alpha)\big)+\mu_\alpha\big(RQ(\chi_\alpha)\big)=\mu_\alpha\big(R(\chi_\alpha)\big)=\mu_\alpha(\chi_\alpha)=1$$

donc en posant

$$E_0=\{\alpha,\ \alpha\in A\ \text{ et }\ \mu_\alpha\big(RP(\chi_\alpha)\big)\geqslant 1/2\}\quad\text{et}$$
$$E_1=\{\alpha,\ \alpha\in A\ \text{ et }\ \mu_\alpha\big(RQ(\chi_\alpha)\big)\geqslant 1/2\}$$

nous avons $A=E_0\cup E_1$.

La suite $(\mu'_p)_{p=1,2,\ldots}$ étant celle du lemme 3 et, pour $p=1,2,\ldots$ la partie fermée A_p de $[\omega^{\mu'_p-1}+1,\ \omega^{\mu'_p}]$ étant celle du lemme 3 ($[\omega^{\mu'_p-1}+1,\ \omega^{\mu'_p}]$ étant canoniquement isomorphe pour l'ordre et homéomorphe à $[1,\omega^{\mu'_p}]$ et l'arithmétique des ordinaux utilisée ici étant celle de A car nous nous plaçons dans A) il existe une suite strictement croissante $(p_k)_{k=1,2,\ldots}$ d'entiers $\geqslant 1$ telle que nous ayons $\forall k,\ A_{p_k}\subset E_0$ ou $\forall k,\ A_{p_k}\subset E_1$; fixons nous les idées sur le cas $\forall k,\ A_{p_k}\subset E_0$, alors $\bigcup\limits_{1\leqslant k}A_{p_k}$ est visiblement une partie normale de A (donc aussi de $[1,\omega^\omega[$); d'après les conditions sur les types indiquées dans le lemme 3 et d'après les propriétés (11), (12) et (13) de φ, $[\varphi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in\bigcup_{1\leqslant k}A_{p_k}}$ est une famille normale associée et la restriction à $\{n,\ n\in N$ et $\alpha_n\in\bigcup\limits_{1\leqslant k}A_{p_k}\}$ de $n\to\chi_{\alpha_n}$ une numérotation normale de $\{\chi_\alpha,\ \alpha\in\bigcup\limits_{1\leqslant k}A_{p_k}\}$; enfin par construction nous avons

$$\forall\alpha,\ \alpha\in\bigcup_{1\leqslant k}A_{p_k}\Rightarrow 1/2\leqslant\mu_\alpha\big(RP(\chi_\alpha)\big)\leqslant 4\|P\|.$$

Définissons les suites $(\mu^l_k)_{k=1,2,\ldots}$ pour $l=1,2,\ldots$ par $\mu^1_k=\mu'_k$ pour $k=1,2,\ldots$ puis, par récurrence sur l'entier l, en posant, pour $l>1$, $\mu^l_k=\mu'_{\mu^{l-1}_k}$ pour $k=1,2,\ldots$ En itérant le lemme 3 nous voyons que si nous avons $[1,\omega^{\mu^l_k}]=\bigcup\limits_{0\leqslant m<2^l}E_m$ alors l'un au moins des ensembles E_m ($0\leqslant m<2^l$) contient une partie fermée de $[1,\omega^{\mu^l_k}]$ de même type d'ordre que $[1,\omega^k]$ et répondant aux autres conditions du lemme 3.

Pour chaque entier $k\geqslant 1$ désignons par ν_k un entier $\geqslant 1$ tel qu'en décomposant le segment $[1/2,\ 4\|P\|]$ de la droite réelle en 2^{ν_k} segments égaux successifs $(I_\nu)_{0\leqslant\nu<2^{\nu_k}}$ la longueur commune de ces segments est $<1/16\,(k+1)$; quitte à remplacer la suite $(p_k)_{k=1,2,\ldots}$ par l'une de ses sous suites nous pouvons supposer $\forall k,\ p_k\geqslant\mu^{\nu_k}_k$ donc en écrivant $A_{p_k}=\bigcup\limits_{0\leqslant\nu<2^{\nu_k}}E_{k,\nu}$, où, pour $0\leqslant\nu<2^{\nu_k}$ nous posons $E_{k,\nu}=\{\alpha,\ \alpha\in A_{p_k}$ et $\mu_\alpha\big(RP(\chi_\alpha)\big)\in I_\nu\}$ l'amélioration du lemme 3 que nous venons d'obtenir nous donne une partie fermée A'_{p_k} de A_{p_k} de même type d'ordre que $[1,\omega^k]$ répondant aux autres conditions du lemme 3 et vérifiant

$$\exists\nu'_k,\ 0\leqslant\nu'_k<2^{\nu_k}\ \text{ et }\ \forall\alpha,\ \alpha\in A'_{p_k}\Rightarrow\mu_\alpha\big(RP(\chi_\alpha)\big)\in I_{\nu'_k};$$

ainsi en posant $A'=\bigcup\limits_{1\leqslant k}A'_{p_k}$ nous obtenons le

Lemme 5. *Nous pouvons selectionner une partie normale A' de la partie normale A de $[1,\omega^\omega[$ qui intervient dans le lemme 4 telle que $[\varphi(\alpha),\alpha]_{\alpha\in A'}$ est une famille normale associée et telle que si $(n_j)_{j=1,2,\ldots}$ est la mise sous la forme d'une suite strictement croissante d'entiers de $\{n,\ n\in N$ et $\alpha_n\in A'\}$ en posant $\beta_j=\alpha_{n_j}$ ($j=1,2,\ldots$) alors $j\to\chi_{\beta_j}$ est une numérotation normale de $\{\chi_\alpha,\ \alpha\in A'\}$ qui vérifie*

(22) $\forall j,\ 1/2\leqslant\mu_{\beta_j}\big(RP(\chi_{\beta_j})\big)\leqslant 4\|P\|$ *ou* $\forall j,\ 1/2\leqslant\mu_{\beta_j}\big(RQ(\chi_{\beta_j})\big)\leqslant 4\|Q\|$

et qui vérifie, en nous fixant les idées sur le 1er *cas de* (22),

(23) *si pour chaque $\alpha\in A'$ la suite $\chi_{\beta_{j_1}},\ldots,\chi_{\beta_{j_m}}$ est la suite des χ_β ($\beta\in A'$) vérifiant $\chi_\beta(\alpha)=1$ et rangés par supports décroissants, alors en posant $\beta_{j_l}=\gamma_l$ ($1\leqslant l\leqslant m$) nous avons*

$$\forall l\forall l',\ 1\leqslant l\ \text{ et }\ l'\leqslant m\Rightarrow\big|\mu_{\gamma_l}\big(RP(\chi_{\gamma_l})\big)-\mu_{\gamma_{l'}}\big(RP(\chi_{\gamma_{l'}})\big)\big|<1/16\ m.$$

3. Le théorème principal pour $C_0(\omega^\omega)$. Nous sommes maintenant dans une position nous permettant d'établir la primarité de $C_0(\omega^\omega)$; soit en effet, avec les notations du lemme 5,

(24) $f\in B'$ ($=$ sous espace fermé de $C_0(\omega^\omega)$ engendré par les χ_{β_j} pour $j=1,2,\ldots$) avec $\|f\|=1$ d'où $f=\sum\limits_{1\leqslant j}\mu_{\beta_j}(f)\chi_{\beta_j}$;

dans ces conditions (Cf. lemme 2) nous pouvons trouver $\alpha\in A'$ vérifiant $|f(\alpha)|=1$; fixons nous les idées sur le cas $f(\alpha)=1$ de sorte que si $\chi_{\gamma_1},\ldots,$

χ_{γ_m} sont comme dans (23) nous avons

$$(25)\quad \sum_{1\leqslant l\leqslant m}\mu_{\gamma_l}(f) = 1.$$

La continuité de RP jointe à (24) donne

$$(26)\quad RP(f) = \sum_{1\leqslant j}\mu_{\beta_j}(f)RP(\chi_{\beta_j}).$$

Pour $j = 1, 2, \ldots$ nous pouvons, dans (26), développer $RP(\chi_{\beta_j}) \in B$ sur la base $(\chi_{a_n})_{n=1,2,\ldots}$ de B puis égaler les valeurs des deux membres au point a, et puisque seulement les $\chi_{\gamma_l}(a)$ $(1 \leqslant l \leqslant m)$ sont $\neq 0$ parmi les $\chi_{\beta_j}(a)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ nous pouvons écrire

$$(27)\quad RP(f)(a) = \sum_{1\leqslant j}\mu_{\beta_j}(f)\mu_{\beta_j}\big(RP(\chi_{\beta_j})\big)\chi_{\beta_j}(a) + \sum_{1\leqslant j}\mu_{\beta_j}(f)\Big(\sum_{1\leqslant n \text{ et } n\neq n_j}\mu_{a_n}\big(RP(\chi_{\beta_j})\big)\chi_{a_n}(a)\Big) = e_1 + e_2.$$

La définition de R donnée dans (20) nous donne

$$(28)\quad \forall n \forall j,\ \mu_{a_n}\big(RP(\chi_{\beta_j})\big) = \mu_{a_n}\big(P(\chi_{\beta_j})\big).$$

D'après (14), (21), (24) et (28), nous pouvons effectuer sur la valeur absolue $|e_2|$ de l'expression e_2 de (27) les majorations

$$(29)\quad |e_2| \leqslant 2\sum_{1\leqslant j}\Big(\sum_{1\leqslant n \text{ et } n\neq n_j}\big|\mu_{a_n}\big(P(\chi_{\beta_j})\big)\big|\Big) = 2\sum_{1\leqslant n}\Big(\sum_{1\leqslant j \text{ et } n\neq n_j}\big|\mu_{a_n}\big(P(\chi_{\beta_j})\big)\big|\Big) \leqslant 2\varepsilon;$$

en tenant compte en outre de (23) et (25) nous obtenons

$$(30)\quad e_1 = \sum_{1\leqslant l\leqslant m}\mu_{\gamma_l}(f)\mu_{\gamma_l}\big(RP(\chi_{\gamma_l})\big) = \sum_{1\leqslant l\leqslant m}\mu_{\gamma_l}(f)\mu_{\gamma_m}\big(RP(\chi_{\gamma_m})\big) + \sum_{1\leqslant l\leqslant m}\mu_{\gamma_l}(f)\Big(\mu_{\gamma_l}\big(RP(\chi_{\gamma_l})\big) - \mu_{\gamma_m}\big(RP(\chi_{\gamma_m})\big)\Big)$$
$$\geqslant 1/2 - 2\sum_{1\leqslant l\leqslant m}\big|\mu_{\gamma_l}\big(RP(\chi_{\gamma_l})\big) - \mu_{\gamma_m}RP(\chi_{\gamma_m})\big| \geqslant 1/2 - 1/8.$$

La comparaison entre (27), (29) et (30) donne

(31) $RP(f)(a) \geqslant 1/2 - 2\varepsilon - 1/8 \geqslant 1/4$ (en prenant $\varepsilon \leqslant 1/16$)

et puisque d'après (20) nous avons $\|R\| \leqslant 2$, de $1/4 \leqslant \|RP(f)\| \leqslant \|R\|\,\|P(f)\|$ déduit de (31) nous déduisons

(32) $\|P(f)\| \geqslant 1/8$

et (32) implique que P restreint à B' est un isomorphisme; puisque B' est isomorphe à $C_0(\omega^\omega)$ (Cf. lemme 2) le corollaire 1 de [3] donne le

Théorème 1. *L'espace de Banach $C_0(\omega^\omega)$ est primaire.*

4. Le théorème principal dans le cas général. Nous désignons par ξ un ordinal vérifiant $1 \leqslant \xi < \omega_1$; P désignera maintenant une projection continue de $C_0(\omega^{\omega^\xi})$ et Q sa supplémentaire; nous écrirons

$$(33)\quad C_0(\omega^{\omega^\xi}) = X \oplus Y \quad \text{où} \quad X = P\big(C_0(\omega^{\omega^\xi})\big) \quad \text{et} \quad Y = Q\big(C_0(\omega^{\omega^\xi})\big).$$

Nous nous proposons d'obtenir successivement des extensions des résultats de 2 telles que les extensions des lemmes 4 et 5 permettent de reproduire le calcul de 3.

Extension du lemme 3. Elle consistera en le

Lemme 6. *Si ξ est de la forme $\xi'+1$ (resp. si ξ est ordinal limite) il est possible de former une suite strictement croissante $(\theta_p)_{p=1,2,\ldots}$ d'entiers $\geqslant 1$ (resp. une suite strictement croissante $(\xi_p)_{p=1,2,\ldots}$ d'ordinaux $\geqslant 1$ vérifiant $\xi_p \underset{p\to\infty}{\to} \xi$) telle que quel que soit p (resp. quel que soit $p > 1$) quelle que soit la famille normale $[\psi(a), a]_{a\in I_{\theta_p}}$ où $I_{\theta_p} = [1, \omega^{\omega^{\xi'}\theta_p}]$ (resp. la famille normale $[\psi(a), a]_{a\in I'_p}$ où $I'_p = [1, \omega^{\omega^{\xi_p}}]$) et quels que soient les ensembles E_0 et E_1 vérifiant $I_{\theta_p} = E_0 \cup E_1$ (resp. vérifiant $I'_p = E_0 \cup E_1$) l'un au moins de ces deux ensembles contient une partie fermée A_p de I_{θ_p} (resp. de I'_p) de même type d'ordre que $I_p = [1, \omega^{\omega^{\xi'}p}]$ (resp. que I'_{p-1}) et telle que $[\psi(a), a]_{a\in A_p}$ est normale.*

Démonstration Pour $\xi = 1$, le lemme 6 est une conséquence immédiate du lemme 3. Si ξ est un ordinal limite et si le lemme 6 est établi pour chaque ordinal η vérifiant $1 \leqslant \eta < \xi$, formons une suite strictement croissante $(\eta_p)_{p=1,2,\ldots}$ d'ordinaux $\geqslant 1$ vérifiant $\eta_p \underset{p\to\infty}{\to} \xi$; pour $p = 1, 2, \ldots$ posons $\beta''_p = \omega^{\eta_p}$ et $S_p = [1, \omega^{\beta''_p}]$; par l'hypothèse de récurrence à chaque p nous pouvons associer un entier $\varrho_p > 0$ tel qu'en posant $S = [1, \omega^{\beta''_p\varrho_p}]$, si $S = E_0 \cup E_1$ et si $[\psi(a), a]_{a\in S}$ est normale, alors E_0 ou E_1 contient une partie fermée A_p de S de même type d'ordre que S_p et telle que $[\psi(a), a]_{a\in A_p}$ est normale; ce résultat vaut à fortiori en remplaçant S par S_{p+1} ce qui montre que ξ satisfait le lemme 6 en prenant $\xi_p = \eta_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

Il nous reste seulement à établir le lemme 6 dans le case où $\xi > 1$ est de la forme $\xi = \xi'+1$ et où ce lemme a déja été établi pour chaque ordinal η vérifiant $1 \leqslant \eta < \xi$. Posons $\beta = \omega^{\xi'}$ (d'où $I_n = [1, \omega^{\beta n}]$ pour $n = 1, 2, \ldots$) et montrons que nous pouvons prendre $\theta_1 = 2$; en effet, supposons par exemple $\omega^{\beta 2} \in E_1$; les $a \in I_2$ de type $\geqslant \beta$ qui sont différents de $\omega^{\beta 2}$ sont de la forme $\omega^{\beta+a_q}m_q + \ldots + \omega^{\beta+a_0}m_0$ où les entiers $m_{q'} \geqslant 0$ $(0 \leqslant q' \leqslant q)$ sont non tous nuls et où $\beta > a_q > a_{q-1} > \ldots > a_0 \geqslant 0$; ils forment donc une partie fermée A de $[1, \omega^{\beta 2}[$ de même type d'ordre que $[1, \omega^\beta[$ et les éléments d'un type donné (dans A) sont d'un même type dans $[1, \omega^{\beta 2}[$, donc $[\psi(a), a]_{a\in A}$ est normale.

Que ξ' soit ordinal limite ou non, l'hypothèse de récurrence, la normalité de $[\psi(a), a]_{a\in A}$ et la méthode employée pour établir le lemme 5 donnent une suite $(B_k)_{k=1,2,\dots}$ de parties fermées de A vérifiant:

(34) $\forall k,\ B_k \subset E_0$ ou $\forall k,\ B_k \subset E_1$,

(35) $\forall k \forall \alpha \forall \alpha',\ \alpha \in B_k$ et $\alpha' \in B_{k+1} \Rightarrow \alpha < \psi(\alpha')$,

(36) pour $k = 1, 2, \dots, B_k$ a le type d'ordre de $[1, \omega^{\eta_k}]$ où η_k croît strictement vers β et $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in B_k}$ est normale.

Ces propriétés donnent:

(37) $\bigcup_{1 \leqslant k} B_k$ est une partie normale de A et $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in \bigcup_{1 \leqslant k} B_k}$ est normale.

En vertu de (37) et de $\omega^{\beta 2} \in E_1$, si dans (34) nous avons $\forall k,\ B_k \subset E_1$ nous pouvons prendre $A_1 = (\bigcup_{1 \leqslant k} B_k) \cup \{\omega^{\beta 2}\}$; supposons donc $B = \bigcup_{1 \leqslant k} B_k \subset E_0$.

S'il existe un point $\beta_0 \in B$ isolé (dans B) de précédent β_0' (dans B) tel que quel que soit $\gamma \in I_2$ vérifiant $\beta_0' < \gamma < \beta_0$ et quel soit η vérifiant $1 \leqslant \eta < \beta$ nous pouvons trouver une partie fermée C_η de l'intervalle $]\gamma, \beta_0[$ de même type d'ordre que $[1, \omega^\eta]$, telle que $C_\eta \subset E_0$ et $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in C_\eta}$ normale, alors la méthode précédente nous donne $(\eta_k)_{k=1,2\dots}$ et $(C_{\eta_k})_{k=1,2,\dots}$ vérifiant

pour $k = 1, 2, \dots, C_{\eta_k}$ est un fermé de $]\beta_0', \beta_0[$ de même type d'ordre que $[1, \omega^{\eta_k}]$ où η_k croît strictement vers β et $C_{\eta_k} \subset E_0$ et $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in C_{\eta_k}}$ normale et $\forall \alpha \forall \alpha',\ \alpha \in C_{\eta_k}$ et $\alpha' \in C_{\eta_{k+1}} \Rightarrow \alpha < \psi(\alpha')$

et nous pouvons prendre $A_1 = (\bigcup_{1 \leqslant k} C_{\eta_k}) \cup \{\beta_0\}$.

S'il n'existe pas un tel $\beta_0 \in B$ formons une suite strictement croissante $(\beta_k)_{k=1,2,\dots}$ de points de B isolés (dans B) avec $\beta_k \underset{k\to\infty}{\to} \omega^{\beta 2}$ et une suite strictement croissante $(\eta_k)_{k=1,2,\dots}$ avec $\eta_k \underset{k\to\infty}{\to} \beta$; puisque type de β_k (dans $[1, \omega^{\beta 2}]$) $\geqslant \beta$, il existe $\gamma_k \in]\beta_k', \beta_k[$ vérifiant type de γ_k (dans $[1, \omega^{\beta 2}]$) $= \eta_k$ de sorte que le segment $J_k' = [\gamma_k+1, \gamma_k+\omega^{\eta_k}]$ de $]\beta_k', \beta_k[$ vérifie $\forall \alpha,\ \alpha \in J_k'$ $\Rightarrow$ type de α dans $[1, \omega^{\beta 2}]$ = type de α dans J_k' identifié à $[1, \omega^{\eta_k}]$, donc $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in J_k'}$ est normale, et si d'après l'hypothèse de récurrence, la suite $(\eta_k)_{k=1,2,\dots}$ est bien choisie, pour $k = 2, 3, \dots$ nous pouvons former une partie D_k de J_k' de même type d'ordre que $[1, \omega^{\eta_{k-1}}]$ avec $[\psi(\alpha); \alpha]_{\alpha \in D_k}$ normale, $D_k \subset E_1, \forall \alpha \forall \alpha',\ \alpha \in D_k$ et $\alpha' \in D_{k+1} \Rightarrow \alpha < \psi(\alpha')$ montrant que nous pouvons prendre $A_1 = (\bigcup_{2 \leqslant k} D_k) \cup \{\omega^{\beta 2}\}$.

Supposons que pour un entier $p > 1$ les entiers $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{p-1}$ sont construits vérifiant le lemme 6 et posons $\theta_p = 2\theta_{p-1}+2$; les $\alpha \in I_{\theta_p}$ de type $\geqslant \beta(\theta_{p-1}+2)$ qui sont différents de $\omega^{\beta\theta_p}$ sont de la forme $\omega^{\beta(\theta_{p-1}+2)+\alpha_q} m_q + \dots + \omega^{\beta(\theta_{p-1}+2)+\alpha_0} m_0$ où les entiers $m^{q'} \geqslant 0$ $(0 \leqslant q' \leqslant q)$ sont non tous nuls et où $\beta\theta_{p-1} > \alpha_q > \alpha_{q-1} > \dots > \alpha_0 \geqslant 0$; ainsi les $\alpha \in I_{\theta_p}$ de type $\geqslant \beta(\theta_{p-1}+2)$ forment une partie fermée A de I_{θ_p} de même type d'ordre que $I_{\theta_{p-1}}$ et les éléments d'un type donné (dans A) sont d'un même type (dans I_{θ_p}) de sorte que $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in A}$ est normale.

Par l'hypothèse de récurrence, nous avons une partie fermée B de A de même type d'ordre que I_{p-1} avec $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in B}$ normale et qui vérifie par exemple $B \subset E_1$. Si pour chaque point $\beta_0 \in B$ isolé (dans B) de précédent β_0' (dans B) pour chaque $\gamma \in I_{\theta_p}$ vérifiant $\beta_0' < \gamma < \beta_0$ et pour chaque η vérifiant $1 \leqslant \eta < \beta$ nous avons une partie fermée C_η de l'intervalle $]\gamma, \beta_0[$ de même type d'ordre que $[1, \omega^\eta]$ et telle que $C_\eta \subset E_1$ avec $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in C_\eta}$ normale, alors la méthode deux fois employée nous donne une partie fermée C_{β_0}' de $]\beta_0', \beta_0[$ de même type d'ordre que $[1, \omega^\beta[$ vérifiant $\sup_{\alpha \in C'_{\beta_0}} \alpha = \beta_0$ avec $\forall \alpha,\ \alpha \in C_{\beta_0}' \Rightarrow \beta_0' < \psi(\alpha)$ et avec $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in C_{\beta_0}'}$ normale de sorte que nous pouvons prendre $A_p = B \cup (\bigcup_{\beta_0 \text{ isolé dans } B} C_{\beta_0}')$.

Sinon il existe $\beta_0 \in B$ isolé (dans B), η vérifiant $1 \leqslant \eta < \beta$ et γ vérifiant $\beta_0' < \gamma < \beta_0$ tel que $]\gamma, \beta_0[$ ne contienne pas une partie fermée C de même type d'ordre que $[1, \omega^\eta]$ vérifiant $C \subset E_1$ et $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in C}$ normale; puisque type de β_0 (dans I_{θ_p}) $\geqslant \beta(\theta_{p-1}+2)$ nous pouvons former un segment I de $]\gamma, \beta_0[$ de la forme $I = [\delta+1, \delta+\omega^{\beta(\theta_{p-1}+1)}]$ avec type de δ (dans I_{θ_p}) $= \beta(\theta_{p-1}+1)$ de sorte que le type d'un $\alpha \in I$ identifié à $[1, \omega^{\beta(\theta_{p-1}+1)}]$ coïncide avec le type de α dans I_{θ_p}; en conséquence les points de I de la forme $\delta+\alpha$ avec type de $\alpha \geqslant \beta$ forment une partie fermée F de I de même type d'ordre que $I_{\theta_{p-1}}$ avec $[\psi(\delta+\alpha), \delta+\alpha]_{\delta+\alpha \in A}$ normale; par l'hypothèse de récurrence F contient une partie fermée G de même type d'ordre que I_{p-1} vérifiant $G \subset E_0$ et $[\psi(\delta+\alpha), \delta+\alpha]_{\delta+\alpha \in G}$ normale; soit $\lambda \in G$ isolé (dans G) de précédent λ' (dans G); nous n'avons que deux cas; dans le premier cas type de λ (dans I_{θ_p}) $= \beta$; nos hypothèses et la méthode trois fois employée donnent $(\eta_k)_{k=1,2,\dots}$ et $(C_{\eta_k})_{k=1,2,\dots}$ vérifiant

(38) $\forall k,\ C_{\eta_k}$ est fermé dans $]\lambda', \lambda[$ de même type d'ordre que $[1, \omega^{\eta_k}]$ où η_k croît strictement vers β et $C_{\eta_k} \subset E_0$ et $[\psi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in C_{\eta_k}}$ normale et $\forall \alpha \forall \alpha',\ \alpha \in C_{\eta_k}$ et $\alpha' \in C_{\eta_{k+1}} \Rightarrow \lambda' < \psi(\alpha)$ et $\alpha < \psi(\alpha')$

et en posant $D_\lambda = \bigcup_{1 \leqslant k} C_{\eta_k}$ nous déduisons $\sup_{\alpha \in D_\lambda} \alpha = \lambda$ de type de $\lambda = \beta$; dans le deuxième cas type de $\lambda > \beta$; nous choisissons une suite strictement croissante $(\lambda_k)_{k=1,2,\dots}$ de points de $]\lambda', \lambda[$ vérifiant $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\to} \lambda$ et $\forall k$, type de $\lambda_k = \beta$; alors nos hypothèses et la méthode précédente donnent encore $(\eta_k)_{k=1,2,\dots}$ et $(C_{\eta_k})_{k=1,2,\dots}$ avec (38) où "C_{η_k} est fermé dans $]\lambda', \lambda[$" est remplacé par "C_{η_k} est fermé dans $[\lambda_k+1, \lambda_{k+1}]$" d'où encore $\sup_{\alpha \in D_\lambda} \alpha = \lambda$ et nous pouvons prendre $A_p = G \cup (\bigcup_{\lambda \text{ isolé dans } G} D_\lambda)$; le lemme 6 est établi.

Extension de φ. Soit ξ un ordinal vérifiant $1 \leqslant \xi < \omega_1$ et construisons $\varphi = \varphi_\xi$: $\hat{I}_\xi \to \hat{I}_\xi$ où $\hat{I}_\xi = [1, \omega^{\omega^\xi}]$ (dans 2 nous avons construit $\varphi = \varphi_1$: $[1, \omega^\omega[\to [1, \omega^\omega[$, étendons φ_1 à $[1, \omega^\omega]$ en posant $\varphi_1(\omega^\omega) = 1$).

Supposons $\xi > 1$ et φ construite sur chaque $\hat{I}_\eta$ avec $1 \leqslant \eta < \xi$.

Si ξ est ordinal limite nous formons $(\eta_k)_{k=1,2,\ldots}$ croissant strictement vers ξ, nous posons

$$\varphi(\omega^{\omega^{\eta_1}}) = 1 \quad \text{et} \quad \varphi(\omega^{\omega^{\eta_k}}) = \omega^{\omega^{\eta_{k-1}}}+1 \quad (k = 2, 3, \ldots)$$

et en identifiant $[1, \omega^{\omega^{\eta_1}}[$ et $[\omega^{\omega^{\eta_{k-1}}}+1, \omega^{\omega^{\eta_k}}[$ $(k = 2, 3, \ldots)$ à $[1, \omega^{\omega^{\eta_1}}[$ et $[1, \omega^{\omega^{\eta_k}}[$ $(k = 2, 3, \ldots)$ nous conservons sur ces intervalles la définition de φ.

Si $\xi = \xi'+1$ nous posons encore $\beta = \omega^{\xi'}$ et $I_j = [1, \omega^{\beta j}]$ $(j = 1, 2, \ldots)$; observons que si n est entier > 1 et que si φ est déja construite sur les I_j $(1 \leqslant j < n)$ alors nous construisons Φ sur I_n comme suit: $A_n = \{\alpha,\ \alpha \in I_n$ et $\omega(n-1) \leqslant$ type de $\alpha \leqslant \omega n\}$ est un fermé de I_n de même type d'ordre que I_1; $\tilde{\varphi}\colon A_n \to A_n$ étant comme φ lorsque A_n est identifié à I_1, le signe $+$ étant au sens de I_n et $\tilde{\varphi}(\alpha)'$ étant le précédent (dans A_n) de $\tilde{\varphi}(\alpha)$, posons $\forall \alpha$, $\alpha \in A_n \Rightarrow \varphi(\alpha) = \tilde{\varphi}(\alpha)'+1$; en identifiant chaque intervalle $]\alpha', \alpha[$ de I_n (α isolé dans A_n de précédent α' dans A_n) à $[1, \omega^{\beta(n-1)}[$ sur lequel nous conservons la définition de φ, φ se trouve construite sur I_n.

La construction de φ étant faite sur I_n pour $n = 1, 2, \ldots$ construisons φ sur $\hat{I}_\xi$ comme suit: nous posons $\varphi(\omega^\beta) = 1$ et $\varphi(\omega^{\beta n}) = \omega^{\beta(n-1)}+1$ $(n = 2, 3, \ldots)$ et en identifiant $[1, \omega^\beta[$ et $[\omega^{\beta(n-1)}+1, \omega^{\beta n}[$ $(n = 2, 3, \ldots)$ à $[1, \omega^\beta[$ et $[1, \omega^{\beta n}[$ $(n = 2, 3, \ldots)$ nous conservons sur ces intervalles la définition de φ.

Extension du lemme 4. Désignons toujours par ξ un ordinal vérifiant $1 \leqslant \xi < \omega_1$, par ε un réel > 0, par φ l'application de $[1, \omega^{\omega^\xi}[$ dans lui même précédemment construite et par χ_α la fonction caractéristique du segment $[\varphi(\alpha), \alpha]$ de $[1, \omega^{\omega^\xi}[$ $(\alpha \in [1, \omega^{\omega^\xi}[)$.

A partir de $\{\chi_\alpha,\ \alpha \in [1, \omega^\omega[\}$ et de ε, nous avons décrit dans 2 ce que nous entendions par une numérotation normale $n \to \chi_{\alpha_n}$ du genre Γ_1 dans laquelle, pour nous fixer les idées, nous étions partis de $\chi_{\alpha_1} = \chi_\omega$, mais clairement nous pouvons apporter la modification

(39) au lieu de partir de $\chi_{\alpha_1} = \chi_\omega$ nous partons de $\chi_{\alpha_1} = \chi_{\omega^\varrho}$ où l'entier $\varrho > 0$ est quelquonque,

auquel cas nous parlerons d'une *numérotation normale du genre* $\Gamma_1'(\varepsilon)$ (en abrégé: d'une $\Gamma_1'(\varepsilon)$).

Plus généralement à partir de $\{\chi_\alpha,\ \alpha \in [1, \omega^{\omega^\xi}[\}$ et de ε, nous allons construire, par récurrence sur ξ, une numérotation normale $n \to \chi_{\alpha_n}$ du genre $\Gamma_\xi'(\varepsilon)$ (en abrégé: une $\Gamma_\xi'(\varepsilon)$) qui vérifiera aussi la condition (17): en supprimant la condition (17) nous obtiendrons ce que nous appellerons une *numérotation normale du genre* Γ_ξ' (en abrégé: une Γ_ξ'); nous pouvons nous restreindre à la construction, par récurrence sur ξ, d'une Γ_ξ' car si nous désirons en plus la condition (17), cette condition peut se réaliser pas à pas comme il est dit après (15).

Supposons donc que $\xi > 1$ et que pour chaque ordinal η vérifiant $1 \leqslant \eta < \xi$ soient précisées les Γ_η'.

Si ξ est ordinal limite nous reprenons la suite $(\eta_k)_{k=1,2,\ldots}$ de la construction de $\varphi = \varphi_\xi$ et nous formons une partition $N = \bigcup_{1 \leqslant j} N_j$ où les N_j $(j = 1, 2, \ldots)$ sont infinis et où $1 \in N_1$; en posant $\pi_j = \omega^{\omega^{\eta_j}}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ nous partons de $\chi_{\alpha_1} = \chi_{\pi k_1}$ où l'entier $k_1 > 0$ est quelquonque puis, supposant construits $\chi_{\alpha_1}, \ldots, \chi_{\alpha_{m-1}}$ $(m > 1)$, en définissant j par $m \in N_j$, nous envisageons deux cas; dans le 1er cas m est le plus petit élément de N_j; alors nous prenons $\chi_{\alpha_m} = \chi_{\pi_{k_j}}$ où l'entier $k_j > 0$ est assez grand pour que χ_{α_m} se situe au delà des χ_{α_n} $(1 \leqslant n < m)$; dans le 2éme cas m est le μème élément de N_j avec $\mu > 1$ et k_j est défini par $\pi_{k_j} = \alpha_n$ où n est le 1er élément de N_j; alors χ_{α_m} est pris comme le μème élément d'une Γ_{η_j}' que nous formons sur $[\pi_{k_j-1}, \pi_{k_j}[$.

Si $\xi = \xi'+1$, nous posons encore $\beta = \omega^{\xi'}$ et pour n entier > 1, nous posons $I_n'' = [1, \omega^{\beta n}[$; alors $A_n = \{\alpha,\ \alpha \in I_n''$ et $\beta(n-1) \leqslant$ type de $\alpha < \beta n\}$ est une partie fermée de I_n'' de même type d'ordre que I_1''; en supposant précisées, à partir de $\{\chi_\alpha,\ \alpha \in I_j''\}$, les $\Gamma_{\xi',j}'$ (les $\Gamma_{\xi',1}'$ étant les $\Gamma_{\xi'}'$) pour $1 \leqslant j < n$ $(n > 1)$, nous commençons une $\Gamma_{\xi'}'$ sur A_n identifié à I_1'' jusqu'à ce que nous rencontrions un $\chi_{\alpha_{m_1}} \in A_n$ isolé (dans A_n) de précédent α_{m_1}' (dans A_n); nous commençons une $\Gamma_{\xi',n-1}'$ sur $[\alpha_{m_1}'+1, \alpha_{m_1}[$ jusqu'à la rencontre de $\chi_{\alpha_{m_2}}$ avec α_{m_2} isolé dans $[\alpha_{m_1}'+1, \alpha_{m_1}[$; nous reprenons alors la Γ_ξ', commencée sur A_n et ainsi de suite pour obtenir une $\Gamma_{\xi',n}'$; de là pour construire une Γ_ξ' $(\xi = \xi'+1)$ nous commençons par prendre $\chi_{\alpha_1} = \chi_{\omega^{\beta n_1}}$ où l'entier $n_1 > 0$ est quelquonque et nous commençons, sur $\tilde{I}_{n_1} = [\omega^{\beta(n_1-1)}+1, \omega^{\beta n_1}[$, une Γ_{ξ',n_1}' jusqu'à la rencontre de $\chi_{\alpha_{m_1}}$ avec α_{m_1} isolé dans $\tilde{I}_{n_1}$ auquel cas nous prenons $\chi_{\alpha_{m_l+1}} = \chi_{\omega^{\beta n_2}}$ $(n_2 > n_1)$ et nous commençons une Γ_{ξ',n_2}' sur $\tilde{I}_{n_2}$ jusqu'à la rencontre de $\chi_{\alpha_{m_2}}$ avec α_{m_2} isolé dans $\tilde{I}_{n_2}$ et nous reprenons la Γ_{ξ',n_1}' commencée sur $\tilde{I}_{n_1}$ etc...

Rappelons qu'en imposant la condition supplémentaire (17) que nous réalisons à chaque pas comme il est dit après (15), cette Γ_ξ' devient une $\Gamma_\xi'(\varepsilon)$ et notons à ce sujet l'importance de (39) qui permet de réaliser cette condition supplémentaire à chaque fois que nous commençons une $\Gamma_1'(\varepsilon)$.

Clairement $A = \{\alpha_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ est une partie normale de $[1, \omega^{\omega^\xi}[$, $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha \in A_\xi}$ une famille normale associée et $n \to \chi_{\alpha_n}$ une numérotation normale de $\{\chi_\alpha,\ \alpha \in A_\xi\}$; Clairement comme dans 2 nous pouvons former une numérotation normale $j \to \chi_{\alpha_j'}$ de $\{\chi_\alpha,\ \alpha \in [1, \omega^{\omega^\xi}[\}$ vérifiant (18); enfin clairement si l'entier n_2 est le plus petit entier $> n_1$ pour lequel $\chi_{\alpha_{n_2}}$ est incluse dans $\chi_{\alpha_{n_1}}$ alors nous avons $\forall \alpha$ (χ_α inclus dans $\chi_{\alpha_{n_1}}$ et $\chi_{\alpha_{n_2}}$ inclus dans χ_α) $\Rightarrow$ ($\chi_\alpha = \chi_{\alpha_{n_1}}$ ou $\chi_\alpha = \chi_{\alpha_{n_2}}$), permettant comme dans 2 de déduire de la convergence de $f = \sum_{1\leqslant j}\mu_{\alpha'_j}(f)\chi_{\alpha'_j} \in C_0(\omega^{\omega^\xi})$ celle de $R(f) = \sum_{1\leqslant n}\mu_{\alpha'_{j_n}}(f)\chi_{\alpha'_{j_n}}$ avec $\|R(f)\| \leqslant 2\|f\|$ d'où le

LEMME 7. *Sous l'hypothèse* (33) *où ξ est un ordinal vérifiant $1 \leqslant \xi < \omega_1$, si ε est un réel > 0 et si $\varphi = \varphi_\xi$ est l'extension construite de $\varphi = \varphi_1$ alors nous avons une partie normale A_ξ de $[1, \omega^{\omega^\xi}[$ telle que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in A_\xi}$ est une famille normale associée et nous avons une numérotation normale $n \to \chi_{\alpha_n}$ de $\{\chi_\alpha,\ \alpha\in A_\xi\}$ telle que si les formes linéaires continues μ_α $(\alpha\in A_\xi)$ sur $C_0(\omega^{\omega^\xi})$ sont encore définies par* (14) *(avec $[1, \omega^{\omega^\xi}[$ à la place de $[1, \omega^\omega[$) les formules* (20) *et* (21) *valent encore (avec $C_0(\omega^{\omega^\xi})$ à la place de $C_0(\omega^\omega)$).*

Extension du lemme 5. En nous replaçant dans 3 observons que si dans (30) nous posons

(40) $a_l = \mu_{\gamma_l}(f)$ et $b_l = \mu_{\gamma_l}(RP(\chi_{\gamma_l}))$ $(1\leqslant l\leqslant m)$

alors avec la transformation d'Abel le 2ème membre de (30) devient

(41) $\sum_{1\leqslant l\leqslant m} a_l b_l = \Big(\sum_{1\leqslant l\leqslant m-1} s_l(b_l - b_{l+1})\Big) + s_m b_m$ en posant $s_l = \sum_{1\leqslant p\leqslant l} a_p$ $(1\leqslant l \leqslant m)$.

Puisque $f\in B'$ vérifie $\|f\| = 1$, que pour $l = 1, 2, \ldots, m$, s_l est une différence, prise au point $\alpha\in A'$, de deux sommes partielles de la série $\sum_{1\leqslant j}\mu_{\beta_j}(f)\chi_{\beta_j}$ et que $(\chi_{\beta_j})_{j=1,2,\ldots}$ est une base monotone de B', nous avons

(42) $\sup_{1\leqslant l\leqslant m} |s_l| \leqslant 2;$

en se rappelant

(43) $s_m = 1$ et $\forall l,\ 1\leqslant l\leqslant m \Rightarrow 1/2 \leqslant b_l \leqslant 4\|P\|,$

alors avec (41), (42) et (43) nous pouvons remplacer l'estimation (30) par

(44) $\sum_{1\leqslant l\leqslant m} a_l b_l \geqslant 1/2 - 2\sum_{1\leqslant l\leqslant m-1}|b_l - b_{l+1}|,$

et (44) donnera la même conclusion que (30) (à savoir $e_1 \geqslant 1/2 - 1/8$) si nous prenons $\varepsilon \leqslant 1/16$ et si nous obtenons

(45) $\forall\alpha,\ \alpha\in A' \Rightarrow \sum_{1\leqslant l\leqslant m-1}|b_l - b_{l+1}| \leqslant \varepsilon.$

Cela étant, avec la donnée d'un ordinal ξ vérifiant $1\leqslant\xi<\omega_1$ et d'un réel $\varepsilon > 0$, revenons aux notations de l'extension du lemme 4; en utilisant le lemme 6 nous obtenons immédiatement une partie normale A''_ξ de la partie normale A_ξ du lemme 7 telle que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in A''_\xi}$ soit normale et telle que nous ayons

(46) $\forall\alpha,\ \alpha\in A''_\xi \Rightarrow 1/2 \leqslant \mu_\alpha(P(\chi_\alpha)) \leqslant 4\|P\|$ ou

$$\forall\alpha,\ \alpha\in A''_\xi \Rightarrow 1/2 \leqslant \mu_\alpha(Q(\chi_\alpha)) \leqslant 4\|Q\|;$$

nous nous fixerons les idées sur le 1er cas de (46), c'est-à-dire sur le cas où nous avons

(47) $\forall\alpha,\ \alpha\in A''_\xi \Rightarrow 1/2 \leqslant \mu_\alpha(P(\chi_\alpha)) \leqslant 4\|P\|.$

Naturellement le raisonnement de la démonstration du lemme 5 montre que dans le cas $\xi = 1$ il existe une partie normale A'_ξ de A''_ξ telle que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in A'_\xi}$ est normale et telle que nous ayons (45) avec A'_ξ à la place de A'.

Supposons donc $\xi > 1$ et (45) obtenu avec A'_η à la place de A' pour chaque ordinal η vérifiant $1\leqslant\eta<\xi$. Supposons $\xi = \xi'+1$ et identifions A''_ξ avec $[1, \omega^{\omega^\xi}[$; le lemme 6 nous donne un entier $\varrho_1 > 0$, une partie fermée B_1 de $[1, \omega^{\beta\varrho_1}]$ (nous avons encore posé $\beta = \omega^{\xi'}$) de même type d'ordre que $[1, \omega^\beta]$ avec $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in B_1}$ normale et avec

$$\forall\alpha\forall\alpha',\ \alpha \text{ et } \alpha'\in B_1 \Rightarrow |\mu_\alpha(P(\chi_\alpha)) - \mu_{\alpha'}(P(\chi_{\alpha'}))| \leqslant \varepsilon/2;$$

possons $B_1 = \sup_{\alpha\in B_1}\alpha$ et $C_1 = B_1 - \{\beta_1\}$; C_1 s'identifie à $[1, \omega_\beta[$ et par l'hypothèse de récurrence nous avons une partie normale C'_1 de C_1 avec $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in C'_1}$ normale, et, la suite $(b_l)_{1\leqslant l\leqslant m}$ étant relative à C'_1 et à $\alpha\in C'_1$, nous avons $\forall\alpha,\ \alpha\in C'_1 \Rightarrow \sum_{1\leqslant l\leqslant m-1}|b_l - b_{l+1}| \leqslant \varepsilon/2$; ainsi en posant $B'_1 = C'_1 \cup\{\beta_1\}$, la suite $(b_l)_{1\leqslant l\leqslant m}$ étant relative à B'_1 et à $\alpha\in B'_1$, nous avons $\forall\alpha,\ \alpha\in B'_1 \Rightarrow \sum_{1\leqslant l\leqslant m-1}|b_l - b_{l+1}| \leqslant \varepsilon$.

Supposons que pour un entier $p\geqslant 1$ nous ayons construit des fermés $B'_1, \ldots, B'_p$ de A''_ξ (identifié à $[1, \omega^{\omega^\xi}[$) vérifiant

(48) 1° $\forall q,\ 1\leqslant q\leqslant p \Rightarrow B'_q$ de même type d'ordre que $[1, \omega^{\beta q}]$ et $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in B'_q}$ normale,

2° $\forall q\forall\alpha\forall\alpha',\ 1\leqslant q\leqslant p-1$ et $\alpha\in B'_q$ et $\alpha'\in B'_{q+1} \Rightarrow \alpha < \varphi(\alpha')$,

3° $\forall q\forall\alpha,\ 1\leqslant q\leqslant p$ et $\alpha\in B'_q$ et la suite $(b_l)_{1\leqslant l\leqslant m}$ étant relative à B'_q et à $\alpha\in B'_q \Rightarrow \sum_{1\leqslant l\leqslant m-1}|b_l - b_{l+1}| \leqslant \varepsilon$;

alors nous pouvons prendre l'entier $\varrho > 0$ assez grand pour que nous ayons

(49) $\forall\alpha\forall\alpha',\ \alpha\in\bigcup_{1\leqslant q\leqslant p} B'_q$ et $\alpha'\in[\omega^{\beta\varrho}+1, \omega^{\omega^\xi}[\Rightarrow \alpha < \varphi(\alpha')$

et d'après le lemme 6 nous pouvons prendre une partie fermée D de $[\omega^{\beta\varrho}+1, \omega^{\omega^\xi}[$ de même type d'ordre que $[1, \omega^{\omega^\xi}[$ avec $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in D}$ normale et avec

(50) $\forall\alpha\forall\alpha',\ \alpha$ et $\alpha'\in D \Rightarrow |\mu_\alpha(P(\chi_\alpha)) - \mu_{\alpha'}(P(\chi_{\alpha'}))| \leqslant \varepsilon/2(p+1)$.

En identifiant D à $[1, \omega^{\omega^\xi}[$ posons $D' = [1, \omega^{\beta(p+1)}]$ et, les types étant pris dans D', pour $0\leqslant q\leqslant p$ posons $D'_q = \{\alpha,\ \alpha\in D'$ et $\beta q \leqslant$ type de

$\alpha < \beta(q+1)\}$; D'_q s'identifie à $[1, \omega^\beta[$ et $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in D'_q}$ est normale, alors l'hypothèse de récurrence donne.

(51) Il existe un fermé E_p de D'_p de même type d'ordre que $[1, \omega^\beta[$ avec $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in E_p}$ normale et, la suite $(b_l)_{1\leqslant l\leqslant m}$ étant relative à E_p et à $\alpha \in E_p$, avec $\forall \alpha, \alpha \in E_p \Rightarrow \sum_{1\leqslant l\leqslant m-1} |b_l - b_{l+1}| \leqslant \varepsilon/2(p+1)$;

soit λ isolé dans E_p de précédent λ' (dans E_p); envisageons deux cas selon que type de λ (dans D') est $=$ ou $>$ à βp; dans le 1er cas $F = \{\alpha, \alpha \in D'_{p-1}$ et $\lambda' < \alpha < \lambda\}$ s'identifie à $[1, \omega^\beta[$ et $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in F}$ est normale; l'hypothèse de récurrence donne alors un fermé $E_{p-1,\lambda}$ de F vérifiant

(52) 1° $E_{p-1,\lambda}$ a le type d'ordre de $[1, \omega^\beta[$ et $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in E_{p-1,\lambda}}$ est normale,

2° $\forall \alpha, \alpha \in E_{p-1,\lambda} \Rightarrow \varphi(\alpha) \in]\lambda', \lambda[$,

3° au sens de D' nous avons $\lambda = \sup_{\alpha\in E_{p-1,\lambda}} \alpha$,

4° la suite $(b_l)_{1\leqslant l\leqslant m}$ étant relative à $E_{p-1,\lambda}$ et à $\alpha \in E_{p-1,\lambda}$ nous avons $\forall \alpha, \alpha \in E_{p-1,\lambda} \Rightarrow \sum_{1\leqslant l\leqslant m-1} |b_l - b_{l+1}| \leqslant \varepsilon/2(p+1)$,

dans le 2ème cas, pour $j = 1, 2, \ldots$, nous formons un point isolé λ_j de $D'_p \cap]\lambda', \lambda[$ de précédent λ'_j, tel que λ_j croît strictement vers λ (dans D') et tel que si $F_j = \{\alpha, \alpha \in D'_{p-1}$ et $\lambda'_j < \alpha < \lambda_j\}$ nous avons

$$\forall \alpha, \alpha \in F_1 \Rightarrow \lambda' < \varphi(\alpha) \quad \text{et} \quad \forall j \forall \alpha \forall \alpha', \alpha \in F_j \text{ et } \alpha' \in F_{j+1} \Rightarrow \alpha < \varphi(\alpha');$$

puisque F_j s'identifie à $[1, \omega^\beta[$ et que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in F_j}$ est normale, l'hypothèse de récurrence donne un ordinal η_j croissant strictement vers β et une partie fermée E_{p-1,λ_j} de F_j de même type d'ordre que $[1, \omega^{\eta_j}]$ avec $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in E_{p-1,\lambda_j}}$ normale de sorte qu'en posant $E_{p-1,\lambda} = \bigcup_{1\leqslant j} E_{p-1,\lambda_j}$ nous avons encore (52).

En posant $E_{p-1} = \bigcup_{\lambda \text{ isolé dans } E_p} E_{p-1,\lambda}$ alors $E_p \cup E_{p-1}$ est un fermé de $D'_p \cup D'_{p-1}$ de même type d'ordre que $[1, \omega^{\beta 2}[$ tel que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in E_p\cup E_{p-1}}$ est normale et tel que (51) est vérifié avec E_{p-1} et D'_{p-1} à la place de E_p et D'_p; après p telles étapes nous formons un fermé $\bigcup_{0\leqslant q\leqslant p} E_q$ de $\bigcup_{0\leqslant q\leqslant p} D'_q$ tel que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in \bigcup_{0\leqslant q\leqslant p} E_q}$ est normale et tel que pour $0 \leqslant q \leqslant p$, (51) est vérifié avec E_q et D'_q à la place de E_p et D'_p; ce résultat joint à (50) montre que $B'_{p+1} = \left(\bigcup_{0\leqslant q\leqslant p} E_q\right) \cup \{\omega^{\beta(p+1)}\}$ est un fermé de D' de même type d'ordre que $[1, \omega^{\beta(p+1)}]$ tel que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in B'_{p+1}}$ est normale et tel que si la suite $(b_l)_{1\leqslant l\leqslant m}$ est relative à B'_{p+1} et à $\alpha \in B'_{p+1}$ nous avons

$$\forall \alpha, \alpha \in B'_{p+1} \Rightarrow \sum_{1\leqslant l\leqslant m-1} |b_l - b_{l+1}| \leqslant (p+1)\varepsilon/2(p+1) + (p+1)\varepsilon/2(p+1) = \varepsilon;$$

finalement, en se rappelant (49), nous voyons que nous avons construit par récurrence sur p une suite $(B'_p)_{p=1,2,\ldots}$ de fermés de A''_ξ vérifiant (48) pour $p = 1, 2, \ldots$ ce qui montre que nous pouvons réaliser (45) avec $A'_\xi = \bigcup_{1\leqslant p} B'_p$ à la place de A'.

Si ξ est un ordinal limite nous reprenons la suite $(\eta_k)_{k=1,2,\ldots}$ de l'extension de la construction de φ et, d'après le lemme 6, nous pouvons former une sous suite $(\eta'_j)_{j=1,2,\ldots}$ de $(\eta_k)_{k=1,2,\ldots}$ telle qu'en identifiant A''_ξ à $[1, \omega^{\omega^\xi}[$ nous ayons

(53) pour $j = 1, 2, \ldots$ il existe un fermé B_j de $[\omega^{\eta'_j}+1, \omega^{\eta'_{j+1}}]$ s'identifiant à $[1, \omega^{\eta'_j}]$ tel que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in B_j}$ est normale et tel que

$$\forall \alpha \forall \alpha', \alpha \text{ et } \alpha' \in B_j \Rightarrow \left|\mu_\alpha(P(\chi_\alpha)) - \mu_{\alpha'}(P(\chi_{\alpha'}))\right| \leqslant \varepsilon/2;$$

pour $j = 1, 2, \ldots$ posons $\beta_j = \sup_{\alpha\in B_j} \alpha$ et $C_j = B_j - \{\beta_j\}$; C_j s'identifie à $[1, \omega^{\eta'_j}[$ et $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in C_j}$ est normale; d'après l'hypothèse de récurrence nous avons

(54) pour $j = 1, 2, \ldots$ il existe une partie normale C'_j de C_j avec $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in C'_j}$ normale et avec $\forall \alpha, \alpha \in C'_j$ et la suite $(b_l)_{1\leqslant l\leqslant m}$ étant relative à C'_j et à $\alpha \in C'_j$

$$\alpha \in C'_j \Rightarrow \sum_{1\leqslant l\leqslant m-1} |b_l - b_{l+1}| \leqslant \varepsilon/2;$$

de (53) et (54) nous déduisons que (45) est réalisé avec $A'_\xi = \bigcup_{1\leqslant j} (C'_j \cup \{\beta_j\})$ à la place de A' d'où le

LEMME 8. *Sous les hypothèses et notations du lemme 7 nous pouvons selectionner une partie normale A'_ξ de A_ξ telle que $[\varphi(\alpha), \alpha]_{\alpha\in A'_\xi}$ est une famille normale associée et telle que (46) soit réalisé avec A'_ξ à la place de A''_ξ; de plus en nous fixant les idées sur le cas où (47) est réalisé avec A'_ξ à la place de A''_ξ, si $(n_j)_{j=1,2,\ldots}$ est la mise sous la forme d'une suite strictement croissante d'entiers de $\{n, n \in \mathbf{N}$ et $\alpha_n \in A'_\xi\}$ en posant $\beta_j = \alpha_{n_j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ alors $j \to \chi_{\beta_j}$ est une numérotation normale de $\{\chi_\alpha, \alpha \in A'_\xi\}$; enfin si pour chaque $\alpha \in A'_\xi$ la suite $(\chi_{\gamma_l})_{1\leqslant l\leqslant m}$ est définie comme dans (23) avec A'_ξ à la place de A', alors avec la définition (40) nous avons (45) avec A'_ξ à la place de A'.*

Les lemmes 7 et 8 permettant, comme nous l'avons indiqué, de reproduire les estimations de 3, nous obtenons finalement le

THÉORÈME 2. *Pour chaque ordinal dénombrable $\xi \geqslant 1$ l'espace de Banach $C_0(\omega^{\omega^\xi})$ est primaire.*

Remarque. Ce résultat est aussi obtenu, indépendament, dans [5].

Bibliographie

[1] C. Bessaga and A. Pełczyński, *Spaces of continuous functions*, Studia Math. 19 (1960), pp. 53–62.
[2] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Contribution to the theory of classical Banach spaces*, J. Functional Analysis 8 (1971), pp. 225–249.
[3] A. Pełczyński, *On C(S) subspaces of separable Banach spaces*, Studia Math. 31 (1968), pp. 513–532.
[4] — *Linear extensions, linear averagings, and their applications to linear topological classification of spaces of continuous functions*, Dissertationes Math. (Rozprawy Matematyczne) 58 (1968).
[5] D. Alspach and Y. Benyamini, *Primariness of spaces of continuous functions on ordinals*, Israel J. Math. 27 (1977).

UER MARSEILLE LUMINY
MATHÉMATIQUE-INFORMATIQUE

Received October 13, 1975
New version April 21, 1976
Revised version May 25, 1976 (1070)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXII. (1978)

The Marcinkiewicz interpolation theorem extends to weighted spaces

by

HANS P. HEINIG* (Hamilton, Ontario)

Abstract. It is shown that under the hypotheses of the Marcinkiewicz interpolation theorem the strong type result extends to an estimate involving certain weight functions. These functions depend on the weak type parameters of the operator.

The Marcinkiewicz theorem concerning the interpolation of operations states that if T is a sublinear operator of weak type (p_i, q_i), $1 \leqslant p_i \leqslant q_i \leqslant \infty$ $i = 0, 1$; $p_0 < p_1$, $q_0 \neq q_1$, then

$$\|Tf\|_q \leqslant A\,\|f\|_p,$$

where $1/p = \theta/p_0 + (1-\theta)/p_1$, $1/q = \theta/q_0 + (1-\theta)/q_1$, $0 < \theta < 1$, and A is a constant independent of f.

The purpose of this note is to extend this result to certain weighted norms. The proof is seen to be a consequence of a generalization of Hardy's inequality (Lemma 1) and an inequality of Calderón (Lemma 2).

For notation and additional information we refer to [4], Chapter V. The constant A appearing throughout the paper will depend on the parameters only, but may be different at different appearances.

LEMMA 1. *If w is a non-negative, non-increasing function defined on $(0, \infty)$ and $g(x) \geqslant 0$, then for $0 < r < \infty$ and $p \geqslant 1$*

$$\Big\{\int_0^\infty w(x)x^{-r-1}\Big(\int_0^x g(y)\,dy\Big)^p dx\Big\}^{1/p} \leqslant p/r\Big\{\int_0^\infty w(x)x^{-r-1}[xg(x)]^p\,dx\Big\}^{1/p}.$$

Proof. The obvious changes of variables and Minkowski's integral inequality yields

$$\Big\{\int_0^\infty w(x)x^{-r-1}\Big(\int_0^x g(y)\,dy\Big)^p dx\Big\}^{1/p} = \Big\{\int_0^\infty w(x)x^{-r-1}\Big(\int_0^1 g(xy)\,dy\Big)^p x^p\,dx\Big\}^{1/p}$$

* Research partially supported by N.R.C. of Canada.