STUDIA MATHEMATICA, T. LXI. (1977)

Continuité et uniforme continuité du spectre dans les algèbres de Banach*

par

BERNARD AUPETIT (Québec, Canada)

Résumé. Dans cet article on généralise très fortement des théorèmes de J. D Newburgh sur la continuité du spectre dans les algèbres de Banach. En particulier, les résultats obtenus montrent que, pour les algèbres stellaires, les algèbres symétriques, les algèbres involutives à rayon spectral sous-multiplicatif sur l'ensemble des éléments normaux, le spectre est uniformément continu sur l'ensemble des éléments normaux.

0. Introduction et notations. Les premiers travaux sur la continuité spectrale des opérateurs remontent à Weyl, Courant, Rellich et à bien d'autres mathématiciens qui, avant 1940, s'intéressaient surtout aux opérateurs définis par des équations intégrales. C'est Newburgh le premier, dans [9], qui a étudié cette question dans le cadre général des algèbres de Banach; malheureusement, depuis son travail de 1951, personne, jusqu'en 1968, ne semble avoir voulu perfectionner le domaine. Vesentini, dans [11], devait démontrer la pluri-sous-harmonicité du rayon spectral, mais, curieusement, ce beau résultat analytique semble encore ignoré (par exemple il n'est même pas cité dans le nouvel ouvrage de référence de Bonsall et Duncan [5]) bien qu'il puisse avoir des conséquences très surprenantes comme on s'en convaincra en lisant ce travail et surtout [3] et [4].

Les deux résultats fondamentaux de Newburgh sont les suivants: d'abord il prouve que la fonction $x \to \mathrm{Sp}\, x$ est continue en tout point dont le spectre est totalement discontinu (par exemple fini ou dénombrable ou de capacité nulle), ensuite dans le cas d'une algèbre avec unité si on désigne, pour $a > 0$, par Φ l'ensemble des x tels que $\varrho\big((x-\lambda)^{-1}\big) \geqslant a\,\|(x-\lambda)^{-1}\|$, pour tout λ non dans le spectre de x, alors la fonction $x \to \mathrm{Sp}\, x$ est continue sur Φ. La démonstration du premier point était purement analytique, après introduction de ce que Newburgh appelait un *ensemble spectral*. La démonstration du deuxième était entièrement élémentaire.

* Travail subventionné par le Conseil National de Recherches du Canada (A 7668).

Dans ce qui suit, nous allons fortement généraliser ces deux résultats. D'abord, en utilisant la théorie des fonctions sous-harmoniques, nous démontrons dans la première partie, avec les notations et les définitions que nous expliquerons plus loin, le

THÉORÈME. *Si $\lambda \to f(\lambda)$ est une fonction analytique d'un domaine $D \subset \boldsymbol{C}$ contenant 0 dans une algèbre de Banach A et Γ un arc de Jordan contenu dans D d'extrémité 0 alors il existe une suite (λ_n) tendant vers 0, $\lambda_n \neq 0$, $\lambda_n \in \Gamma$ telle que $\sigma(f(0)) = \lim \sigma(f(\lambda_n))$.*

On peut en déduire quelques intéressants corollaires dont le premier théorème de Newburgh. Dans la deuxième partie, par un procédé relativement simple, on démontre le

THÉORÈME. *Si A est une algèbre de Banach avec unité munie d'une semi-norme sous-multiplicative non identiquement nulle $|\ |$ telle que $\varrho(x) \leqslant |x|$ quel que soit $x \in A$ et si, pour $a > 0$, on désigne par A_a l'ensemble des x tels que $\varrho((x-\lambda)^{-1}) \geqslant a|(x-\lambda)^{-1}|$ pour tout $\lambda \notin \operatorname{Sp} x$, alors pour $a \in A_a$ et $b \in A$ on a $\operatorname{Sp} b \subset \operatorname{Sp} a + \bar{B}\left(0, \frac{1}{a}|b-a|\right)$, donc en particulier si $a, b \in A_a$ on a $\Delta(\operatorname{Sp} a, \operatorname{Sp} b) \leqslant \frac{1}{a}|b-a|$.*

Comme corollaire immédiat on déduit que le spectre est uniformément continu sur Φ. Vers la fin, on applique cela aux algèbres involutives; le spectre est uniformément continu sur l'ensemble des éléments normaux d'une algèbre symétrique, d'une algèbre stellaire, d'une algèbre dont le rayon spectral est sous-multiplicatif sur l'ensemble des éléments normaux.

Pour les notations, A désigne une algèbre de Banach complexe pour la norme $\|\ \|$, $\operatorname{Sp} x$ est le spectre de x, $\sigma(x)$ est le *spectre plein* de x, c'est-à-dire $\operatorname{Sp} x \cup (\bigcup T_i)$ où les T_i sont les trous de $\operatorname{Sp} x$, $\varrho(x)$ est le rayon spectral de x, $\tilde{A}$ est l'algèbre obtenue par adjonction d'une unité, si A n'en a pas, munie de la norme $\|\lambda + x\| = |\lambda| + \|x\|$, et c'est A si celle-ci a une unité, $B(0, r)$ est l'ensemble des λ complexes tels que $|\lambda| < r$, $\bar{B}(0, r)$ est l'ensemble des λ tels que $|\lambda| \leqslant r$, pour K compact dans $\boldsymbol{C}$, $K + B(0, r)$ est l'ensemble des z pour lesquels il existe $u \in K$ tel que $|z-u| < r$, ∂K est la frontière de K.

Introduisons quelques définitions qui nous serons utiles pour définir la continuité et l'uniforme continuité du spectre.

Si $K(t)$ est une famille de compacts de $\boldsymbol{C}$, dépendant d'un paramètre t appartenant à un espace métrique, on pose:

$$\overline{\lim_{t\to t_0}}\, K(t) = \{z \mid \text{pour tout voisinage } V \text{ de } z \text{ et pour tout } r > 0 \text{ il existe } t \text{ tel que } d(t, t_0) < r \text{ et } K(t) \cap V \neq \emptyset\},$$

$$\underline{\lim_{t\to t_0}}\, K(t) = \{z \mid \text{pour tout voisinage } V \text{ de } z \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } d(t, t_0) < r \text{ implique } K(t) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Évidemment, on a $\underline{\lim}_{t\to t_0} K(t) \subset \overline{\lim}_{t\to t_0} K(t)$. Lorsqu'ils sont égaux on dit que la famille $K(t)$ a une limite quand $t \to t_0$ et on la note $\lim_{t\to t_0} K(t)$.

Dans l'algèbre A la fonction $x \to \operatorname{Sp} x$ sera dite continue en a si

$$\operatorname{Sp} a = \lim_{x\to a} \operatorname{Sp} x.$$

Cette définition, utilisée par Newburgh, est malcommode et surtout incapable d'extension à l'uniforme continuité, c'est pourquoi sur les compacts de $\boldsymbol{C}$ on va introduire la *distance de Hausdorff* définie par

$$\Delta(K_1, K_2) = \operatorname{Max}\left(\operatorname*{Sup}_{z\in K_2} d(z, K_1), \operatorname*{Sup}_{z\in K_1} d(z, K_2)\right) \quad \text{où} \quad d(z, K) = \operatorname*{Inf}_{u\in K} |z-u|.$$

Il n'est pas difficile de voir que $K = \lim_{t\to t_0} K(t)$ équivaut à dire que $\lim_{t\to t_0} \Delta(K, K(t)) = 0$. C'est pourquoi nous pouvons poser la

DÉFINITION. La fonction $x \to \operatorname{Sp} x$ est dite *continue* (respectivement *uniformément continue*) sur un ensemble si elle continue (respectivement uniformément continue) pour la distance Δ sur cet ensemble.

1. Théorèmes de continuité spectrale. Soit D un domaine de $\boldsymbol{C}$, φ: $D \to \boldsymbol{R} \cup \{-\infty\}$ est dite *sous-harmonique* si:

(a) φ est semi-continue supérieurement sur D, ce qui équivaut à dire que

$$\overline{\lim_{\substack{\lambda\to\lambda_0 \\ \lambda\neq\lambda_0 \\ \lambda\in D}}}\, \varphi(\lambda) \leqslant \varphi(\lambda_0),$$

quel que soit $\lambda_0 \in D$.

(b) φ possède la propriété d'inégalité de moyenne, c'est-à-dire que:

$$\varphi(\lambda_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\lambda_0 + re^{i\theta})\, d\theta,$$

pour tout $\lambda_0 \in D$ et $r > 0$ tel que $\bar{B}(\lambda_0, r) \subset D$.

Rappelons quelques propriétés classiques de ces fonctions:

1° Toute somme finie de fonctions sous-harmoniques est sous-harmonique.

2° Si f est convexe et croissante et φ sous-harmonique alors $f \circ \varphi$ est sous-harmonique.

3° Si $\varphi_1 \geqslant \varphi_2 \geqslant \ldots \geqslant \varphi_n \geqslant \ldots$ est une suite décroissante de fonctions sous-harmoniques alors $\varphi(\lambda) = \lim \varphi_n(\lambda)$ est sous-harmonique.

4° Si φ est sous-harmonique, $\varphi \geqslant 0$, telle que $|e^{a\lambda}|\varphi(\lambda)$ est sous-harmonique pour tout $a \in \boldsymbol{C}$ alors $\log\varphi$ est sous-harmonique.

5° Si φ est sous-harmonique sur D alors $\varphi(\lambda_0) = \overline{\lim}_{\substack{\lambda\to\lambda_0 \\ \lambda\neq\lambda_0}} \varphi(\lambda)$ pour $\lambda_0 \in D$.

On pourra trouver les démonstrations de ces résultats dans Vladimirov [13].

Commençons par donner un lemme de semi-continuité supérieure qui est bien connu.

LEMME 1. *Si* $a \in A$ *et si* U *est un ouvert contenant* $\operatorname{Sp} a$ *alors il existe* $r > 0$ *tel que* $\|b-a\| < r$ *implique* $\operatorname{Sp} b \subset U$.

Démonstration. Voir Rickart [10], théorème 1.6.16, pp. 35–36 ou Bonsall and Duncan [5], proposition 17, p. 26.

Enonçons maintenant le résultat fondamental qui est à la base de toute cette partie.

LEMME 2 (Vesentini [11] et [12]). *Si* $\lambda \to f(\lambda)$ *est une fonction analytique d'un domaine* D *de* C *dans* A *alors* $\lambda \to \varrho(f(\lambda))$ *et* $\lambda \to \log \varrho(f(\lambda))$ *sont sous-harmoniques.*

Démonstration. (a) Montrons d'abord que $\lambda \to \log\|f(\lambda)\|$ est sous-harmonique. Il est clair qu'elle est continue. D'après la formule de Cauchy pour les fonctions analytiques on a

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda_0 + re^{i\theta})\,d\theta$$

donc

$$\|f(\lambda_0)\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f(\lambda_0 + re^{i\theta})\|\,d\theta.$$

D'après la propriété 4° il suffit de prouver que $\lambda \to |e^{a\lambda}|\,\|f(\lambda)\|$ est sous-harmonique, mais c'est évident car $|e^{a\lambda}|\,\|f(\lambda)\| = \|e^{a\lambda}f(\lambda)\|$ et $\lambda \to e^{a\lambda}f(\lambda)$ est analytique.

(b) Pour $x \in A$ on sait que la suite $\|x^{2^n}\|^{1/2^n}$ est décroissante et tend vers $\varrho(x)$, donc d'après la propriété 3°, $\lambda \to \log \varrho(f(\lambda))$ est sous-harmonique, puisque

$$\log \varrho(f(\lambda)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\log\|f(\lambda)^{2^n}\|,$$

où $\lambda \to f(\lambda)^{2^n}$ est analytique.

(c) La fonction $t \to e^t$ est convexe et croissante, donc, d'après la propriété 2°, $\lambda \to \varrho(f(\lambda))$ est sous-harmonique.

COROLLAIRE 1 (Kleinecke–Shirocov). *Si* $a, b \in A$ *vérifient* $[a,[a,b]] = 0$, *où* $[x,y] = xy - yx$, *alors* $\varrho([a,b]) = 0$.

Démonstration. Plaçons-nous dans $\tilde{A}$, alors

$$e^{\lambda a}be^{-\lambda a} = b + \lambda[a,b] + \frac{\lambda^2}{2!}[a,[a,b]] + \frac{\lambda^3}{3!}[a,[a,[a,b]]] + \dots$$
$$= b + \lambda[a,b].$$

Donc

$$\varrho(\mu b + [a,b]) = |\mu|\,\varrho(e^{a/\mu}be^{-a/\mu}) = |\mu|\,\varrho(b)$$

pour $\mu \neq 0$. D'après la propriété 5° il résulte que

$$\varrho([a,b]) = \overline{\lim_{\substack{\mu\to 0\\ \mu\neq 0}}}\,\varrho(\mu b + [a,b]) = 0.$$

COROLLAIRE 2. *Si* $\lambda \to f(\lambda)$ *est une fonction analytique de* D *dans* A *alors ou bien* $\{\lambda \mid \varrho(f(\lambda)) = 0\}$ *est de capacité extérieure nulle ou bien* $\varrho(f(\lambda)) = 0$ *pour tout* λ.

Démonstration. D'après le théorème de Cartan l'ensemble $\{\lambda \mid \log\varrho(f(\lambda)) = -\infty\}$ est polaire, donc de capacité extérieure nulle, ou bien $\log\varrho(f(\lambda)) \equiv -\infty$.

Comme conséquence immédiate de ce résultat il résulte que l'ensemble des éléments quasi-nilpotents ne peut contenir un ensemble absorbant en un point, donc en particulier n'a pas de point intérieur, sauf si A est radicale. En effet si $\{x \mid \varrho(x) = 0\}$ contient l'ensemble U absorbant alors quel que soit $b \in A$ il existe $r > 0$ tel que $a + \lambda(b-a) \in U$ pour $|\lambda| \leqslant r$, mais alors la capacité extérieure de $\{\lambda \mid \log\varrho(a+\lambda(b-a)) = -\infty\}$ est supérieure à la capacité de $\bar{B}(0,r)$, qui est strictement positive, donc $\varrho(a+\lambda(b-a)) \equiv 0$, donc pour $\lambda = 1$, $\varrho(b) = 0$.

En fait, dans [4], nous avons obtenu des résultats bien plus intéressants; on pourra y trouver tous les renseignements nécessaires sur la capacité appliquée au spectre des éléments d'une algèbre de Banach.

LEMME 3 (Oka-Rothstein). *Si* φ *est une fonction sous-harmonique sur un domaine* D *contenant* 0 *et si* Γ *est un arc de Jordan d'extrémité* 0 *contenu dans* D *alors*:

$$\varphi(0) = \overline{\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\in\Gamma\\ \lambda\neq 0}}}\,\varphi(\lambda).$$

Démonstration. Elle est difficile, voir Vladimirov [13], pp. 71–72. Disons qu'en gros elle utilise le théorème de Schönflies sur l'accessibilité de la frontière d'un domaine limité par une courbe de Jordan, le théorème de transformation conforme de Riemann, le théorème de Carathéodory et le théorème de Koebe ([13], p. 47).

COROLLAIRE 1. *Si* $a[a,b] = 0$ *ou* $[a,b]a = 0$ *et si* 0 *est sur la frontière extérieure du spectre de* a *alors* $\varrho([a,b]) = 0$.

Démonstration. Supposons que $[a,b]a = 0$, l'autre cas se faisant de la même façon. Pour $|\lambda| > \|a\|$ on a

$$(a-\lambda)b(a-\lambda)^{-1} = \Big(1-\frac{a}{\lambda}\Big)b\Big(1+\frac{a}{\lambda}+\frac{a^2}{\lambda^2}+\dots\Big) = b - \frac{1}{\lambda}[a,b]$$

qui par prolongement analytique est aussi vrai sur la composante connexe non bornée du complémentaire du spectre de a. Aussi $\varrho(b) = \varrho\left(b-\frac{1}{\lambda}[a,b]\right)$ d'où $|\lambda|\varrho(b) = \varrho(\lambda b-[a,b])$ pour λ dans cette composante. Alors en faisant tendre λ vers 0 sur un arc de Jordan non contenu dans le spectre et d'extrémité 0 alors d'après le lemme 3 on a $\varrho([a,b]) = 0$.

Ce corollaire s'applique en particulier si a a son spectre dénombrable ou de capacité nulle, auquel cas d'ailleurs ou bien $0\notin \operatorname{Sp} a$ et $[a,b]=0$, ou bien 0 est sur la frontière extérieure de $\operatorname{Sp} a$ donc $\varrho([a,b]) = 0$.

Dans le cas commutatif on sait que:

$$\big|\varrho(a)-|\lambda|\varrho(b)\big| \leqslant \varrho(a+\lambda b) \leqslant \varrho(a)+|\lambda|\varrho(b)$$

donc que $\varrho(a) = \varrho(a+\lambda b)$ si b est quasi-nilpotent. Ce résultat est faux si l'algèbre n'est pas commutative, mais on peut donner une caractérisation voisine:

Corollaire 2. *Pour qu'un élément b de A soit quasi-nilpotent il faut et il suffit que pour tout élément a de A on ait*

$$\lim_{\substack{\lambda\to+\infty\\ \lambda\in\mathbf{R}}} \frac{1}{|\lambda|}\varrho(a+\lambda b) = 0.$$

Démonstration. Si on prend pour Γ le demi-arc réel positif on obtient d'après le lemme 3

$$\varrho(b) = \overline{\lim_{\substack{\mu\to 0\\ \mu\in\Gamma\\ \mu\neq 0}}}\,\varrho(\mu a+b).$$

Lemme 4. *Si $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k$ sont sous-harmoniques sur un domaine D contenant 0 et si Γ est un arc de Jordan d'extrémité 0 contenu dans D alors il existe une suite (λ_n) tendant vers 0, où $\lambda_n\in\Gamma$, $\lambda_n\neq 0$, telle que $\varphi_i(0) = \lim_{n\to\infty}\varphi_i(\lambda_n)$ quel que soit $i=1,2,\ldots,k$.*

Démonstration. Soit $\psi(\lambda) = \sum_{i=1}^{k}\varphi_i(\lambda)$, d'après la propriété 1°, ψ est sous-harmonique, donc, d'après le théorème d'Oka-Rothstein, on a

$$\psi(0) = \overline{\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\in\Gamma\\ \lambda\neq 0}}}\,\psi(\lambda).$$

Il existe donc une suite (μ_n) tendant vers 0 telle que $\mu_n\in\Gamma$, $\mu_n\neq 0$ et $\lim_{n\to\infty}\psi(\mu_n) = \psi(0)$. Montrons par récurrence que (μ_n) contient une sous-suite (μ_{n_l}) telle que $\varphi_i(\mu_{n_l})$ tend vers $\varphi_i(0)$ quand l tend vers l'infini, pour $i=1,\ldots,k$. Si $k=1$ c'est évident; supposons la propriété vraie pour une somme de $k-1$ fonctions. Si $\overline{\lim}_{n\to\infty}\varphi_1(\mu_n) = \varphi_1(0)$ alors (μ_n) admet une

sous-suite qu'on peut noter de la même façon telle que $\lim_{n\to\infty}\varphi_1(\mu_n) = \varphi_1(0)$ mais alors $\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(\mu_n)$ tend vers $\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(0)$ donc, d'après la propriété de récurrence, il existe une sous-suite (μ_{n_l}) telle que

$$\lim_{l\to\infty}\varphi_1(\mu_{n_l}) = \varphi_1(0) \quad\text{et}\quad \lim_{l\to\infty}\varphi_i(\mu_{n_l}) = \varphi_i(0)$$

pour $i=2,\ldots,k$ et c'est terminé. Si $\overline{\lim}\,\varphi_1(\mu_n) = L<\varphi_1(0)$ il existe (μ_{n_l}) une sous-suite de (μ_n) telle que $\lim\varphi_1(\mu_{n_l}) = L$ mais alors $\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(\mu_{n_l})$ tend vers $\psi(0)-L = \varphi_1(0)-L+\varphi_2(0)+\ldots+\varphi_k(0) > \varphi_2(0)+\ldots+\varphi_k(0)$ ce qui est absurde d'après la définition de la semi-continuité supérieure puisque

$$\overline{\lim_{\substack{\mu\to 0\\ \mu\neq 0}}}\sum_{i=2}^{k}\varphi_i(\mu) \leqslant \sum_{i=2}^{k}\varphi_i(0).$$

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat fondamental.

Théorème 1. *Si $\lambda\to f(\lambda)$ est une fonction analytique du domaine D contenant 0 dans A et si Γ est un arc de Jordan d'extrémité 0 contenu dans D, alors il existe une suite (λ_n) tendant vers 0, avec $\lambda_n\in\Gamma$, $\lambda_n\neq 0$, telle que $\Delta\big(\sigma(f(0)),\sigma(f(\lambda_n))\big)$ tend vers 0, ce qui implique en particulier que*

$$\sigma\big(f(0)\big) = \overline{\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \lambda\in\Gamma\\ \lambda\neq 0}}}\,\sigma\big(f(\lambda)\big).$$

Démonstration. D'après le lemme 1, si $\varepsilon>0$ est donné il existe $\alpha>0$ tel que $|\lambda|<\alpha$ implique $\operatorname{Sp} f(\lambda)\subset \operatorname{Sp} f(0)+B(0,\varepsilon)$, donc en particulier $\sigma\big(f(\lambda)\big)\subset\sigma\big(f(0)\big)+B(0,\varepsilon)$. Soit un recouvrement fini de $\partial\operatorname{Sp} f(0)$ par des boules centrées en $\xi_1,\ldots,\xi_k$ de rayon $\varepsilon/2$ et soient $\eta_1,\ldots,\eta_k$ n'appartenant pas à $\operatorname{Sp} f(0)$ tels que $|\xi_i-\eta_i|<\varepsilon/8$ pour $i=1,\ldots,k$. Toujours d'après le lemme 1, il existe $\beta>0$ tel que $|\lambda|\leqslant\beta$ implique $f(\lambda)-\eta_i$ inversible pour $i=1,\ldots,k$. Posons $\varphi_i(\lambda) = \varrho\big((f(\lambda)-\eta_i)^{-1}\big)$ pour $|\lambda|\leqslant\beta$. D'après le lemme 4, il existe une suite (μ_n) tendant vers 0 telle que $\mu_n\in\Gamma\cap\bar{B}(0,\beta)$ et $\varphi_i(0) = \lim_{n\to\infty}\varphi_i(\mu_n)$ pour $i=1,\ldots,k$. Donc en particulier il existe $\mu(\varepsilon)\in\Gamma$ tel que $|\mu(\varepsilon)|<\operatorname{Min}(\alpha,\beta)$ et $\varphi_i\big(\mu(\varepsilon)\big)\geqslant\varphi_i(0)/2>0$ pour $i=1,\ldots,k$, car

$$\varphi_i(0) = \varrho\big((f(0)-\eta_i)^{-1}\big) = d\big(\eta_i,\operatorname{Sp} f(0)\big)^{-1}>0.$$

Dans ce cas

$$\frac{1}{\varrho\Big(\big(f(\mu(\varepsilon))-\eta_i\big)^{-1}\Big)} \leqslant \frac{2}{\varrho\big((f(0)-\eta_i)^{-1}\big)} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Aussi toutes les boules $\bar{B}(\eta_i, \varepsilon/4)$ contiennent un point de $\partial \operatorname{Sp} f(\mu(\varepsilon))$, donc il en est de même des boules $B(\xi_i, \varepsilon/2)$. Si $\xi \in \partial \operatorname{Sp} f(0)$, alors il existe ξ_i tel que $|\xi - \xi_i| < \varepsilon/2$ et il existe $\zeta_\varepsilon \in \partial \operatorname{Sp} f(\mu(\varepsilon))$ tel que $|\xi_i - \zeta_\varepsilon| < \varepsilon/2$ donc $|\xi - \zeta_\varepsilon| < \varepsilon$, autrement dit

$$\partial \operatorname{Sp} f(0) \subset \partial \operatorname{Sp} f(\mu(\varepsilon)) + B(0, \varepsilon)$$

donc

$$\sigma(f(0)) \subset \sigma(f(\mu(\varepsilon))) + B(0, \varepsilon)$$

qui avec

$$\sigma(f(\mu(\varepsilon))) \subset \sigma(f(0)) + B(0, \varepsilon)$$

implique que

$$\Delta[\sigma(f(0)), \sigma(f(\mu(\varepsilon)))] < \varepsilon,$$

il suffit alors de prendre la suite $\lambda_n = \mu(1/n)$.

Remarque 1. On a en fait prouvé beaucoup plus. Si $\sigma_0(f(\lambda))$ désigne le spectre de $f(\lambda)$ dans lequel on a «bouché» les trous qui ne rencontrent pas un trou de $\operatorname{Sp} f(0)$ alors il existe (λ_n) tendant vers 0, $\lambda_n \in \Gamma$, $\lambda_n \neq 0$, telle que $\Delta(\operatorname{Sp}(f(0)), \sigma_0(f(\lambda_n))) \to 0$.

Remarque 2. Il est faux en général que $\operatorname{Sp} f(0) = \overline{\lim\limits_{\substack{\lambda \to 0 \\ \lambda \neq 0 \\ \lambda \in \Gamma}}} \operatorname{Sp} f(\lambda)$ comme on peut s'en convaincre avec l'exemple qui suit.

Soit l'espace de Hilbert $H = l^2(\mathbf{Z})$, muni de la base canonique orthonormale $(\xi_n)_{n \in \mathbf{Z}}$; on définit les deux opérateurs suivants:

$$a\xi_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = -1, \\ \xi_{n+1} & \text{si } n \neq -1, \end{cases} \qquad b\,\xi_n = \begin{cases} \xi_0 & \text{si } n = -1, \\ 0 & \text{si } n \neq -1. \end{cases}$$

Pour $\lambda \in \mathbf{C}$, on a:

$$(a + \lambda b)\,\xi_n = \begin{cases} \lambda \xi_0 & \text{si } n = -1, \\ \xi_{n+1} & \text{si } n \neq -1, \end{cases}$$

c'est donc un opérateur de décalage pondéré. Si $\lambda \neq 0$, $a + \lambda b$ est inversible et d'après le problème 85 du livre de Halmos [6], son spectre est $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$, par contre $\operatorname{Sp} a = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. Il suffit de prendre pour Γ la demi-droite réelle positive.

Remarque 3. Si $\operatorname{Sp} f(0)$ est sans point intérieur, en reprenant la remarque 1, on voit sans difficulté qu'il existe une suite (λ_n) tendant vers 0, $\lambda_n \in \Gamma$ $\lambda_n \neq 0$ telle que $\Delta(\operatorname{Sp} f(0), \operatorname{Sp} f(\lambda_n)) \to 0$. Car sinon il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu \in \operatorname{Sp} f(0)$ tel que $d(\mu, \operatorname{Sp} f(\lambda_n)) > \varepsilon$, quel que soit n. Alors nécessairement μ appartient à un trou de $\operatorname{Sp} f(\lambda_n)$ qui ne rencontre pas les trous de $\operatorname{Sp} f(0)$, mais ce trou contient $B(\mu, \varepsilon)$ qui comme μ est frontière rencontre des trous de $\operatorname{Sp} f(0)$, d'où absurdité. Cette remarque s'applique en particulier si $\operatorname{Sp} f(0)$ est contenu dans une courbe, ainsi par exemple si $\operatorname{Sp} f(0)$ est réel.

Corollaire 1. *Supposons que $\operatorname{Sp} f(\lambda)$ est sans trou pour $\lambda \in \Gamma$ tel que $0 < |\lambda| \leqslant r$ alors $\operatorname{Sp} f(0)$ est sans trou et il existe (λ_n), $\lambda_n \neq 0$, $\lambda_n \in \Gamma$ telle que $\Delta(\operatorname{Sp} f(0), \operatorname{Sp} f(\lambda_n)) \to 0$.*

Démonstration. Si $\operatorname{Sp} f(0)$ avait un trou, d'après le lemme 1, pour λ assez petit $\operatorname{Sp} f(\lambda)$ aurait un trou. Donc

$$\sigma(f(0)) = \operatorname{Sp} f(0) = \lim \sigma(f(\lambda_n)) = \lim \operatorname{Sp}(f(\lambda_n))$$

pour une certaine (λ_n).

Corollaire 2. *Supposons que $\operatorname{Sp} f(\lambda)$ a au plus n points pour $\lambda \in \Gamma$ tel que $0 < |\lambda| \leqslant r$ alors $\operatorname{Sp} f(0)$ a au plus n points.*

Démonstration. Supposons que $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+1} \in \operatorname{Sp} f(0)$ alors en prenant des disques disjoints $D_1, \ldots, D_{n+1}$ centrés en ces points ils rencontrent tous $\operatorname{Sp} f(\lambda)$ pour λ assez petit d'après le corollaire précédent, ce qui est absurde.

Corollaire 3. *Si $\operatorname{Sp} f(\lambda) \subset \mathbf{R}$ pour $\lambda \in \Gamma$ tel que $0 < |\lambda| \leqslant r$ alors $\operatorname{Sp} f(0) \subset \mathbf{R}$.*

Démonstration. D'après le corollaire 1, $\operatorname{Sp} f(0) = \lim \operatorname{Sp} f(\lambda_n) \subset \mathbf{R}$ pour une certaine suite (λ_n).

Corollaire 4. *Soit $a \in A$, si C est un ouvert-fermé non vide du spectre de a et U un ouvert tel que $C \subset U$ alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\|a - b\| < \alpha$ implique $\operatorname{Sp} b \cap U \neq \emptyset$.*

Démonstration. C et $\operatorname{Sp} a \setminus C$ sont donc deux fermés disjoints de $\operatorname{Sp} a$, donc de C; comme C est normal il existe deux ouverts disjoints U_1 et U_2 tels que $C \subset U_1$ et $\operatorname{Sp} a \setminus C \subset U_2$. Prenons $U' = U_1 \cap U$, alors U' et U_2 sont disjoints et $C \subset U'$. D'après le lemme 1 il existe α tel que $\|b - a\| \leqslant \alpha$ implique $\operatorname{Sp} b \subset U' \cup U_2$. Soit $u \in A$ quelconque tel que $\|u\| = 1$ et raisonnons sur la demi-droite réelle $\{a + \lambda u \mid \lambda \geqslant 0\}$. Si on n'a pas $\operatorname{Sp}(a + \lambda u) \cap U' \neq \emptyset$ pour $0 \leqslant \lambda < \alpha$ il existe λ_0 tel que $0 < \lambda_0 < \alpha$ et $\operatorname{Sp}(a + \lambda_0 u) \subset U_2$. Considérons alors $E = \{\lambda \mid 0 < \lambda < \alpha$ tels que $\operatorname{Sp}(a + \lambda u) \subset U_2\}$ qui est supposé non vide d'après ce qui précède. D'après le lemme 1, c'est un ouvert de la demi-droite. Soit r_1 la borne supérieure des β tels que $[\lambda_0, \beta] \subset E$ et r_2 la borne inférieure des γ tels que $[\gamma, \lambda_0] \subset E$. Il est clair que $r_1 > \lambda_0$ et $r_2 < \lambda_0$; comme E est ouvert $\operatorname{Sp}(a + r_1 u) \not\subset U_2$ donc il existe $\xi \in \partial \operatorname{Sp}(a + r_1 u) \cap U'$ si $r_1 < \alpha$. Si on prend $\Gamma = [\lambda_0, r_1[$ et si on applique le théorème on déduit que $\xi \in \overline{U}_2$ ce qui est absurde, ainsi $r_1 = \alpha$. Par un raisonnement identique on conclut que $r_2 = 0$ d'où $E =]0, \alpha[$, mais en appliquant à nouveau le théorème on aurait $\operatorname{Sp} a \subset \overline{U}_2$ ce qui est contradictoire. On a donc prouvé que $\operatorname{Sp}(a + \lambda u) \cap U \neq \emptyset$ pour $|\lambda| < \alpha$. Si on prend $b \in A$ tel que $\|b - a\| < \alpha$ alors $b = a + \|b - a\| \dfrac{b - a}{\|b - a\|}$ donc $\operatorname{Sp} b \cap U \neq \emptyset$.

COROLLAIRE 5 (Newburgh [9]). *Si* $\operatorname{Sp} a$ *est totalement discontinu alors* $x \to \operatorname{Sp} x$ *est continue en* a.

Démonstration. Soit $\xi \in \operatorname{Sp} a$ et V un voisinage ouvert de ξ, alors il existe un ouvert-fermé U de $\operatorname{Sp} a$ tel que $\xi \in U \subset V$. D'après le corollaire 4 il existe $a > 0$ tel que $\|a-b\| < a$ implique $\operatorname{Sp} b \cap V \neq \emptyset$ ainsi $\operatorname{Sp} a \subset \underline{\lim}_{b\to a} \operatorname{Sp} b$ d'où $\operatorname{Sp} a = \lim_{b\to a} \operatorname{Sp} b$.

Ce corollaire s'applique en particulier si a est quasi-algébrique au sens de Halmos [7], c'est-à-dire s'il existe une suite (p_n) de polynômes à plus haut coefficient 1, de degré $d(n)$, tels que

$$\lim \|p_n(a)\|^{1/d(n)} = 0.$$

Halmos a montré que cela équivalait à dire que le spectre de a est de capacité nulle; donc le corollaire s'applique si $\operatorname{Sp} a$ est démontrable, l'ensemble de Cantor, etc.

Remarque 4. Si le spectre est continu sur une partie de A alors $x \to \operatorname{Sp}\left((x-\lambda)^{-1}\right)$ est continu pour $\lambda \notin \operatorname{Sp} x$, donc aussi les $x \to \varrho\left((x-\lambda)^{-1}\right)$. On peut se demander si réciproquement la continuité des fonctions $x \to \to \varrho\left((x-\lambda)^{-1}\right)$ rend $x \to \operatorname{Sp} x$ continue. C'est vrai lorsque les éléments de cette partie ont leur spectre sans point intérieur comme on peut s'en convaincre en reprenant la démonstration du théorème fondamental. Comme conséquence de cette remarque il résulte que si A est symétrique, le spectre est continu sur l'ensemble des éléments hermitiens. En fait nous allons fortement améliorer ce résultat dans la 2[e] partie. Pour terminer, il serait intéressant de savoir si pour une algèbre la continuité du rayon spectral implique celle du spectre.

2. Théorèmes d'uniforme continuité spectrale. Dans [9] Newburgh a démontré que le spectre est continu sur l'ensemble des $x \in A$ tels que $\varrho\left((x-\lambda)^{-1}\right) \geqslant a \|(x-\lambda)^{-1}\|$ quel que soit $\lambda \notin \operatorname{Sp} x$, pour $a > 0$ donné, ce qu'il applique pour prouver la continuité du spectre sur l'ensemble des éléments normaux d'une algèbre stellaire. D'autre part si $A = M_n(C)$ on sait que le spectre est uniformément continu sur l'ensemble des éléments normaux, plus exactement que $\operatorname{Sp} b \subset \operatorname{Sp} a + B(0, \|b-a\|)$ si a est normal et b quelconque. Ce sont ces deux résultats qui nous ont amené à prouver les

THÉORÈME 2. *Soit* A *une algèbre de Banach avec unité munie d'une semi-norme sous-multiplicative* $|\ |$ *non identiquement nulle, alors, si pour* $a \in A$ *et* $a > 0$ *on a* $\varrho\left((a-\lambda)^{-1}\right) \geqslant a\,|(a-\lambda)^{-1}|$ *pour tout* $\lambda \notin \operatorname{Sp} a$ *et si* $\operatorname{Sup} \varrho\left((b-\mu)^{-1}\right)/|(b-\mu)^{-1}| < \infty$ *lorsque* $\mu \notin \operatorname{Sp} b$, *on a* $\sigma(b) \subset \sigma(a) + \bar{B}\left(0, \frac{1}{a}|b-a|\right)$.

Démonstration. Si $\sigma(b) \not\subset \sigma(a)$ il existe $\xi \in \partial \operatorname{Sp} b$ tel que $\xi \notin \sigma(a)$. Soit (ξ_n) une suite tendant vers ξ avec $\xi_n \notin \operatorname{Sp} b$. Posons $x_n = (b-\xi_n)^{-1}/|(b-\xi_n)^{-1}|$ ce qui a un sens car $|(b-\xi_n)^{-1}| = 0$ implique $|1| = 0$, donc $|x| = 0$, quel que soit $x \in A$.

Soit $k > 0$ tel que $\varrho\left((b-\mu)^{-1}\right) \leqslant k\,|(b-\mu)^{-1}|$ pour tout $\mu \notin \operatorname{Sp} b$ alors

$$\frac{1}{|\xi-\xi_n|} \leqslant \frac{1}{d(\xi_n, \operatorname{Sp} b)} = \varrho\left((b-\xi_n)^{-1}\right) \leqslant k\,|(b-\xi_n)^{-1}|$$

d'où $|(b-\xi_n)^{-1}| \to \infty$ quand $n \to \infty$.

En écrivant $(b-\xi)x_n = (b-\xi_n)x_n - (\xi-\xi_n)x_n$, on déduit que

$$|(b-\xi)x_n| \leqslant \frac{1}{|(b-\xi_n)^{-1}|} + |\xi-\xi_n|$$

donc $|(b-\xi)x_n| \to 0$ quand $n \to \infty$.

Posons $y_n = ax_n - \xi x_n = (a-b)x_n + (b-\xi)x_n$, alors

$$x_n = (a-\xi)^{-1} y_n$$

donc,

$$1 = |x_n| \leqslant |(a-\xi)^{-1}|\,|y_n|$$

soit,

$$a d(\xi, \operatorname{Sp} a) = \frac{a}{\varrho\left((a-\xi)^{-1}\right)} \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} |y_n| \leqslant |a-b|$$

d'où,

$$\sigma(b) \subset \sigma(a) + \bar{B}\left(0, \frac{1}{a}|a-b|\right).$$

COROLLAIRE. *Si pour* $b \in A$ *on a* $\operatorname{Sup} \dfrac{\varrho\left((b-\mu)^{-1}\right)}{|(b-\mu)^{-1}|} < \infty$ *alors* $\varrho(b) \leqslant \dfrac{1}{a}|b|$.

Démonstration. En faisant $a = 0$, on obtient $\sigma(b) \subset \bar{B}\left(0, \frac{1}{a}|b|\right)$, donc

$$\varrho(b) \leqslant \frac{1}{a}|b|.$$

De cela il résulte que, si $\operatorname{Sup} \dfrac{\varrho\left((b-\mu)^{-1}\right)}{|(b-\mu)^{-1}|} < \infty$ quel que soit $b \in A$, alors $\varrho(b) \leqslant |b|$. En effet d'après ce qui précède on a $\varrho(b)^n = \varrho(b^n) \leqslant \frac{1}{a}|b^n| \leqslant \frac{1}{a}|b|^n$ quel que soit n, d'où le résultat.

Cela nous amène à démontrer le:

Théorème 3. *Soit A une algèbre de Banach avec unité munie d'une semi-norme sous-multiplicative $|\ |$ telle que $\varrho(x) \leqslant |x|$ quel que soit $x \in A$, alors si $a \in A_\alpha = \{x \mid \varrho((x-\lambda)^{-1}) \geqslant \alpha |(x-\lambda)^{-1}|$ pour tout $\lambda \notin \operatorname{Sp} x\}$ et $b \in A$ on a:*

$$\operatorname{Sp} b \subset \operatorname{Sp} a + \bar{B}\left(0, \frac{1}{\alpha}|b-a|\right).$$

En particulier si $a, b \in A_\alpha$ alors $\Delta(\operatorname{Sp} a, \operatorname{Sp} b) \leqslant \frac{1}{\alpha}|a-b|$.

Démonstration. Supposons que $\operatorname{Sp} b \not\subset \operatorname{Sp} a + \bar{B}\left(0, \frac{1}{\alpha}|b-a|\right)$, alors il existe $\lambda \in \operatorname{Sp} b$ tel que $d(\lambda, \operatorname{Sp} a) > \frac{1}{\alpha}|b-a|$, mais

$$d(\lambda, \operatorname{Sp} a) = \frac{1}{\varrho((a-\lambda)^{-1})} \leqslant \frac{1}{\alpha |(a-\lambda)^{-1}|}$$

puisque $a \in A_\alpha$, donc

$$|(b-a)(a-\lambda)^{-1}| \leqslant |b-a|\,|(a-\lambda)^{-1}| < 1.$$

Mais $\lambda - b = (\lambda - a)[1 + (\lambda - a)^{-1}(a-b)]$ est inversible puisque $\varrho((b-a) \times (a-\lambda)^{-1}) < 1$, ce qui est contradictoire.

Corollaire 1. *Si $A_\alpha = \{x \mid \varrho((x-\lambda)^{-1}) \geqslant \alpha \|(x-\lambda)^{-1}\|$ pour $\lambda \notin \operatorname{Sp} x\}$ alors pour $a \in A_\alpha$ et $b \in A$ on a $\operatorname{Sp} b \subset \operatorname{Sp} a + \bar{B}\left(0, \frac{1}{\alpha}\|b-a\|\right)$ donc en particulier $\Delta(\operatorname{Sp} a, \operatorname{Sp} b) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|b-a\|$ si $a, b \in A_\alpha$, ce qui prouve l'uniforme continuité du spectre sur A_α.*

Une algèbre stellaire, ou C^*-algèbre, vérifie $\|x^*x\| = \|x\|^2$ quel que soit x. Alors:

Corollaire 2. *Si A est une algèbre stellaire alors pour a, b normaux on a $\Delta(\operatorname{Sp} a, \operatorname{Sp} b) \leqslant \|a-b\|$, donc le spectre est uniformément continu sur l'ensemble des éléments normaux.*

Démonstration. $\tilde{A}$ est une algèbre stellaire avec unité, alors pour x normal dans $\tilde{A}$ et $\lambda \notin \operatorname{Sp} x$ on a $(\lambda - x)^{-1}$ normal donc $\varrho((x-\lambda)^{-1}) = \|(x-\lambda)^{-1}\|$.

Les algèbres symétriques sont les algèbres involutives telles que $\operatorname{Sp} h \subset \boldsymbol{R}$ pour h hermitien. Pták a démontré (voir [5], p. 225) que si on pose $|x| = \varrho(x^*x)^{\frac{1}{2}}$ alors c'est une semi-norme sous-multiplicative sur A, telle que $\varrho(x) \leqslant |x|$ pour $x \in A$ et $|x| = \varrho(x)$ pour x normal. Ainsi:

Corollaire 3. *Si A est une algèbre symétrique, alors pour a normal et $b \in A$ on a $\operatorname{Sp} b \subset \operatorname{Sp} a + \bar{B}(0, |b-a|)$, donc en particulier $\Delta(\operatorname{Sp} a, \operatorname{Sp} b) \leqslant |b-a|$ sur l'ensemble des éléments normaux et le spectre est uniformément continu sur cet ensemble.*

Démonstration. $\tilde{A}$ est symétrique et avec unité donc, d'après le théorème 3 et le résultat de Pták, il reste à prouver l'uniforme continuité sur N l'ensemble des éléments normaux. Soit $A' = \tilde{A}/\operatorname{Rad}\tilde{A}$, A' est involutive et sans radical, donc d'après le théorème de Johnson (voir [5], p. 130), l'involution de A' est continue, c'est-à-dire qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $|||\mathring{x}^*||| \leqslant k|||\mathring{x}|||$ où $\mathring{x}$ désigne la classe de x et $|||\mathring{x}|||$ est égal à $\operatorname{Inf}\|y\|$ pour $y - x \in \operatorname{Rad}\tilde{A}$. Ainsi

$$\Delta(\operatorname{Sp} a, \operatorname{Sp} b) = \Delta(\operatorname{Sp} \mathring{a}, \operatorname{Sp} \mathring{b}) \leqslant |\mathring{b} - \mathring{a}| \leqslant \sqrt{k}\,|||\mathring{b} - \mathring{a}||| \leqslant \sqrt{k}\,\|b-a\|.$$

Corollaire 4. *Si A est une algèbre involutive telle que $\varrho(h) \geqslant \alpha\|h\|$ quel que soit h hermitien, alors pour a normal et $b \in A$ on a $\operatorname{Sp} b \subset \operatorname{Sp} a + \bar{B}(0, \gamma\|b-a\|)$, donc en particulier $\Delta(\operatorname{Sp} a, \operatorname{Sp} b) \leqslant \gamma\|b-a\|$ si a, b sont normaux, où $\gamma \leqslant 2/\alpha$ si A est avec unité et $\gamma \leqslant 6/\alpha$ sinon.*

Démonstration. Si $x \in N$ alors $x = h + ik$ où $h = (x+x^*)/2$ et $k = (x-x^*)/2i$ commutent, donc $\|x\| \leqslant \|h\| + \|k\| \leqslant \frac{1}{\alpha}(\varrho(h) + \varrho(k)) \leqslant \frac{2}{\alpha}\varrho(x)$. Si A est sans unité il suffit de remarquer que pour $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $h \in A$ on a:

$$\|h + \lambda\| \leqslant \|h\| + |\lambda| \leqslant \frac{1}{\alpha}(\varrho(h) + |\lambda|) \leqslant \frac{3}{\alpha}\varrho(h+\lambda).$$

De ce corollaire découle immédiatement le résultat de Yood [14]. Nous allons voir un peu plus loin que ces corollaires peuvent être fortement généralisés, mais avant, prouvons par des moyens un peu plus techniques le théorème suivant où *l'épaisseur* du trou T, dans le spectre, désigne $\frac{1}{2}\operatorname*{Inf}_{\lambda \in T}\operatorname*{Sup}_{\mu \in \partial T}|\lambda - \mu|$.

Théorème 4. *Soit A une algèbre de Banach avec unité munie d'une semi-norme sous-multiplicative, E un sous-espace vectoriel réel de A tel que, pour tout $x \in E$, on ait $\operatorname{Sup}\varrho((x-\mu)^{-1})/|(x-\mu)^{-1}| < \infty$, pour $\mu \notin \operatorname{Sp} x$, alors si $a \in E_\alpha = \{x \mid x \in E,\ \varrho((x-\mu)^{-1}) \geqslant \alpha|(x-\mu)^{-1}|$, pour $\mu \notin \operatorname{Sp} x\}$ et $b \in E$ on a $\operatorname{Sp} b \subset \operatorname{Sp} a + \bar{B}\left(0, \frac{1}{\alpha}|b-a|\right)$. En particulier si $a, b \in E_\alpha$ alors $\Delta(\operatorname{Sp} a, \operatorname{Sp} b) \leqslant \frac{1}{\alpha}|b-a|$.*

Démonstration. Supposons d'abord que $|b-a| > 0$; soient $T_1, \ldots, T_n$ les trous de $\operatorname{Sp} a$ dont l'épaisseur est strictement plus grande que $\frac{1}{\alpha}|b-a|$. Appelons $\sigma_n(a)$, le spectre de a dans lequel on a bouché les trous autres que $T_1, \ldots, T_n$, et pour $x \neq a$, appelons $\sigma_n(x)$ le spectre de x dans lequel on a bouché les trous qui ne rencontrent pas l'un des $T_1, \ldots, T_n$.

D'après le lemme 1 il existe $r_1 > 0$ tel que $0 \leqslant \lambda \leqslant r_1$ implique $\mathrm{Sp}\big(a+\lambda(b-a)\big) \subset \sigma_n(a)+\bar{B}\Big(0, \frac{1}{\alpha}|b-a|\Big)$. Soit γ la borne supérieure des β tels que $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et si $0 \leqslant \lambda \leqslant \beta$ alors $\mathrm{Sp}\big(a+\lambda(b-a)\big) \subset \sigma_n(a)+\bar{B}\Big(0, \frac{1}{\alpha}|b-a|\Big)$. Supposons que $\gamma < 1$, en appliquant les théorèmes 1et 2, avec $f(\lambda) = a+\lambda(b-a)$ et $\Gamma = [0, \gamma[$, on obtient:

$$\mathrm{Sp}\big(a+\gamma(b-a)\big) \subset \sigma_n\big(a+\gamma(b-a)\big) = \overline{\lim_{0\leqslant\lambda<\gamma}}\, \sigma_n\big(a+\lambda(b-a)\big) \subset \sigma_n(a)+\bar{B}\Big(0, \frac{\gamma}{\alpha}|b-a|\Big).$$

Il existe aussi $r_2 > 0$ tel que $0 \leqslant \varepsilon \leqslant r_2$ implique

$$\mathrm{Sp}\big(a+(\gamma+\varepsilon)(b-a)\big) \subset \sigma_n\big(a+\gamma(b-a)\big)+\bar{B}\Big(0, \frac{1-\gamma}{\alpha}|b-a|\Big),$$

mais alors d'après ce qui précède

$$\mathrm{Sp}\big(a+(\gamma+\varepsilon)(b-a)\big) \subset \sigma_n(a)+\bar{B}\Big(0, \frac{1}{\alpha}|b-a|\Big)$$

ce qui est absurde d'après la définition de γ. Ainsi $\gamma = 1$, d'où

$$\mathrm{Sp}\, b \subset \sigma_n(a)+\bar{B}\Big(0, \frac{1}{\alpha}|b-a|\Big) = \mathrm{Sp}\, a+\bar{B}\Big(0, \frac{1}{\alpha}|b-a|\Big).$$

Si $|b-a| = 0$, étant donné n trous $T_1, \ldots, T_n$ de $\mathrm{Sp}\, a$, on peut déduire de la même façon que $\mathrm{Sp}\, b \subset \sigma_n(a)$ d'où

$$\mathrm{Sp}\, b \subset \bigcap_{n\geqslant 1} \sigma_n(a) = \mathrm{Sp}\, a.$$

Remarque 5. Tous les théorèmes que nous venons de démontrer pour A avec unité, s'étendent, sans difficultés, au cas sans unité. Si on désigne par $a^\#$ l'adverse de a, c'est-à-dire l'élément de A tel que $a+a^\#+aa^\# = a+a^\#+a^\# a = 0$, la condition

$$\mathrm{Sup}\, \frac{\varrho\big((a-\mu)^{-1}\big)}{|(a-\mu)^{-1}|} < \infty \quad \text{pour} \quad \mu \notin \mathrm{Sp}\, a$$

doit être remplacée par

$$\mathrm{Sup}\, \frac{\varrho\bigg(\Big(\dfrac{a}{\mu}\Big)^\#\bigg)}{\bigg|\Big(\dfrac{a}{\mu}\Big)^\#\bigg|} < \infty \quad \text{pour } \mu \notin \mathrm{Sp}\, a,$$

A_α est alors défini comme étant l'ensemble des $a \in A$ tels que $\varrho\bigg(\Big(\dfrac{a}{\mu}\Big)^\#\bigg) \geqslant \alpha\bigg|\Big(\dfrac{a}{\mu}\Big)^\#\bigg|$ si $\mu \notin \mathrm{Sp}\, a$.

En utilisant le fait que $\frac{1}{3}\big(|\lambda|+\varrho(x)\big) \leqslant \varrho(x+\lambda)$ si $x \in A$ et $\lambda \in C$, on obtient alors que $\mathrm{Sp}\, b \subset \mathrm{Sp}\, a+\bar{B}\Big(0, \frac{3}{\alpha}|b-a|\Big)$ pour $a \in A_\alpha$ et $\Delta(\mathrm{Sp}\, a, \mathrm{Sp}\, b) \leqslant \frac{3}{\alpha}|b-a|$ si $a, b \in A_\alpha$.

Dans [1] nous avions généralisé un résultat de B. Yood ([14]) en prouvant que, si ϱ est sous-multiplicatif sur l'ensemble H des éléments hermitiens d'une algèbre involutive, alors $x \to \mathrm{Sp}\, x$ est continu sur l'ensemble N des éléments normaux.

Nous avions aussi posé la question de savoir si, avec cette condition, $x \to \mathrm{Sp}\, x$ est uniformément continu. Tout cela est étudié dans [2]; en particulier, nous y avons démontré le

Théorème 5. *Soit A involutive et $\gamma \geqslant 1$ tel que $\varrho(ab) \leqslant \gamma\varrho(a)\varrho(b)$ quels que soient $a, b \in N$, alors il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\Delta(\mathrm{Sp}\, a, \mathrm{Sp}\, b) \leqslant \delta\|a-b\| \quad \text{pour} \quad a, b \in N.$$

En particulier, le spectre est uniformément continu sur N. On peut même dire que si l'involution sur A est isométrique alors $\delta \leqslant 4\gamma^2(1+\sqrt{2})^2$, si A a une unité, et $\delta \leqslant 4(9\gamma)^2(1+\sqrt{2})^2$ sinon.

Nous ne donnerons pas les détails de cette démonstration; on les trouvera dans le travail cité. Contentons-nous d'indiquer les idées générales, au moins dans le cas où A a une unité.

On commence par remplacer A par $A/\mathrm{Rad}\, A$ ce qui ne change pas le spectre et, d'après le théorème de Johnson, rend l'involution continue (voir par exemple [5]). On définit une semi-norme sous-multiplicative sur A par

$$|x| = \gamma\, \mathrm{Inf} \sum |\lambda_i|\varrho(u_i)$$

pour toute les décompositions $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i + v$, où $\lambda_i \in C$, u_i unitaire, $v \in \mathrm{Rad}\, A$; on montre alors que $|x| \leqslant 2\gamma(1+\sqrt{2})\varrho(x)$, quel que soit $x \in N$, et $\varrho(x) \leqslant |x|$, quel que soit $x \in A$. Ainsi, d'après le théorème 3, $\Delta(\mathrm{Sp}\, a, \mathrm{Sp}\, b) \leqslant 2\gamma(1+\sqrt{2})|a-b|$ pour $a, b \in N$, qui avec $|x| \leqslant \gamma(1+\sqrt{2})(\|x\|+\|x^*\|)$ pour $x \in A$ permet d'obtenir le résultat.

Toute la difficulté de la démonstration est dans l'inégalité $\varrho(x) \leqslant |x|$. En fait, il suffit de prouver que $\varrho(h) \leqslant |h|$ pour $h \in H$ et ce dernier point s'obtient aisément si on introduit sur H la fonction

$$|h|' = \gamma\, \mathrm{Inf} \sum_{i=1}^n \varrho(h_i),$$

pour toutes les décompositions $h = \sum_{i=1}^{n} h_i$, $h_i \in H$ et si l'on remarque que

$$|h| \geqslant |h|' \geqslant \frac{1}{\gamma} \varrho(h).$$

Additif. Pour plus de détails concernant les résultats de cet article, voir notre livre à paraître *Propriétés spectrales des algèbres de Banach*. A propos de la remarque 4, C. Apostol nous a signalé un exemple d'algèbre de Banach où le rayon spectral est continu mais le spectre discontinu.

Bibliographie

[1] B. Aupetit, *Continuité du spectre dans les algèbres de Banach avec involution*, Pacific J. Math. 56 (1975), p. 321–324.

[2] — *Uniforme continuité du spectre dans les algèbres de Banach avec involution*, C. R. Acad. Sci. Paris 284 (1977), p. 1125–1127.

[3] — *Caractérisation spectrale des algèbres de Banach commutatives*, Pacific J. Math. 63 (1976), p. 23–35.

[4] — *Caracterisation spectrale des algèbres de Banach de dimension finie*, J. Functional Analysis 25 (1977), à paraître.

[5] A. F. Bonsall and J. Duncan, *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, New York 1973.

[6] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, Princeton 1967.

[7] — *Capacity in Banach algebras*, Indiana Univ. J. 20 (1971), p. 855–863.

[8] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, New York 1966.

[9] J. D. Newburgh, *The variation of spectra*, Duke Math. J. 18 (1951), p. 165–176.

[10] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, Van Nostrand, Princeton 1960.

[11] E. Vesentini, *On the subharmonicity of the spectral radius*, Boll. Un. Mat. Ital. 4 (1968), p. 427–429.

[12] — *Maximum theorems for spectra. Essays on topology and related topics dedicated to Georges de Rham*, Springer-Verlag, New York 1970.

[13] V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of many complex variables*, M. I. T Press, Cambridge, Mass. 1966.

[14] B. Yood, *On axioms for B*-algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970), p. 80–82.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ LAVAL, QUÉBEC, CANADA

Received July 2, 1975 (1040)

STUDIA MATHEMATICA, T. LXI. (1977)

Decompositions of set functions with values in a topological semigroup

by

R. URBAŃSKI (Poznań)

Abstract. This paper contains a generalization of Theorem 3.11 of L. Drewnowski [1], concerning generalized Hewitt–Yosida and Lebesgue decompositions, to the case of Hausdorff topological semigroups.

0. Preliminaries. Throughout this paper,

S is an abstract space,

$\mathscr{R}$ is a $\mathfrak{S}$-ring of subsets of S,

H is comutative, Hausdorff, completely regular topological semigroup with identity $\boldsymbol{O}$ under the operation $+$ and topology τ such that the families $\{x+U\}$, where x runs through all elements of H and U runs through all elements of $\mathscr{U}$ ($\mathscr{U}$ an open basis of $\boldsymbol{O}$) are open basis for H.

0.1. DEFINITIONS.

(1) Let I be any index set;

$$f(I) = \{j\colon j \subset I \text{ and } j \text{ is finite}\}.$$

(2) For any J directed by $<$ and $x\colon J \to H$, $y \in H$,

$$\lim_j x_j = x$$

iff for every neighborhood U_y of y there exists $j_0 \in J$ such that for every $j \in J$ with $j > j_0$ we have $x_j \in U_y$.

(3) Let I be any index set and $x\colon I \to H$, $y \in H$; then

$$\sum_{i \in I} x_i = y \quad \text{iff} \quad \lim_{j \in f(I)} S_j = y \quad \text{where } S_j = \sum_{k \in j} x_k$$

and $J = f(I)$ directed by $\subset$.

(4) Let $x\colon I \to H$. The family $(x_i\colon i \in I)$ is *summable* in H iff there exists $y \in H$ such that $\sum_{i \in I} x_i = y$.