Sur les fonctions indépendantes (III)

(Le mouvement brownien; la loi de Maxwell)

par

M. KAC et H. STEINHAUS (Lwów).

On attribue à BROWN (botanicien anglais, 1827) la découverte du mouvement perpétuel de particules solides très petites, suspendues dans un milieu liquide ou gazeux. Ce mouvement, que l'on rend visible à l'aide d'un microscope ou d'un ultramicroscope, est dû aux chocs incessants qu'éprouve la particule de la part des molécules du milieu ambiant; on le sait depuis les travaux théoriques de M. A. EINSTEIN et M. SMOLUCHOWSKI [1]), confirmés par les expériences de M. J. PERRIN [2]). Ainsi ce phénomène constitue une preuve importante pour la théorie cinétique de la matière.

La théorie des fonctions indépendantes, exposée dans les Communications précédentes [3]), permet d'obtenir les résultats principaux des auteurs précités avec une simplicité remarquable; le rôle qui revient aux hypothèses physiques devient plus clair si elles ne sont plus confondues avec les artifices du calcul; en particulier, la probabilité n'apparaît que comme une interprétation finale des résultats obtenus par des raisonnements de mathématique pure.

1. Un vase V de volume 1 contient un grand nombre de particules en émulsion avec un milieu liquide ou gazeux. On

---

[1]) M. Smoluchowski, O fluktuacyach termodynamicznych i ruchach Browna, Prace matematyczno-fizyczne 25 (1914) p. 187—263; on y trouve de nombreuses indications bibliographiques.

[2]) Loc. cit. [1]), p. 212.

[3]) Ces Studia, ce volume, p. 46—58 et p. 59—66.

suppose que l'on ait représenté V sur le segment $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ d'une manière biunivoque et telle que la mesure soit conservée; nous entendons par là que la mesure lebesguienne spaciale d'une partie quelconque de V est égale à la mesure linéaire de Lebesgue de la partie correspondante de $\langle 0,1 \rangle$. Une représentation de cette espèce pourrait même être effectuée par des fonctions continues de α, si l'on permettrait qu'un certain ensemble spacial de mesure nulle cesse d'avoir une image univoque dans $\langle 0,1 \rangle$; néanmoins, cette image aurait toujours une mesure nulle et la condition essentielle d'égalité de mesures serait encore respectée. De cette manière nous avons caractérisé chaque point de V par un nombre unique α (sauf peut-être un ensemble de mesure nulle).

Imaginons maintenant un laps de temps τ très court, pendant lequel chaque particule subit un choc qui la déplace jusqu'à ce que les contrechocs détruisent la composante x de sa vitesse. L'effet est un déplacement $f_1(\alpha)$ vers les x positifs. Le symbole $f_1(\alpha)$ désigne donc ici la grandeur du déplacement dans le sens $+x$ qu'éprouverait une particule qui serait située au temps initial $t=0$ au point α de l'espace; il est indifférent, si ce point a été occupé en réalité ou non. La particule fictive est assujettie à un deuxième choc qui la force de quitter sa nouvelle place; il en résulte un deuxième déplacement $f_2(\alpha)$ pendant le temps $\langle \tau, 2\tau \rangle$. Ainsi les abscisses x successives de la particule sont déterminées toujours par le même nombre α.

Nous supposons que

1° les fonctions $f_k(\alpha)$ sont uniformément bornées,

2° $\int\limits_0^1 f_k(\alpha)\, d\alpha = 0 \quad (k)$,

3° $\int\limits_0^1 f_k^2(\alpha)\, d\alpha = \gamma \quad (k)$,

4° les fonctions $\{f_k(\alpha)\}$ constituent un système de fonctions indépendantes.

L'hypothèse 1° est évidente, même pour un récipient infini. Les hypothèses 2° et 3° expriment que l'émulsion est en équilibre statistique; en particulier, 3° signifie la constance de la moyenne temporelle de l'énergie totale des molécules. Enfin 4° utilise la notion d'indépendance, introduite dans la Communication I[4]). En affirmant que $f_{k+1}(\alpha)$ est indépendant de $\{f_1(\alpha), f_2(\alpha) \dots f_k(\alpha)\}$, nous constatons que le passé d'une particule est sans corrélation avec son avenir; en effet, la particule une fois arrêtée est exposée au hasard des chocs moléculaires tout comme elle l'était au temps initial; nous sommes donc d'accord avec le langage des physiciens.

En désignant par $x_t(\alpha)$ le déplacement dans le sens $+x$ après le temps $t = n\tau$ et par s_t la racine carrée du carré moyen des $x_t(\alpha)$ pour tous les points de V, nous pourrons écrire

(1) $$x_t(\alpha) = f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + \dots + f_n(\alpha),$$

$$s_t^2 = \int\limits_0^1 x_t^2(\alpha)\, d\alpha = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_0^1 f_k^2(\alpha)\, d\alpha = n\gamma = \frac{\gamma}{\tau}\, t,$$

(2) $$s_t = \sqrt{\frac{\gamma}{\tau}}\, \sqrt{t}\,.$$

C'est la loi classique pour le déplacement moyen au bout du temps t; elle résulte de l'orthogonalité seule. En tirant parti de toutes les hypothèses 1°—4°, nous obtenons par le théorème 1 de la Communication II

$$\lim_{n\to\infty} \left| E_\alpha \left(a < \frac{f_1(\alpha) + f_2(\alpha) + \dots + f_n(\alpha)}{\sqrt{2\, n\gamma}} < b \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_a^b e^{-\xi^2}\, d\xi,$$

ce qui donne immédiatement, à cause de (1) et (2),

(3) $$\lim_{t\to\infty} \left| E_\alpha \left(a\sqrt{2}\, s_t < x_t(\alpha) < b\sqrt{2}\, s_t \right) \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_a^b e^{-\xi^2}\, d\xi.$$

C'est le deuxième théorème de la théorie classique. En effet, (3) dit que, pour t très grand, le déplacement aura acquis une valeur comprise entre $a\sqrt{2}\, s_t$ et $b\sqrt{2}\, s_t$, pour toutes les particules qui occupaient au temps initial une partie P du récipient V, dont le volume $|P|$ (mesuré L) est donné très exactement par l'intégrale de Gauss. Si la répartition des particules était uniforme au début, il est légitime de dire que cette intégrale donne la probabilité de rencontrer une particule de ce genre.

2. Les formules d'Einstein et de Smoluchowski rattachent la valeur du coefficient γ/τ aux constantes physiques. Cette question

[4]) Loc. cit. [3]), p. 47.

exige un raisonnement à part, nous voulons cependant indiquer ici les calculs de M. L. INFELD [5]), qui conduisent à la valeur classique de ce coefficient sans prêter aux objections de la méthode ancienne.

Soit M la masse d'une particule, R la constante des gaz, T la température absolue, N le nombre d'Avogadro, S le coefficient de Stokes. Quand on désigne S/M par β, il est à remarquer que l'on peut rendre $e^{\beta\tau}$ très grand sans violer la condition que τ doit être très petit. En effet, S est égal à $6\pi a\zeta$, où a désigne le diamètre de la particule et ζ le coefficient de viscosité du milieu ambiant. (Pour une particule de gomme-gutte de densité 1,2, de diamètre 2.10^{-5} cm, plongée dans l'eau de 17^0 C, ce qui correspond à $\zeta = 0{,}0108$, on trouve $S/M = \beta = 0{,}33 \times 10^8$. Si l'on choisit p. e. $\tau = 10^{-6}$ sec, on obtient $e^{\beta\tau} \approx 10^{14}$).

Soit $v_0(\alpha)$ la vitesse initiale d'une particule, $v_t(\alpha)$ sa vitesse au moment t $(0 \leqslant t \leqslant \tau)$; la loi de STOKES donne

$$(4) \qquad M\frac{dv_t}{dt} = -Sv_t, \quad v_t = v_0 e^{-\beta t},$$

ce qui entraîne (pour les composantes x des vitesses)

$$f_1(\alpha) = \int_0^\tau v_t(\alpha)\,dt = v_0(\alpha)\,\frac{1-e^{-\beta\tau}}{\beta} \quad {}^{6})$$

et

$$(5) \quad \gamma = \int_0^1 f_1^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{\beta^2}\int_0^1 v_0^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{\sigma^2}{\beta^2} \quad \left(\sigma = \sqrt{\int_0^1 v_0^2(\alpha)\,d\alpha}\right),$$

quand on néglige $e^{-\beta\tau}$ vis-à-vis de l'unité. La moyenne temporelle de l'énergie (dans le sens $+x$), pour une particule, devient, à cause de (4),

$$\frac{M}{2\tau}\int_0^\tau v_t^2(\alpha)\,dt = \frac{Mv_0^2(\alpha)}{2\tau}\int_0^\tau e^{-2\beta t} = \frac{Mv_0^2(\alpha)\,(1-e^{-2\beta\tau})}{4\beta\tau}.$$

En négligeant $e^{-2\beta\tau}$ vis-à-vis de l'unité et en calculant la moyenne spaciale de la moyenne temporelle, on obtient par application du principe de l'équipartition de l'énergie au système *particules + molécules*

[5]) Avec permission de l'auteur.

[6]) On en déduit la signification de 3^0 (p. 90), f_1 étant proportionnel à v_0.

$$\frac{RT}{2N} = \int_0^1 d\alpha \left\{ \frac{M}{2\tau}\int_0^\tau v_t^2(\alpha)\,dt \right\} = \frac{M}{4\beta\tau}\int_0^1 v_0^2(\alpha)\,d\alpha = \frac{M\sigma^2}{4\beta\tau}$$

et, à cause de (5),

$$\frac{RT}{N} = \frac{M\beta\gamma}{2\tau} = \frac{S\gamma}{2\tau}, \quad \frac{\gamma}{\tau} = 2\frac{RT}{NM},$$

ce qui est l'expression classique pour le coefficient cherché. Les calculs de ce paragraphe dépassent notre but qui a été atteint au § 1; là nous n'avons fait que répéter les déductions connues sans les encombrer de considérations superflues (comme p. e. la loi exponentielle de CLAUSIUS).

3. Définition. Nous dirons que les valeurs d'une fonction $f(\xi)$ sont distribuées suivant une autre fonction $g(\omega)$, que nous appellerons la *distribuante* de $f(\xi)$, si l'on a

$$(6) \qquad |\underset{\xi}{E}(f(\xi) < \omega)| = g(\omega)$$

pour tous les ω réels.

Lemme. Pour que deux fonctions $f^{(1)}(\xi)$, $f^{(2)}(\xi)$, définies dans $\langle 0,1\rangle$, aient la même distribuante (en d'autres termes, pour qu'elles soient *équivalentes*), il faut et il suffit que l'on ait

$$(7) \qquad \int_0^1 e^{i\omega f^{(1)}(\xi)}\,d\xi = \int_0^1 e^{i\omega f^{(2)}(\xi)}\,d\xi$$

pour tous les ω réels.

La nécessité de cette condition découle de cette remarque presque évidente: $F(t)$ étant continue pour tout t réel, il est légitime de remplacer dans l'intégrale

$$\int_0^1 F(f(\xi))\,d\xi$$

la fonction $f(\xi)$ par une autre qui lui est équivalente. Pour démontrer que (7) suffit, nous nous servons de l'expression

$$D(a,\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(a - f(\xi))\,\omega}{\omega}\,d\omega,$$

due à DIRICHLET, qui est égale a 1, -1 ou 0, suivant que l'on a $f(\xi) < a$, $f(\xi) > a$, ou $f(\xi) = a$.

On a

$$(8)\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 D(a,\xi)\,d\xi = |\underset{\xi}{E}(f(\xi)<a)| + \frac{1}{2}\,|\underset{\xi}{E}(f(\xi)=a)|.$$

D'autre part

$$(9)\qquad \int_0^1 D(a,\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_0^1 \sin(a-f(\xi))\,\omega\,d\xi\right\}\frac{d\omega}{\omega};$$

pour justifier l'interversion des intégrations, on remplace les limites infinies par $-N$ et $+N$, on écrit que les deux intégrales doubles sont égales et on remarque qu'il est permis de passer à la limite $N=\infty$ sous le signe d'intégration $\int_0^1 \dots d\xi$, car l'inégalité

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-N}^{+N}\frac{\sin(a-f(\xi))\,\omega}{\omega}\,d\omega\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega$$

fournit pour l'intégrale intérieure une borne absolue <2.

Or, on voit que l'expression entre parenthèses $\{\ \}$ dans (9) est la partie imaginaire de

$$e^{ia\omega}\int_0^1 e^{-if(\xi)\omega}\,d\xi;$$

ainsi (7), (8) et (9) impliquent

$$|\underset{\xi}{E}(f^{(1)}(\xi)<a)| + \frac{1}{2}|\underset{\xi}{E}(f^{(1)}(\xi)=a)|$$
$$= |\underset{\xi}{E}(f^{(2)}(\xi)<a)| + \frac{1}{2}\,|\underset{\xi}{E}(f^{(2)}(\xi)=a)|$$

et il reste à démontrer que cette égalité engendre l'égalité des deux distribuantes $g^{(1)}(\omega)$, $g^{(2)}(\omega)$ qui correspondent à $f^{(1)}(\xi)$, $f^{(2)}(\xi)$ suivant (6). Or, on a pour une suite des a_k croissant vers a_∞,

$$\lim_{k\to\infty}\left\{|\underset{\xi}{E}(f(\xi)<a_k)| + \frac{1}{2}\,|\underset{\xi}{E}(f(\xi)=a_k)|\right\} = |\underset{\xi}{E}(f(\xi)<a_\infty)|,$$

ce qui achève la démonstration. Le critère (7) ne présuppose que la mesurabilité de $f^{(1)}$, $f^{(2)}$.

Soient $X(\alpha)$, $Y(\alpha)$, $Z(\alpha)$ les composantes d'un vecteur quelconque, supposées mesurables. Nous supposons que ce vecteur (qui dépend de α) n'est pas presque partout nul. Sa composante $Q(\alpha)$ suivant une direction quelconque l, m, n

$$Q(\alpha) = \frac{lX(\alpha)+mY(\alpha)+nZ(\alpha)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

aura, par hypothèse, une distribution de valeurs qui ne dépend pas de la direction considérée. Nous avons alors le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance des fonctions $X(\alpha)$, $Y(\alpha)$, $Z(\alpha)$ est que leur distribuante soit une fonction

$$(10)\qquad \Theta_h(\omega) = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\omega} e^{-h^2\xi^2}d\xi \qquad (h>0)$$

(dite de Gauss).

Démonstration. 1°: La condition est suffisante. En effet, pour montrer l'indépendance, il suffit, d'après le critère de la Communication I[7]), d'établir l'égalité

$$(11)\qquad \int_0^1 e^{i\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,Q(\alpha)}d\alpha = \int_0^1 e^{i(lX(\alpha)+mY(\alpha)+nZ(\alpha))}d\alpha$$
$$= \int_0^1 e^{ilX(\alpha)}d\alpha\,.\int_0^1 e^{imY(\alpha)}d\alpha\,.\int_0^1 e^{inZ(\alpha)}d\alpha$$

pour tous les l, m, n réels. Or, $\Theta_h(\omega)$ est évidemment la distribuante pour la fonction inverse $\omega=\varphi(\alpha)$, définie par $\alpha=\Theta_h(\omega)$. Comme $X(\alpha)$, $Y(\alpha)$, $Z(\alpha)$, $Q(\alpha)$ ont aussi la distribuante $\Theta_h(\omega)$, l'égalité à établir est équivalente à

$$(12)\quad \int_0^1 e^{i\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\varphi(\alpha)}d\alpha = \int_0^1 e^{il\varphi(\alpha)}d\alpha\,.\int_0^1 e^{im\varphi(\alpha)}d\alpha\,.\int_0^1 e^{in\varphi(\alpha)}d\alpha\,.$$

Par la substitution $\alpha=\Theta_h(\omega)$, c. à. d.

$$\alpha = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\omega} e^{-h^2\xi^2}d\xi,\quad \frac{d\alpha}{d\omega} = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2\omega^2},\quad \varphi(\alpha)=\omega,$$

(12) devient

[7]) Loc. cit. [3]), p. 50.

$$(13)\qquad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sqrt{l^2+m^2+n^2}\,\omega-h^2\omega^2}d\omega$$

$$=\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^3\int_{-\infty}^{+\infty} e^{il\omega-h^2\omega^2}d\omega\,.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{im\omega-h^2\omega^2}d\omega\,.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{in\omega-h^2\omega^2}d\omega\,.$$

Ici les parties imaginaires disparaissent et l'évaluation classique

$$(14)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\cos l\omega\,.\,e^{-h^2\omega^2}d\omega=\frac{\sqrt{\pi}}{h}\,e^{-\frac{l^2}{4h^2}}$$

réduit les deux membres de (13) à $e^{-\frac{l^2+m^2+n^2}{4h^2}}$.

2°: La condition est nécessaire. Si l'on suppose l'indépendance de X, Y, Z, on suppose de ce fait que (11) a lieu. En désignant par $\psi(l)$ l'intégrale

$$\int_0^1 e^{ilX(\alpha)}d\alpha$$

et en tirant parti de l'hypothèse que Q, X, Y, Z ont la même distribuante, ce qui permet de remplacer dans (11) ces fonctions par X, on obtient

$$(15)\qquad \psi(\sqrt{l^2+m^2+n^2})=\psi(l)\,\psi(m)\,\psi(n)$$

pour tous les l, m, n, réels. Or, la supposition que X est mesurable suffit pour affirmer la continuité de $\psi(l)$. L'équation (15), dite de Maxwell, n'admet donc, d'après MM. Banach et Ruziewicz [8]), que les solutions

$$\psi(t)\equiv 0,\qquad \psi(t)=e^{-kt^2}.$$

La constante k est $\geqslant 0$, car on a $|\psi(l)|\leqslant 1$; elle est positive, car $k=0$ implique

$$\int_0^1 e^{ilX(\alpha)}d\alpha\equiv 1\equiv\int_0^1 e^{il\cdot 0}d\alpha$$

et fournit pour $X(\alpha)$, d'après notre lemme, la même distribution des valeurs que pour 0, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $X(\alpha)\not\equiv 0$. La définition de $\psi(l)$ donne $\psi(0)=1$, ce qui exclut la solution $\psi(t)\equiv 0$. Il s'ensuit

[8]) S. Banach et S. Ruziewicz, Sur les solutions d'une équation fonctionnelle de J. Cl. Maxwell, Bull. de l'Acad. Pol. des Sciences et des Lettres, Cl. des Sc. Math. et Nat., série A, janv.—déc. 1922, p. 1—8.

$$\int_0^1 e^{ilX(\alpha)}d\alpha=e^{-kl^2}\qquad (k>0).$$

D'autre part, nous avons eu ((14))

$$\int_0^1 e^{il\varphi(\alpha)}d\alpha=\frac{\sqrt{\pi}}{h}\,e^{-\frac{l^2}{4h^2}},$$

ce qui conduit à

$$\int_0^1 e^{il\varphi(\alpha)}d\alpha=\int_0^1 e^{il\mu X(\alpha)}d\alpha,$$

si l'on choisit

$$h=\sqrt{\pi},\ \mu=\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}.$$

Ce résultat et notre lemme montrent que $\varphi(\alpha)$ et $\mu X(\alpha)$ ont la même distribuante; or, nous savons que la distribuante de $\varphi(\alpha)$ est $\Theta_h(\omega)$ avec $h=\sqrt{\pi}$. On en conclut que $X(\alpha)$ a $\Theta_h(\mu\omega)$ pour distribuante. Or, on a

$$\Theta_h(\mu\omega)=\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\mu\omega} e^{-h^2\xi^2}d\xi$$

$$=\mu\int_{-\infty}^{\omega} e^{-\mu^2\pi\eta^2}d\eta=\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\int_{-\infty}^{\omega} e^{-\frac{\eta^2}{4k}}d\eta=\Theta_{\frac{1}{2\sqrt{k}}}(\omega),$$

ce qui est une fonction de Gauss.

La partie 2° est une généralisation d'un théorème connu de Maxwell; la partie 1° permet d'affirmer l'indépendance des trois composantes du mouvement brownien, quand l'observation a montré la distribution de Gauss dans toutes les directions.

(Reçu par la Rédaction le 21. 3. 1936).