Sur la sommabilité des séries de Fourier

par

Z. ZALCWASSER (Warszawa).

1. Soit

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx+b_k \sin kx)$$

la série de Fourier d'une fonction sommable $f(x)$ et

$$(2) \qquad S_0(x),\quad S_1(x),\quad S_2(x),\ldots.$$

la suite des sommes partielles de la série (1). D'après un théorème classique de M. H. Lebesgue, la suite (2) est presque partout sommable (C, 1) vers la fonction $f(x)$. Or, comme la suite (2) n'est pas en général convergente, on peut se poser le problème suivant: Formons une suite

$$(3) \qquad S_{p_1}(x),\quad S_{p_2}(x),\ldots. \qquad (p_1<p_2<\ldots),$$

extraite de la suite (2). La nouvelle suite (3) est-elle encore sommable (C, 1) presque partout? Nous avons obtenu sur ce sujet deux résultats particuliers.

2. Théorème I. *$f(x)$ étant une fonction sommable, on a presque partout*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}[S_{1^2}(x)+S_{2^2}(x)+\ldots+S_{n^2}(x)]=f(x).$$

Démonstration. On a

$$(4) \qquad \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n}S_{\nu^2}(x)-f(x)=\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\varphi_x(t)\,\frac{H_n(t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\,dt=I_n,$$

où

$$(5) \qquad \varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x);\; H_n(t)=\sum_{\nu=1}^{n}\sin(\nu^2+1/2)\,t,$$

$$(6) \qquad |H_n(t)|\leqslant\Big|\sum_{\nu=1}^{n}e^{i(\nu^2+1/2)t}\Big|=\Big|\sum_{\nu=1}^{n}e^{i\nu^2 t}\Big|.$$

Pour obtenir une borne supérieure des sommes $|\sum e^{i\nu^2 t}|$, on peut appliquer le lemme de M. van der Corput [1]):

Si $g(u)$ $(a\leqslant u\leqslant b)$ est une fonction réelle deux fois dérivable et si $g''(u)\geqslant\varrho>0$ pour $a\leqslant u\leqslant b$ (ϱ — une constante), alors

$$\Big|\sum_{a<\nu\leq b}e^{2\pi i g(\nu)}\Big|\leqslant[g'(b)-g'(a)+2]\Big(\frac{4}{\sqrt{\varrho}}+A\Big),$$

A étant une constante absolue.

Ici nous avons

$$g(u)=\frac{u^2 t}{2\pi},\quad g'(u)=\frac{ut}{\pi},\quad \varrho=\frac{t}{\pi}\quad (t>0),\quad a=0,\quad b=n,$$

donc

$$(7) \qquad \Big|\sum_{\nu=1}^{n}e^{i\nu^2 t}\Big|\leqslant\Big(\frac{nt}{\pi}+2\Big)\Big(\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}+A\Big) \qquad (t>0).$$

Revenons à l'expression (4); décomposons l'intégrale I_n de la manière suivante:

$$(8) \qquad I_n=\frac{1}{n\pi}\Big[\int_0^{1/n^2}+\int_{1/n^2}^{1/n}+\int_{1/n}^{\delta}+\int_{\delta}^{\pi}\Big]=U_1+U_2+U_3+U_4,$$

désignons

$$\int_0^h|\varphi_x(t)|\,dt=\Phi_x(h)=\Phi(h)$$

et supposons que

$$(9) \qquad \Phi'(0)=0,\quad \text{c. à. d.}\quad \Phi(h)=o(h)\text{ [2]},$$

[1]) J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Ann. 84 (1921) p. 53–79.

[2]) Il est bien connu que cette hypothèse est remplie par presque tout x. (Lebesgue).

alors nous aurons

$$(10)_1 \qquad |U_1| \leqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^{1/n^2} \frac{|\varphi_x(t)|}{2\sin\frac{1}{2}t} \sum_{\nu=1}^{n} (\nu^2 + {}^1/_2)\, t\, dt$$

$$\leqslant \frac{1}{n\pi} \int_0^{1/n^2} |\varphi_x(t)|\, 2n^3\, dt = \frac{2}{\pi} n^2 \Phi(1/n^2) = o(1).$$

Dans l'intégrale U_2 on a $nt \leqslant 1$ et l'inégalité (7) se simplifie:

$$(7)_1 \qquad |H_n(t)| \leqslant \Big|\sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu^2 t}\Big| \leqslant \frac{A_1}{\sqrt{t}} \qquad (0 < t \leqslant \frac{1}{n}),$$

A_1 étant une constante absolue; il s'ensuit que

$$|U_2| \leqslant \frac{1}{n\pi} \int_{1/n^2}^{1/n} |\varphi_x(t)| \frac{2A_1}{t^{3/2}}\, dt = \frac{2A_1}{n\pi} \Big\{ [\Phi(t)\, t^{-3/2}]_{1/n^2}^{1/n} + \frac{3}{2} \int_{1/n^2}^{1/n} \Phi(t)\, t^{-5/2}\, dt \Big\}$$

$$= U_2' + U_2''.$$

De l'hypothèse (9) il résulte immédiatement que $U_2' = o(1)$ et

$$U_2'' = \frac{o(1)}{n} \int_{1/n^2}^{1/n} t^{-3/2}\, dt = o(1),$$

donc

$$(10)_2 \qquad U_2 = o(1).$$

Dans l'intégrale U_3 on a $nt \geqslant 1$ et de l'inégalité (7) on déduit

$$(7)_2 \quad \Big|\sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu^2 t}\Big| \leqslant A_2 n \sqrt{t} \qquad (A_2 \text{— une constante absolue; } t \geqslant \frac{1}{n}),$$

$$|U_3| \leqslant \frac{1}{n\pi} \int_{1/n}^{\delta} |\varphi_x(t)| \frac{2A_2 n}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2A_2}{\pi} \Big\{ [\Phi(t)\, t^{-1/2}]_{1/n}^{\delta} + \frac{1}{2} \int_{1/n}^{\delta} \Phi(t)\, t^{-3/2}\, dt \Big\}$$

$$= U_3' + U_3''.$$

On vérifie aisément que

$$|U_3'| \leqslant M\sqrt{\delta}, \quad |U_3''| \leqslant M\sqrt{\delta};$$

M ne dépendant ni de n ni de δ on peut choisir δ de manière que l'on ait

$$(10)_3 \qquad |U_3| < \varepsilon \quad \text{pour tous les } n > \frac{1}{\delta}.$$

En tenant fixe le nombre δ démontrons enfin que $\lim\limits_{n\to\infty} U_4 = 0$. A cet effet il suffit de remarquer que

$$U_4 = \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}, \quad \text{où} \quad v_n = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\varphi_x(t)}{2\sin\frac{1}{2}t} \sin(\nu^2 + {}^1/_2)\, t\, dt;$$

la fonction $\dfrac{\varphi_x(t)}{2\sin\frac{1}{2}t}$ étant sommable dans l'intervalle (δ, π), on a $v_n \longrightarrow 0$ [3]) et *à fortiori*

$$(10)_4 \qquad U_4 = o(1).$$

Les formules (8) et $(10)_{1,2,3,4}$ entraînent $I_n \longrightarrow 0$, c. q. f. d.

3. D'une manière analogue on démontre les deux propositions suivantes:

Théorème I'. *Si l'on désigne par $\bar{S}_n(x)$ les sommes partielles de la série*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-b_k \cos kx + a_k \sin kx),$$

conjuguée à la série (1), *on a presque partout*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \bar{S}_{\nu^2}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2\, tg\, \frac{1}{2}t}\, dt.$$

Théorème I''. *Si la série* (1) *est une série de Fourier-Stieltjes, c. à. d. si*

$$a_n + i\, b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{int}\, dF(t),$$

$F(t)$ étant une fonction réelle à variation bornée, on a presque partout

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} S_{\nu^2}(x) = F'(x).$$

Dans la démonstration du théorème I'' il faut remplacer l'intégrale I_n par

$$I_n^* = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{H_n(t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\, d\psi(t),$$

où $\psi(t) = \psi_x(t) = F(x+t) - F(x-t) - 2t F'(x)$ [4]).

[3]) Cela revient à constater que les coefficients de Fourier-Lebesgue tendent vers zéro.

[4]) Voir p. ex.: A. Zygmund, Trigonometrical series (Warszawa 1935) p. 59—60.

Le raisonnement qui a nous servi pour démontrer que $U_4 \to 0$ ne s'applique pas ici, car les coefficients de Fourier-Stieltjes ne tendent pas en général vers zéro. Mais nous pouvons faire appel à un résultat dû à MM. Hardy et Littlewood [5]):

Si t $(0 < t < \pi)$ est un nombre incommensurable avec π, alors

$$\sum_{\nu=1}^{n} e^{i\nu^2 t} = o(n).$$

Ceci posé, la démonstration du fait $U_4^* \to 0$ n'offre pas des difficultés.

4. Théorème II. *Si $f(x)$ est une fonction à carré sommable, on a presque partout*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} |S_{p_\nu}(x) - f(x)| = 0,$$

$\{p_\nu\}$ étant une suite croissante des nombres entiers positifs, vérifiant la condition

(T) $$p_k^2 \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu p_\nu^2} = O(1) \text{ pour } k \to \infty.$$

Remarquons que toute suite $\{p_\nu\}$ croissante et convexe remplit la condition (T).

Démonstration. Quand $p_\nu = \nu$, la proposition se réduit à un théorème connu de MM. Hardy-Littlewood [6]). M. Zygmund [7]) en a donné une démonstration simple et élégante et son raisonnement s'applique aussi au cas actuel. Pour la commodité du lecteur nous exposerons la démonstration *in extenso*. Posons

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1}.$$

Comme

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |S_{p_\nu}(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |S_{p_\nu}(x) - \sigma_{p_\nu}(x)| + \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |\sigma_{p_\nu}(x) - f(x)|,$$

[5]) G. H. Hardy and J. E. Littlewood, Some problems of Diophantine Approximation. II., Acta Math. 37 (1914) p. 193—239; p. 213, Theorem 2.14.

[6]) G. H. Hardy et J. E. Littlewood, Sur la série de Fourier d'une fonction à carré sommable, C. R. Acad. Sc. Paris 156 (1913) p. 1307—1309.

[7]) L. c. [4]), p. 241.

$$\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} |S_{p_\nu} - \sigma_{p_\nu}| \leqslant \left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} (S_{p_\nu} - \sigma_{p_\nu})^2\right\}^{1/2}$$

et $\lim_{\nu\to\infty} |\sigma_{p_\nu}(x) - f(x)| = 0$ presque partout, il suffit de démontrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} [S_{p_\nu}(x) - \sigma_{p_\nu}(x)]^2 = 0 \text{ presque partout.}$$

Cette rélation est à son tour une conséquence immédiate de la convergence de la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} [S_{p_\nu}(x) - \sigma_{p_\nu}(x)]^2 \quad ^{8)}.$$

Une série de fonctions positives étant intégrable terme à terme il suffit de prouver que

(11) $$B = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \int_0^{2\pi} (S_{p_\nu} - \sigma_{p_\nu})^2 dx < \infty.$$

Or,

(12) $$B = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \cdot \frac{\pi}{(p_\nu + 1)^2} \sum_{m=1}^{p_\nu} d_m^2\, m^2, \text{ où } d_m^2 = a_m^2 + b_m^2,$$

(13) $$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{p_\nu} d_m^2\, m^2 &= \sum_{k=1}^{\nu} \Big(\sum_{m=p_{k-1}+1}^{p_k} d_m^2\, m^2\Big) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{\nu} p_k^2 \cdot \sum_{m=p_{k-1}+1}^{p_k} d_m^2 = \sum_{k=1}^{\nu} p_k^2\, \omega_k \qquad (p_0 = 0), \end{aligned}$$

où

(14) $$\omega_k = \sum_{m=p_{k-1}+1}^{p_k} d_m^2;$$

(12), (13), (14) et la condition (T) donnent

$$B \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\pi}{\nu} \cdot \frac{1}{p_\nu^2} \sum_{k=1}^{\nu} p_k^2 \omega_k = \pi \sum_{k=1}^{\infty} p_k^2 \omega_k \cdot \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu p_\nu^2}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k M = M \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 < \infty \qquad (M \text{ — une constante}).$$

Ainsi la prémière partie de notre énoncé est démontrée.

[8]) Si la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ converge, $a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = o(n)$.

Il reste de prouver que toute suite $\{p_\nu\}$ croissante et convexe remplit la condition (T). On a

$$p_{2k}-p_k \geqslant p_k-p_1, \quad p_{2k}\geqslant 2p_k-p_1\geqslant Cp_k \text{ pour } k\geqslant k_0, \quad C=1,5,$$

donc

$$p_{2^m k}\geqslant C^m p_k \text{ pour } k\geqslant k_0 \qquad (m=1,2,3,\ldots);$$

il s'ensuit pour $k\geqslant k_0$

$$p_k^2\sum_{\nu=k}^{\infty}\frac{1}{\nu p_\nu^2}=\frac{1}{k}+p_k^2\,(\sum_{\nu=k+1}^{2k}+\sum_{\nu=2k+1}^{4k}+\ldots.)$$

$$\leqslant 1+\log 2\,(1+C^{-2}+C^{-4}+\ldots.)=M<\infty.$$

5. En terminant j'indique quelques questions qui se rattachent aux théorèmes démontrés:

1° dans le théorème I, peut-on remplacer la suite $\{S_{\nu^2}\}$ par $\{S_{\nu^3}\}$ ou $\{S_{\nu^4}\}$ etc.?

2° le théorème II est-il vrai pour *toute* suite croissante $\{p_\nu\}$?

3° peut-on remplacer la sommabilité $(C,1)$ par (C,α), où $\alpha<1$?

(Reçu par la Rédaction le 11. 2. 1936).