Sur l'interpolation (II)

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

Notions et remarques préliminaires.

Nous appellerons[1]) polynôme interpolant d'ordre n de la fonction $f(x)$ le polynôme

$$U_n(x) = U_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{i=1}^{n} (a_i^{(n)} \cos ix + b_i^{(n)} \sin ix)$$

défini par les $2n+1$ égalités

0.1 $$U_n(f, x_i) = f(x_i) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots 2n),$$

$$x_i = i \frac{2\pi}{2n+1} \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

L'expression analytique du polynôme $U_n(f, x)$ est très simple, à savoir

0.2 $$U_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, d\varphi_n(t),$$

où

$$D_n(u) = \frac{\sin(n + {}^1\!/_2)\, u}{2 \sin u/2}$$

et où $\varphi_n(t)$ désigne la fonction définie par les formules

0.3 $$\varphi_n(x) = x_{i+1} \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

pour $x_i < x \leqslant x_{i+1}$.

Les égalités suivantes[2]) (qui sont fondamentales pour toute la théorie des polynômes $U_n(f, x)$),

[1]) Voir Jackson [1] p. 110 sqq.

[2]) Jackson [1] p. 112—113.

0.4
$$\int_0^{2\pi} \sin px\, d\varphi_n(x) = 0 \qquad (p \text{ et } n \text{ entiers arbitraires})$$
$$\int_0^{2\pi} \cos px\, d\varphi_n(x) = \left| \begin{array}{l} 0 \text{ si } p \text{ n'est pas un multiple de } 2n+1, \\ \pi \text{ si } p \neq 0 \text{ est un multiple de } 2n+1 \end{array}\right.$$

sont bien connues.

En particulier il en résulte la formule (0.2) et

0.5
$$a_i^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos it\, d\varphi_n(t), \qquad (i=0,1,\ldots,n)$$
$$b_i^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin it\, d\varphi_n(t).$$

La série de Fourier de la fonction $f(x)$

0.6
$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}(a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

étant supposée absolument convergente, on peut exprimer les coefficients $a_i^{(n)}$ et $b_i^{(n)}$ à l'aide des a_i et b_i; en effet, en portant $S(f)$ au lieu de f dans (0.5) et en appliquant (0.4), on obtient [3])

0.7
$$a_i^{(n)} = a_i + \sum_{t=1}^{\infty}(a_{t(2n+1)+i} + a_{t(2n+1)-i}),$$
$$b_i^{(n)} = b_i + \sum_{t=1}^{\infty}(b_{t(2n+1)+i} - b_{t(2n+1)-i}).$$

Pour simplicité des énoncés à suivre, nous désignerons par A^p la classe de fonctions $f(x)$ absolument continues, s'annulant pour $x=0$, 2π, et admettant une dérivée de la classe L^p [4]), par $U_n'(f,x)$ la dérivée du polynôme $U_n(f,x)$, par f' la dérivée de f, enfin par $|f|_p$ l'expression

$$\left(\int_0^{2\pi} |f|^p dx\right)^{1/p}.$$

[3]) Ces formules sont connues; voir p. ex. Tonelli [1] p. 162, Marcinkiewicz [1] et [2].

[4]) On dit que $f \in L^p$, si $\int_0^{2\pi} |f|^p dx < \infty$.

Soit encore $A^{(1)} = A$ et

0.8
$$S_n(x) = S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n}(a_i \cos ix + b_i \sin ix).$$

Dans cette note je considère les polynômes $U_n'(f,x)$ des fonctions $f \in A$.

Le premier paragraphe contient le théorème de la localisation, le deuxième les critères ainsi dits [5]) de Dirichlet, de Dini et de M. de la Vallée Poussin, le troisième un théorème (que j'appelle le théorème de M. Kolmogoroff) concernant la convergence des suites lacunaires, le quatrième des résultats concernant la convergence en moyenne, enfin le cinquième et le sixième respectivement un théorème analogue à celui de MM. Young et Hausdorff dans la théorie des séries de Fourier et des théorèmes relatifs au problème de l'équiconvergence des suites $U_n'(f,x)$ et $S_n'(f,x)$.

Dans les deux derniers paragraphes j'ai introduit les polynômes $V_n'(f,x)$ jouissant de propriétés analogues à celles des sommes de Fejér et j'ai résolu quelques problèmes relatifs à la convergence unilatérale, posés pour la théorie des séries de Fourier par M. A. Zygmund [6]).

La plupart de ces résultats a été publiée en polonais dans ma note [1] [7]). Les problèmes de la note présente sont modelés plus ou moins sur ceux de la théorie des séries de Fourier. Le lecteur s'en apercevra sans peine, c'est la raison pour laquelle je donne souvent seulement les idées des démonstrations. Je suppose chez le lecteur la connaissance des éléments de la théorie des séries de Fourier.

§ 1.

Théorème 1. *Si la fonction $f \in A$ est constante dans un intervalle (α, β), alors la suite $U_n'(f,x)$ converge uniformément vers zéro dans chaque intervalle (α', β'),* $(\alpha < \alpha' < \beta' < \beta)$.

La démonstration est basée sur deux lemmes:

Lemme 1. *Si la série de Fourier d'une fonction $f'(x)$ est absolument convergente, la suite $U_n'(f,x)$ converge uniformément vers f'.*

C'est une conséquence de (0.7).

[5]) Voir p. ex. Zygmund [1].

[6]) Zygmund [2].

[7]) Voir la bibliographie à la fin.

Lemme 2. *On a pour toute fonction* $g(x)\in A$

1.1
$$\int_0^{2\pi} g(x)\cos(n+{}^1/_2)\,x\,d\varphi_n(x)=o(n^{-1}).$$

En effet

1.2
$$I_n=\int_0^{2\pi} g(x)\cos(n+{}^1/_2)\,x\,d\varphi_n(x)$$
$$=-\int_0^{2\pi} g\Big(x+\frac{2\pi}{2n+1}\Big)\cos(n+{}^1/_2)\,x\,d\varphi_n(x),$$

donc

1.3
$$2I_n=\int_0^{2\pi} h_n(x)\cos(n+{}^1/_2)\,x\,d\varphi_n(x)$$

avec
$$h_n(x)=g(x)-g\Big(x+\frac{2\pi}{2n+1}\Big).$$

En intégrant par parties le second membre de (1.3), on obtient

1.4
$$2I_n=-\int_0^{2\pi} h_n'(x)\int_0^{x}\cos(n+{}^1/_2)\,t\,d\varphi_n(t)\,dx,$$

et comme

1.5
$$\Big|\int_0^{x}\cos(n+{}^1/_2)\,t\,d\varphi_n(t)\Big|\leqslant\frac{2\pi}{2n+1},\qquad \int_0^{2\pi}|h_n'(x)|\,dx\to 0,$$

la formule (1.4) donne (1.1).

Démonstration du théorème 1. En vertu du lemme 1, nous pouvons supposer $f(x)=0$ pour $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$. Le point x étant un point intérieur du segment (α,β), on a d'après (0.2)

1.6
$$U_n'(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\partial}{\partial x}D_n(x-t)\,d\varphi_n(t)$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{(n+{}^1/_2)\cos(n+{}^1/_2)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t)$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\sin(n+{}^1/_2)(x-t)}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\cos\frac{x-t}{2}\,d\varphi_n(t)$$

$$=(n+{}^1/_2)\cos(n+{}^1/_2)\,x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(t)\cos(n+{}^1/_2)\,t}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t)$$
$$-\sin(n+{}^1/_2)\,x\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\cos\frac{x-t}{2}}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\cos(n+{}^1/_2)\,t\,d\varphi_n(t).$$

Les fonctions
$$f(t)/\,2\sin\frac{x-t}{2}\quad\text{et}\quad f(t)\cos\frac{x-t}{2}\Big/4\sin^2\frac{x-t}{2}$$
étant de classe A, on obtient d'après le lemme 2

1.7
$$\lim_{n\to\infty}U_n'(f,x)=0.$$

Nous laissons au lecteur la démonstration que la formule (1.7) subsiste uniformément dans chaque intervalle (α',β'), $(\alpha<\alpha'<\beta'<\beta)$.

§ 2.

Théorème 2. *Si la fonction* $f\in A$ *est telle que pour un* $x=x_0$ *la fonction*

2.1
$$g(t)=\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}$$

est à variation bornée et continue pour $t=0$, *alors la suite* $U_n'(f,x_0)$ *converge vers* $f'(x_0)$.

Remarquons que cette condition est vérifiée si p. ex. la fonction $f'(x)$ est elle-même à variation bornée dans un entourage du point x_0, ou si l'intégrale

2.2
$$\int_0^{2\pi}|[f'(x_0+t)-f'(x_0)]/t|\,dt,$$

prise au sens de M. Lebesgue, existe.

Sans restreindre la généralité, nous supposerons $f(x)=f'(x)=0$. La fonction $g(t)$, donc aussi
$$h(t)=\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{2\sin\frac{x_0-t}{2}},$$
étant à variation bornée en vertu du théorème 1, nous pouvons supposer que sa variation totale ne surpasse pas ε. En appliquant le deuxième théorème de la moyenne, on trouve

2.3 $$|U_n'(f,x_0)| \leqslant 2\varepsilon \left|\int_0^{\xi} 2\sin\frac{x_0-t}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x} D_n(x_0-t)\,d\varphi_n(t)\right|,$$

et comme

2.4 $$\int_0^{\xi} 2\sin\frac{x-t}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}D_n(x-t)\,d\varphi_n(t)$$

$$=(n+{}^1\!/_2)\int_0^{\xi}\cos(n+{}^1\!/_2)(t-x)\,d\varphi_n(t)-\int_0^{\xi}\frac{\sin(n+{}^1\!/_2)(x-t)}{2\operatorname{tg}\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t),$$

on prouve facilement qu'il existe une constante M telle que

2.5 $$\left|\int_0^{\xi} 2\sin\frac{x-t}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}D_n(x-t)\,d\varphi_n(t)\right|\leqslant M,$$

d'où

2.6 $$\limsup_{n\to\infty}|U_n'(f,x_0)|\leqslant 2\varepsilon M.$$

Le nombre ε étant arbitraire, notre théorème est démontré.

§ 3.

Théorème 3. *Pour toute fonction $f\in A^2$ et toute suite $\{n_i\}$ de nombres entiers vérifiant la condition*

3.1 $$n_i/n_{i+1}<q<1 \qquad (i=1,2,\dots),$$

la suite $U'_{n_i}(f,x)$ converge presque partout.

Démonstration. En supposant f' impair,

$$S(f')=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\sin ix,$$

on obtient

3.2 $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[S_n'(f,x)-U_n'(f,x)]^2dx\leqslant n^2\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{\infty}\frac{b_{t(2n+1)\pm i}}{t(2n+1)\pm i}\right)^2$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{\infty}\frac{b_{t(2n+1)\pm i}}{t}\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{b^2_{t(2n+1)\pm i}}{t^{1/2}}\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^{3/2}}$$

$$\leqslant 3\sum_{\nu=1}^{\infty}\varepsilon_{n,\nu}b_\nu^2,\ \text{où}\ \varepsilon_{n,\nu}\leqslant\min\left[1,\left(\frac{2n+1}{\nu-n}\right)^{1/2}\right].$$

Cette formule donne

3.3 $$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[S'_{n_i}(f,x)-U'_{n_i}(f,x)]^2dx$$

$$\leqslant 3\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\nu=n_i+1}\varepsilon_{n_i,\nu}b_\nu^2\leqslant 3\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu^2\sum_{n_i<\nu}\varepsilon_{n_i,\nu}.$$

Désignons par $r=r(\nu)$ le plus grand indice i tel que $n_i<\nu$;

3.4 $$\sum_{n_i<\nu}\varepsilon_{n_i,\nu}\leqslant\sum_{i=1}^{r-1}+1\leqslant\sum_{i=1}^{r-1}\left(\frac{2n_i+1}{n_r-n_i}\right)^{1/2}+1$$

$$\leqslant 4\sum_{i=1}^{r-1}\left(\frac{n_i}{n_r}\right)^{1/2}+1\leqslant 4\sum_{i=1}^{\infty}q^{i/2}+1=C_q;$$

les formules (3.3) et (3.4) prouvent que

3.5 $$\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{2\pi}(S'_{n_i}-U'_{n_i})^2dx\leqslant 3\pi C_q\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu^2<\infty.$$

D'après un théorème de M. Kolmogoroff, la suite $\{S'_{n_i}(f,x)\}$ converge presque partout. Il en résulte, en vertu de (3.5), la convergence presque partout de la suite $\{U'_{n_i}(f,x)\}$. Pour f' pair la démonstration est analogue.

§ 4.

Théorème 4. *Si $f\in A^p$ $(1<p<\infty)$, alors*

4.1 $$\lim_{n\to\infty}|U_n'(f,x)-f'(x)|_p=0.$$

Nous allons établir d'abord cinq lemmes.

Lemme 1. *Si la fonction $g(x)\in L^p$ $(1<p<\infty)$ et si*

$$S(g)=\sum_{\nu=1}^{\infty}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

4.2 $$S_{i,j}(x)=S_{i,j}(g,x)=\sum_{\nu=i+1}^{j}(a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x),$$

$$\overline{S}_{i,j}(x)=\overline{S}_{i,j}(g,x)=\sum_{\nu=i+1}^{j}(a_\nu\sin\nu x-b_\nu\cos\nu x),$$

alors il existe une constante C_p telle que

4.3 $$|S_{i,j}(g,x)|_p\leqslant C_p|g|_p,\quad |\overline{S}_{i,j}(g,x)|_p\leqslant C_p|g|_p.$$

Ce résultat est connu; il est dû à M. M. Riesz [8]).

---

[8]) M. Riesz [1] p. 218.

Lemme 2. *Si* $f \in A^p$ $(1<p<\infty)$, *alors*

$$|f - S_n(f)|_p \leqslant n^{-1} C_p |f'|_p. \tag{4.4}$$

Soit $S(f') = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu(x)$, où $A_\nu(x) = a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x$; posons $\bar{A}_\nu(x) = a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x$; alors

$$S(f) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\bar{A}_\nu(x)}{\nu}; \tag{4.5}$$

on a donc

$$f - S_n(x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\bar{A}_\nu(x)}{\nu} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\bar{S}_{n,\nu}(x)}{\nu(\nu+1)}. \tag{4.6}$$

En appliquant au second membre de (4.6) l'inégalité de Minkowski[9]), on trouve

$$|f - S_n|_p \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} |\bar{S}_{n,\nu}|_p \tag{4.7}$$

et, en vertu de (4.3),

$$|f - S_n|_p \leqslant C_p |f'|_p \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \leqslant n^{-1} C_p |f'|_p. \tag{4.8}$$

Lemme 3. $S_n(x)$ *désignant un polynôme d'ordre n au plus et* $S'_n(x)$ *sa dérivée, on a l'inégalité*

$$|S'_n|_p \leqslant n |S_n|_p. \tag{4.9}$$

Cette proposition est due à M. A. Zygmund[10]).

Lemme 4. *Si la fonction* $h(t)$*, absolument continue et de période* 2π*, admet une dérivée* $h'(x) \in L^p$ $(1<p<\infty)$*, alors il existe une constante* A_p*, telle que*

$$\int_0^{2\pi} |h(t)|^p d\varphi_n(t) \leqslant |h|_p^p + n^{-1} A_p |h'|_p \cdot |h|_p^{p-1}. \tag{4.10}$$

En effet

$$\int_0^{2\pi} |h(t)|^p d\varphi_n(t) = \int_0^{2\pi} |h(t)|^p d(\varphi_n(t) - t) + \int_0^{2\pi} |h(t)|^p dt. \tag{4.11}$$

---

[9]) Voir p. ex. Hardy, Littlewood et Pólya [1] p. 30.

[10]) Zygmund [2] p. 392.

En intégrant par parties le premier terme du coté droit, on trouve

$$\left| \int_0^{2\pi} |h(t)|^p d(\varphi_n(t) - t) \right| \leqslant \frac{2\pi}{2n+1} p \int_0^{2\pi} |h'(t)| \cdot |h^{p-1}(t)| dt \tag{4.12}$$

et en appliquant l'inégalité de Hölder,

$$\left| \int_0^{2\pi} |h(t)|^p d(\varphi_n(t) - x) \right| \leqslant n^{-1} A_p |h|_p^{p-1} |h'|_p \tag{4.13}$$

avec $A_p \leqslant \pi p$. Les formules (4.11) et (4.13) donnent (4.10).

En posant $h(t) = S_n(t)$, où $S_n(t)$ désigne un polynôme au plus d'ordre n, et en appliquant l'inégalité (4.9), on trouve le

Lemme 5[11]).

$$\left(\int_0^{2\pi} |S_n(t)|^p d\varphi_n(t) \right)^{1/p} \leqslant A'_p |S_n|_p, \text{ où } A'_p \leqslant (1 + \pi p)^{1/p}. \tag{4.14}$$

Ces lemmes étant établis nous allons démontrer le théorème. On a

$$|U_n(f,x) - S_n(f,x)|_p = \int_0^{2\pi} P_n(f,x) g(x) dx, \tag{4.15}$$

où $P_n(x) = U_n - S_n$ et g désigne une fonction telle que $|g|_q = 1$, $1/p + 1/q = 1$. En partant de (4.15) on obtient

$$\begin{aligned} &|U_n(f,x) - S_n(f,x)|_p \\ &= \int_0^{2\pi} g(x) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{f(t) - S_n(f,t)\} D_n(x-t) d\varphi_n(t) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \{f(t) - S_n(f,t)\} S_n(g,t) d\varphi_n(t) \\ &\leqslant \left(\int_0^{2\pi} |f(t) - S_n(f,t)|^p d\varphi_n(t) \right)^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} |S_n(g,t)|^q d\varphi_n \right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

---

[11]) Cette inégalité est connue; voir Marcinkiewicz [2].

Les formules (4.10), (4.4), (4.14) et (4.2) donnent

4.17 $$|U_n(f,x)-S_n(f,x)|_p$$
$$\leqslant n^{-1}[C_p+A_p(1+C_p)C_p^{p-1}]^{1/p}|f'|_p A'_q C_q \leqslant B_p|f'|_p n^{-1},$$

où B_p désigne une constante. En vertu de (4.17) et (4.9), il vient

4.18 $$|U'_n(f,x)-S'_n(f,x)|_p \leqslant B_p|f'|_p.$$

Pour en tirer la formule (4.1), il suffit de poser $f'=f'_1+f'_2$, où $|f'_1|_p<\varepsilon$ et f_2 désigne un polynôme.

§ 5.

Théorème 5. *Soit* $f\in A^p$ $(1<p\leqslant 2)$,

$$U'_n(f,x)=\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x);$$

alors il existe une constante A_p *telle que*

5.1 $$\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu^{(n)}|^q+|b_\nu^{(n)}|^q\Big)^{1/q}\leqslant A_p|f'|_p \qquad ({}^1/_p+{}^1/_q=1).$$

Réciproquement, si $f\in A$ *et si l'on a, pour une constante* M,

5.2 $$\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu^{(n)}|^p+|b_\nu^{(n)}|^p\Big)^{1/p}\leqslant M \qquad (n=1,2,\ldots),$$

alors $f\in A^q$ *et*

5.3 $$|f'|_q\leqslant A_p M.$$

Ce théorème résulte du théorème connu de MM. Young et Hausdorff [12]) à l'aide du

Lemme. *Si la condition* (5.2) *est vérifiée* (*pour* $1\leqslant p<\infty$), *on a*

5.4 $$\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\Big)^{1/p}\leqslant M,$$

où

$$S(f')=\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x+b_\nu\sin\nu x.$$

D'autre part, la série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^p+|b_\nu|^p$$

[12]) Voir p. ex. Zygmund [1] p. 200—201.

étant supposée convergente, il existe une constante A_p *telle que*

5.5 $$\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu^{(n)}|^p+|b_\nu^{(n)}|^p\Big)^{1/p}\leqslant A_p\Big(\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\Big)^{1/p} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Démonstration. La formule (5.2) donne pour chaque couple (n_0, n), $n_0\leqslant n$

5.6 $$\sum_{\nu=1}^{n_0}|a_\nu^{(n)}|^p+|b_\nu^{(n)}|^p\leqslant M^p,$$

et comme $\lim_{n\to\infty}a_\nu^{(n)}=a_\nu$, $\lim_{n\to\infty}b_\nu^{(n)}=b_\nu$, il en résulte

5.7 $$\sum_{\nu=1}^{n_0}|a_\nu|^p+|b_\nu|^p\leqslant M^p;$$

en passant à la limite on obtient (5.4)

Pour $p=1$ on a d'une façon évidente d'après (0.7)

$$\sum_{\nu=1}^{n}|a_\nu^{(n)}|+|b_\nu^{(n)}|\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}|a_\nu|+|b_\nu|,$$

nous supposons donc $p>1$. En appliquant les formules (0.7) on trouve

5.8 $$|a_i^{(n)}|^p\leqslant\Big(|b_i|+n\sum_{t=1}^{\infty}\frac{|b_{t(2n+1)\pm i}|}{t(2n+1)\pm i}\Big)^p$$
$$\leqslant\Big(|b_i|^p+\sum_{t=1}^{\infty}|b_{t(2n+1)\pm i}|^p\Big)\Big(1+2\sum_{t=1}^{\infty}\frac{1}{t^q}\Big)^{p/q},$$

donc

5.9 $$|a_i^{(n)}|^p\leqslant A_p^p\Big\{|b_i|^p+\sum_{t=1}^{\infty}|b_{t(2n+1)\pm i}|^p\Big\};$$

on trouve de même

5.10 $$|b_i^{(n)}|^p\leqslant A_p^p\Big\{|a_i|^p+\sum_{=1}^{\infty}|a_{t(2n+1)\pm i}|^p\Big\}.$$

En faisant la somme des formules (5.9) et (5.10) pour $i=1,2,\ldots,n$, on obtient (5.5).

§ 6.

Les considérations précédentes font ressortir une grande analogie entre les suites $\{S'_n(f,x)\}$ et $\{U'_n(f,x)\}$. Il nous paraît fort intéressant de trouver quelques conditions non banales de l'équiconvergence de ces deux suites; nous ne connaissons aucune. Par application directe des formules (0.7), on trouve les théorèmes:

Théorème 6. *Si les coefficients de la série $S(f')$ sont d'ordre $o(n^{-1})$, alors on a uniformément*

6.1 $$S'_n(f,x) - U'_n(f,x) \to 0.$$

Théorème 7. *Si la série $S(f')$ est lacunaire, alors la relation* (6.1) *subsiste uniformément*[13]).

Remarquons qu'en général ces deux suites ne sont pas équiconvergentes; on a le

Théorème 8. *Il existe une fonction $f \in A^2$, dont la série $S(f')$ converge dans le point $x=0$ et la suite $U'_n(f,0)$ diverge.*

Pour le prouver, posons

6.2 $$f'_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\{\cos(t(4n+1)+k)x - \cos(t(4n+1)-k)x\};$$

on aura d'une façon évidente

6.3 $$\int_0^{2\pi} f_n'^2\,dx < 2\pi \quad \text{et} \quad |S_p(f_n,0)| \leqslant 1 \qquad (p=1,2,\ldots)$$

et d'autre part

6.4 $$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{\sin(t(4n+1)+k)x}{t(4n+1)+k} - \frac{\sin(t(4n+1)-k)x}{t(4n+1)-k}\right);$$

considérons $U'_{2n}(f,0)$; on a

6.5 $$a_k^{(2n)} = \frac{k}{n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{t(2n+1)+k} + \frac{1}{t(2n+1)-k}\right) \quad (n<k\leqslant 2n),$$
$$a_k^{(2n)} = 0 \qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

c'est à dire

6.6 $$U'_n(f,0) = \sum_{\nu=1}^{2n} a_\nu^{(2n)} \geqslant 2\sum_{k=n+1}^{2n}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t(2n+1)+k}$$
$$\geqslant 2n\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t(4n+1)} \geqslant \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\frac{1}{t} \geqslant A\log n.$$

Pour en tirer notre théorème, il suffit de poser

$$f = \sum \log^{-1/2} n_i f_{n_i}(x),$$

la suite $\{n_i\}$ étant croissante assez rapidement. On prouve que la fonction ainsi définie vérifie les conditions du théorème.

[13]) On vérifie de même que la condition $\sum n(a_n^2 + b_n^2) < \infty$ entraîne uniformément (6.1).

§ 7.

Soit $f(x) \in A$

7.1 $$U'_{n,i}(f,x) = U'_{n,i}(x) = \sum_{\nu=1}^{i}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x + b_\nu^{(n)}\sin\nu x),$$
$$V'_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U'_{n,i}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\partial}{\partial x}K_n(x-t)\,d\varphi_n(t),$$

où $K_n(u)$ désigne l'expression $\dfrac{\sin^2(n+1)u/2}{2(n+1)\sin^2 u/2}$; nous allons prouver le

Théorème 9. *Si $f(x) \in A$, alors la suite $V'_n(f,x)$ converge presque partout vers $f'(x)$, en particulier il en est ainsi dans chaque point x où*

7.2 $$\int_0^h |f'(x+t) - f'(x)|\,dt = o(h).$$

Démonstration. Supposons que dans un point x on ait (7.2) et admettons $f(x) = f'(x) = 0$. Alors

7.3 $$V_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\partial}{\partial x}K_n(x-t)\,d\varphi_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{x-1/n} + \frac{1}{\pi}\int_{x-1/n}^{x+1/n} + \frac{1}{\pi}\int_{x+1/n}^{2\pi}$$
$$= A_n + B_n + C_n.$$

D'une façon évidente $B_n \to 0$. Évaluons C_n:

7.4 $$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{x+1/n}^{x+\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{x+\delta}^{2\pi} = C'_n + C''_n;$$

δ étant fixé, on a

7.5 $$C''_n \to 0;$$

d'autre part

7.6 $$C'_n = \frac{1}{\pi}\int_{x+1/n}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin(n+1)(x-t)}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t)$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_{x+1/n}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin^2(n+1)\frac{x-t}{2}}{2(n+1)\sin^3\frac{x-t}{2}}\cos\frac{x-t}{2}\,d\varphi_n(t) = \gamma_n + \gamma'_n$$

et l'on voit sans peine que $\gamma'_n \to 0$, tandis que

7.7 $$\gamma_n = \frac{1}{\pi}\int_{x+1/n}^{x+\delta} f(t)\,\frac{\sin(n+{}^1/_2)(x-t)}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t) + o(1)$$

$$= \frac{1}{\pi}\sin(n+{}^1/_2)\,x\int_{x+1/n}^{x+\delta} f(t)\,\frac{\cos(n+{}^1/_2)\,t}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t) + o(1)$$

Or, on a

7.8 $$\int_{x+1/n}^{x+\delta} f(t)\,\frac{\cos(n+{}^1/_2)\,t}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t)$$

$$= \left|\int_{x+1/n}^{u} f(t)\cos(n+{}^1/_2)t\;d\varphi_n(t)\,\frac{1}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\right|_{x+1/n}^{x+\delta}$$

$$-\int_{x+1/n}^{x+\delta}\int_{x+1/n}^{u} f(t)\cos(n+{}^1/_2)\,t\,d\varphi_n(t)\,\frac{\cos\frac{x-u}{2}}{4\sin^3\frac{x-u}{2}}\,du,$$

donc

7.9 $$\left|\int_{x+1/n}^{x+\delta} f(t)\,\frac{\cos(n+{}^1/_2)\,t}{4\sin^2\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t)\right|$$

$$\leqslant o(1) + \frac{2\pi}{2n+1}\int_{x+1/n}^{x+\delta}\left|\int_{x}^{x+u}|f'(t)|\,dt\right|\left|\frac{du}{4\sin^3\frac{x-t}{2}}\right|$$

$$\leqslant o(1) + 8\,\frac{2\pi}{2n+1}\cdot\max\frac{1}{h}\int_0^h|f'(x+t)|\,dt\int_{x+1/n}^{t+\delta}\frac{dt}{(x-t)^2}$$

$$\leqslant o(1) + A\,.\max\frac{1}{h}\int_0^h|f'(x+t)|\,dt,$$

où A désigne une constante absolue. Il en résulte, d'après les formules (7.7), (7.6), (7.3), (7.4) et (7.5),

7.10 $$C_n \to 0.$$

On prouve de même que $A_n \to 0$.

§ 8.

En appliquant le résultat obtenu dans le paragraphe précédent, on démontre le

Théorème 10. *Si, dans un ensemble E de mesure positive,*

8.1 $$S^*(x) = \limsup_{n\to\infty}\; U_n'(f,x) < +\infty,$$

alors on y a presque partout

8.2 $$S_*(x) = \liminf_{n\to\infty}\; U_n'(f,x) > -\infty,$$

8.3 $$S^*(x) + S_*(x) = 2f'(x).$$

La démonstration est tout à fait semblable à celle d'un théorème analogue dans la théorie des séries de Fourier[14]), il faut seulement remplacer partout les sommes de Fejér par les polynômes $V_n'(f,x)$.

[14]) Voir Marcinkiewicz et Zygmund [1] et Marcinkiewicz [2].

Bibliographie.

D. Jackson, [1], The Theory of Approximation, New York (1930).

G. Hardy, J. Littlewood and G. Pólya, [1], Inequalities, Cambridge (1934).

J. Marcinkiewicz, [1], Wielomiany interpolacyjne funkcyj bezwzględnie ciągłych, Wiadomości Matematyczne 35 (1935).

J. Marcinkiewicz, [2], Sur l'interpolation (I), Studia Math. 6 (1936).

M. Riesz, [1], Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr. 27 (1928).

L. Tonelli, [1], Serie Trigonometriche, Bologna (1928).

A. Zygmund, [1], Trigonometrical Series, Warszawa (1935).

[2], A remark on conjugate series, Proc. Lond. Math. Soc. 34 (1932).

J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, [1], On the differentiability of functions and summability of trigonometrical series, Fund. Math. 26 (1936), p. 1—43.

(Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1936).