Sur les fonctions indépendantes (II) [1]

(La loi exponentielle; la divergence de séries)

par

M. KAC et H. STEINHAUS (Lwów).

Cette communication contient deux propositions sur les fonctions indépendantes. La première correspond à un théorème connu de M. Lindeberg [2]), la deuxième concerne la divergence de série de fonctions indépendantes. Notre méthode ressemble à celle de M. Bernstein [3]), mais elle est plus simple.

Définition. Les fonctions $\varphi_k(x)$ $(k=1,2,..;\ 0\leqslant x\leqslant 1)$ sont *également intégrables* s'il existe pour chaque $\varepsilon>0$ un nombre $M(\varepsilon)$ tel que l'on ait

$$\Big|\int\limits_{\underset{x}{E}(|\varphi_k(x)|>M)}\varphi_k(x)\,dx\Big|<\varepsilon \qquad (k=1,2,..).$$

Théorème 1. *Si* $\{f_k(x)\}$ *est une suite de fonctions indépendantes, si en outre*

$$\int\limits_0^1 f_k(x)\,dx=0 \qquad (k=1,2,..), \tag{1}$$

[1]) M. Kac, Sur les fonctions indépendantes (I), Stud. Math. 6 (1936) p. 46—58.

[2]) I. W. Lindeberg, Eine Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. 15 (1922) p. 211—225. Voir aussi A. Khintchine, Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ergebnisse der Mathematik, Berlin 1934.

[3]) S. Bernstein, Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes, Math. Ann. 97 (1927) p. 1—59; chapitre I.

$$\int_0^1 f_k^2(x)\,dx = 1 \qquad (k=1,2,..), \tag{2}$$

et si les $f_k^2(x)$ *sont également intégrables, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \underset{x}{E}\left(\alpha < (2n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) < \beta\right) \right| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt. \tag{3}$$

Lemme 1. Si $\{F_n(x)\}$ est une suite de fonctions mesurables, définies dans $\langle 0,1\rangle$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(v) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 e^{ivF_n(x)} dx = f(v) \tag{4}$$

uniformément en v, et

$$\mathcal{I}(f(v)) = 0 \text{ [4]}, \tag{5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(v)|\,dv < \infty, \tag{6}$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} \left| \underset{x}{E}(\alpha < F_n(x) < \beta) \right| = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\beta v - \sin\alpha v}{v} f(v)\,dv. \tag{7}$$

Démonstration. Pour établir ce lemme, introduisons $\psi(x)$, la fonction caractéristique de l'intervalle $\langle\alpha,\beta\rangle$; soit ε un nombre positif assez petit. Définissons les fonctions auxiliaires $\psi_1(x)$ et $\psi_2(x)$, admettant des dérivées continues jusqu'au deuxième ordre, de manière que:

$\psi_1(x) = 0$ pour $x \leqslant \alpha$, $x \geqslant \beta$, $\quad \psi_2(x) = 0$ pour $x \leqslant \alpha - \varepsilon$, $x \geqslant \beta + \varepsilon$,
$\psi_1(x) = 1$ pour $\alpha + \varepsilon \leqslant x \leqslant \beta - \varepsilon$, $\quad \psi_2(x) = 1$ pour $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$,
$0 < \psi_1(x) < 1$, $\quad 0 < \psi_2(x) < 1$.

Nous aurons évidemment

$$\psi_1(x) \leqslant \psi(x) \leqslant \psi_2(x),$$

donc

$$\int_0^1 \psi_1(F_n(x))\,dx \leqslant \int_0^1 \psi(F_n(x))\,dx = \left|\underset{x}{E}(\alpha < F_n(x) < \beta)\right| \leqslant \int_0^1 \psi_2(F_n(x))\,dx. \tag{8}$$

[4]) $\mathcal{I}z$ désigne la partie imaginaire de z.

La formule de Fourier

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dv \int_\alpha^\beta \psi_1(t)\cos v(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\mathcal{R}\int_0^\infty \left[e^{ivx}\int_\alpha^\beta \psi_1(t)\,e^{-ivt}dt\right]dv \text{ [5]}$$

est valide; on en tire, en remplaçant le paramètre x par $F_n(x)$,

$$\int_0^1 \psi_1(F_n(x))\,dx = \frac{1}{\pi}\mathcal{R}\int_0^\infty \Phi_n(v)\left[\int_\alpha^\beta \psi_1(t)\,e^{-ivt}dt\right]dv, \tag{9}$$

où

$$\Phi_n(v) = \int_0^1 e^{ivF_n(x)}dx$$

et l'interversion des intégrations est justifiée par les rélations

$$|\Phi_n(v)| \leqslant 1, \quad \int_\alpha^\beta \psi_1(t)\,e^{-ivt}dt = O\left(\frac{1}{v^2}\right);$$

les mêmes rélations et (4) permettent de voir sans peine que (9) implique

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \psi_1(F_n(x))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\left[\int_\alpha^\beta \psi_1(t)\cos vt\,dt\right]dv. \tag{10}$$

On obtient de la même manière la formule

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \psi_2(F_n(x))\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon} \psi_2(t)\cos vt\,dt\right]dv. \tag{11}$$

(8), (10) et (11) donnent

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\left[\int_\alpha^\beta \psi_1(t)\cos vt\,dt\right]dv \leqslant \underline{\lim}\left|\underset{x}{E}(\alpha < F_n(x) < \beta)\right| \leqslant \overline{\lim}\left|\underset{x}{E}(\alpha < F_n(x) < \beta)\right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon}\psi_2(t)\cos vt\,dt\right]dv; \tag{12}$$

or, les inégalités

[5]) $\mathcal{R}z$ désigne la partie réelle de z.

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\,\frac{\sin\beta v-\sin\alpha v}{v}\,dv-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\left[\int_\alpha^\beta\psi_1(t)\cos vt\,dt\right]dv\right|\leqslant\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty|f(v)|\,dv,$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\,\frac{\sin\beta v-\sin\alpha v}{v}\,dv-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(v)\left[\int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon}\psi_2(t)\cos vt\,dt\right]dv\right|\leqslant\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty|f(v)|\,dv$$

sont vraies pour tous les ε positifs, ce qui conduit avec (12) à la thèse du lemme.

Lemme 2. Si la limite $f(v)$ de $\Phi_n(v)$ est nulle pour les v non nuls et si la convergence est uniforme dans chaque intervalle fini qui ne contient pas le point $v=0$, alors on a

$$\lim_{n\to\infty}|\underset{x}{E}(|F_n(x)|<M)|=0$$

quel que soit M. Il est clair que la suite $\{F_n(x)\}$ est divergente presque partout.

La démonstration n'est qu'un remaniement facile de la démonstration du lemme 1.

Lemme 3. Si

$$\int_0^1\varphi(x)\,dx=0\quad\text{et}\quad\int_0^1\varphi^2(x)\,dx=1,$$

alors

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 e^{iv\varphi(x)/\sqrt{2n}}dx\right]^n=e^{-\frac{v^2}{4}}. \tag{13}$$

Démonstration. Soit

$$F(v,x)=e^{iv\varphi(x)/\sqrt{2n}}dx=\cos v\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}}+i\sin v\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}};$$

les formules

$$\cos y=1-\frac{y^2}{2}\cos(\vartheta_1(y)y)\quad(0\leqslant\vartheta_1(y)\leqslant1),$$

$$\sin y=y-\frac{y^2}{2}\sin(\vartheta_2(y)y)\quad(0\leqslant\vartheta_2(y)\leqslant1)$$

donnent

$$F(v,x)=1+\frac{iv\varphi(x)}{\sqrt{2n}}-\frac{v^2\varphi^2(x)}{4n}\left\{\cos\left[\vartheta_1(v,x)\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}}\right]+i\sin\left[\vartheta_2(v,x)\frac{v\varphi(x)}{\sqrt{2n}}\right]\right\},$$

$$\int_0^1F(v,x)\,dx=1-\frac{v^2}{4n}\int_0^1\varphi^2(x)\left\{\cos\left[\vartheta_1(v,x)\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}}\right]+i\sin\left[\vartheta_2(v,x)\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}}\right]\right\}dx.$$

Or,

$$\lim_{n\to\infty}\cos\left[\vartheta_1(v,x)\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}}\right]=1\quad\text{et}\quad\lim_{n\to\infty}\sin\left[\vartheta_2(v,x)\frac{\varphi(x)}{\sqrt{2n}}\right]=0$$

presque partout, donc, $\sin y$ et $\cos y$ étant bornés, on a, d'après un théorème connu,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\varphi^2(x)\left\{\cos\left[\vartheta_1(v,x)\frac{v\varphi(x)}{\sqrt{2n}}\right]+i\sin\left[\vartheta_2(v,x)\frac{v\varphi(x)}{\sqrt{2n}}\right]\right\}dx=\int_0^1\varphi^2(x)\,dx=1,$$

et nous voyons en même temps que la convergence est uniforme par rapport à v. Nous pouvons donc écrire

$$\int_0^1 e^{iv\varphi(x)/\sqrt{2n}}dx=1-\frac{v^2}{4n}(1+\varepsilon_n(v)),\quad\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n(v)=0;$$

la convergence étant uniforme, on en déduit (13). Ainsi le lemme 3 est démontré. Il est aisé de voir qu'un raisonnement tout à fait analogue conduit à la généralisation suivante du lemme démontré:

Lemme 4. Si

$$\int_0^1\varphi_k(x)\,dx=0,\quad\int_0^1\varphi_k^2(x)\,dx=1\qquad(k=1,2,..)$$

et si les $\varphi_k^2(x)$ sont également intégrables, alors

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{l=1}^n\int_0^1 e^{iv\varphi_k(x)/\sqrt{2n}}dx=e^{-\frac{v^2}{4}}. \tag{14}$$

Démonstration du théorème 1. Posons

$$F_n(x) = (2n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} f_k(x);$$

les fonctions $f_k(x)$ étant indépendantes, on a

(15) $$\Phi_n(v) = \int_0^1 e^{ivF_n(x)} dx = \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 e^{ivf_k(x)/\sqrt{2n}} dx.$$

Remarquons maintenant que l'intégrale (7) pour $f(v) = e^{-\frac{v^2}{4}}$ peut être évaluée grâce à la formule classique

(16) $$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \beta v - \sin \alpha v}{v} e^{-\frac{v^2}{4}} dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt;$$

(7), (14), (15) et (16) fournissent la thèse (3) du théorème 1.

Remarque 1. Pour établir le théorème classique de Laplace, définissons les fonctions

$$\varrho_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant p \\ 0, & p < x \leqslant 1 \end{cases}, \quad \varrho_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant p^2,\ p \leqslant x \leqslant p + pq \\ 0, & p^2 < x < p,\ p + pq < x \leqslant 1 \end{cases} \text{ etc. } (p + q = 1).$$

Le théorème de Laplace équivaut à la proposition suivante:

$$\lim_{n \to \infty} |\underset{x}{E}(np + \alpha\sqrt{2npq} < \sum_{k=1}^{n} \varrho_k(x) < np + \beta\sqrt{2npq})| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt.$$

Posons $\mu_k(x) = \dfrac{\varrho_k(x) - p}{\sqrt{pq}}$; les fonctions $\mu_k(x)$ sont indépendantes, uniformément bornées et

$$\int_0^1 \mu_k(x)\, dx = 0, \quad \int_0^1 \mu_k^2(x)\, dx = 1.$$

En appliquant le théorème 1 à ces fonctions, nous obtenons le théorème de Laplace.

Remarque 2. On peut donner au théorème 1 la forme (moins générale) suivante:

Soit $f(x)$ une fonction définie dans $\langle 0, 1 \rangle$ telle que

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 0, \quad \int_0^1 f^2(x)\, dx = 1;$$

la mesure (n-dimensionnelle), de l'ensemble E_n de points $P(t_1, .. t_n)$ $(0 \leqslant t_k \leqslant 1)$ pour lesquels les inégalités

$$\alpha < (2n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) < \beta$$

ont lieu, tend vers $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_\alpha^\beta e^{-t^2} dt$, quand n tend vers ∞.

En effet, en introduisant les fonctions $\vartheta_n(x)$ de M. Steinhaus[6]), nous aurons

$$|E_n| = |\underset{x}{E}(\alpha < (2n)^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} f(\vartheta_k(x)) < \beta)|,$$

et les fonctions $f(\vartheta_k(x))$ sont indépendantes et remplissent les conditions du théorème 1. Cette interprétation donne en particulier le théorème suivant:

La probabilité que la "somme Riemanienne" $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)$, où les $t_1, t_2, .. t_k$ sont choisis au hasard, approche $\int_0^1 f(x)\, dx$ avec une erreur moindre que $\alpha/\sqrt{n}$, tend vers $2/\sqrt{\pi} \displaystyle\int_0^{\alpha/\sqrt{2}} e^{-t^2} dt$, quand n tend vers ∞.

Théorème 2. *Si $\{f_k(x)\}$ est une suite de fonctions indépendantes, qui remplit les conditions du théorème 1 et si*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} c_k = 0\ ^{7}),$$

alors la série

(17) $$\sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)$$

diverge presque partout.

Démonstration. Quand on pose

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x),$$

---

[6]) Loc. cit. [1]), p. 51—52.

[7]) Cette condition n'est essentielle que pour notre démonstration; quand elle n'est pas remplie, le terme général de (17) ne tend vers zéro que dans un ensemble de mesure nulle, ce qui implique la thèse.

on peut écrire

$$\int_0^1 e^{ivF_n(x)}dx = \prod_{k=1}^{n} \int_0^1 e^{ivc_k f_k(x)}dx$$

et un raisonnement tout à fait analogue à la démonstration du lemme 3 donne immédiatement la divergence uniforme en v ($|v| > \varepsilon$) vers 0 du produit au second membre (on utilise ici le fait que le produit $\prod_{k=1}^{\infty}(1-a_k^2)$ est nul si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \infty$ et $a_k \to 0$); d'après le lemme 2 nous obtenons la divergence presque partout de $\{F_n(x)\}$ et par là celle de la série (17).

(Reçu par la Rédaction le 10. 2. 1936).