Sur les fonctions indépendantes (I)

(Propriétés générales)

par

M. KAC (Lwów).

Ce travail a pour but le développement systématique des idées de M. H. STEINHAUS contenues dans son travail „Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure“ [1]). Dans ce travail M. STEINHAUS a montré entre autres que les théorèmes sur la convergence de séries orthogonales de M. H. RADEMACHER répondent à la question, quelle est la probabilité de la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \pm c_n$ quand les signes $\pm$ sont choisis au hasard avec une probabilité égale. Cette probabilité est égale à la mesure de l'ensemble où la série de M. RADEMACHER [2]) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ est convergente, c'est-à-dire à 1 si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$, à 0 dans le cas contraire. Cette importante remarque a permis de résoudre d'autres problèmes relatifs aux probabilités dénombrables par leur réduction à la théorie des systèmes orthogonaux [3]).

[1]) Fund. Math. 4 (1923) p. 287—310.

[2]) H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922) p. 112—138; spécialement Chap. VI.

[3]) a) H. Steinhaus, Sur la probabilité de la convergence de séries, Studia Math. 2 (1930) p. 21—39; b) A. Khintchine u. A. Kolmogoroff, Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Recueil Math. de Moscou 32 (1925) p. 668—677; c) A. Rajchman, Prawo wielkich liczb, Mathesis Polska 6 (1931) p. 66—74 et Zaostrzone prawo wielkich liczb, Mathesis Polska 6 (1931) p. 145—161 (en polonais).

On doit à M. STEINHAUS une définition de l'indépendance des fonctions, en nombre fini ou infini. D'après cette définition que nous publions ici, certains systèmes orthogonaux introduits par M. STEINHAUS lui-même [4]) et par d'autres auteurs, tels que le système $\{e^{2\pi i \vartheta_n}\}$ et celui de M. RADEMACHER, sont constitués par des fonctions indépendantes.

Certains théorèmes, que nous démontrerons dans la suite, correspondent aux théorèmes connus du calcul des probabilités, mais nous en donnerons des démonstrations plus simples. Il nous semble aussi que les resultats obtenus ne sont pas sans intérêt pour la théorie des systèmes orthogonaux.

1. Les fonctions, dont nous parlerons dans la suite, sont supposées définies et mesurables dans l'intervalle $\langle 0, 1 \rangle$. Soit $f(x)$ une telle fonction; nous désignons par E_f chaque ensemble de la forme

$$\underset{x}{E}\{\alpha < f(x) < \beta\}, \quad \underset{x}{E}\{\alpha \leqslant f(x) < \beta\} \quad \text{etc.}$$

Définition 1. *Les fonctions $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ sont indépendantes (au sens de* M. STEINHAUS) *si*

$$|E_{f_1} \times \ldots \times E_{f_k}| = |E_{f_1}| \ldots |E_{f_k}|$$

pour tous les ensembles $E_{f_1}, \ldots, E_{f_k}$.

Définition 2. *Les fonctions $f_i(x)$ $(i = 1, 2 \ldots)$ forment une suite de fonctions indépendantes, si chaque système fini de ces fonctions est composé des fonctions indépendantes au sens de la définition 1.*

Lemme 1. *Si les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont indépendantes et si l'intégrale $\int_0^1 f_2(x)\,dx$ existe, alors*

$$\int_{E_{f_1}} f_2(x)\,dx = |E_{f_1}| \cdot \int_0^1 f_2(x)\,dx.$$

Soit

$$E_{f_2}^{(k,n)} = \underset{x}{E}\left\{\frac{k}{n} \leqslant f_2(x) < \frac{k+1}{n}\right\} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots),$$

[4]) Loc. cit. [3a]).

alors

$$\int\limits_{E_{f_1}} f_2(x)\,dx = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-mn}^{mn} |E_{f_1}\times E_{f_2}^{(k,n)}|\,\frac{k}{n}$$

$$= |E_{f_1}|\,.\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-mn}^{mn} |E_{f_2}^{(k,n)}|\,\frac{k}{n} = |E_{f_1}|\,.\int\limits_0^1 f_2(x)\,dx.$$

Lemme 2. *Si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont indépendants et si les intégrales*

$$\int\limits_0^1 f_1(x)\,dx,\quad \int\limits_0^1 f_2(x)\,dx \quad et \quad \int\limits_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx$$

existent, alors

$$\int\limits_0^1 f_1(x) f_2(x)\,dx = \int\limits_0^1 f_1(x)\,dx\,.\int\limits_0^1 f_2(x)\,dx.$$

En effet, on a

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\Big|\int\limits_0^1 f_1(x)f_2(x)\,dx - \sum_{k=-mn}^{mn}\frac{k}{n}\int\limits_{E_{f_2}^{(k,n)}} f_1(x)\,dx\Big|$$

$$= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\Big|\sum_{k=-mn}^{mn}\int\limits_{E_{f_2}^{(k,n)}} f_1(x)\Big[f_2(x)-\frac{k}{n}\Big]\,dx\Big| = 0,$$

car

$$\Big|\sum_{k=-mn}^{mn}\int\limits_{E_{f_2}^{(k,n)}} f_1(x)\Big[f_2(x)-\frac{k}{n}\Big]\,dx\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=-mn}^{mn}\int\limits_{E_{f_2}^{(k,n)}} |f_1(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{n}\int\limits_0^1 |f_1(x)|\,dx;$$

or, d'après le lemme 1,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=-mn}^{mn}\frac{k}{n}\int\limits_{E_{f_2}^{(k,n)}} f_1(x)\,dx = \int\limits_0^1 f_1(x)\,dx\,.\int\limits_0^1 f_2(x)\,dx.$$

De même, si les fonctions $f_1(x),\dots,f_k(x)$ sont indépendantes et si les intégrales

$$\int\limits_0^1 f_i(x)\,dx,\quad \int\limits_0^1 f_1(x)\dots f_i(x)\,dx \qquad (i=1,\dots k)$$

existent, on a

$$\int\limits_0^1 f_1(x)\dots f_k(x)\,dx = \int\limits_0^1 f_1(x)\,dx \dots \int\limits_0^1 f_k(x)\,dx.$$

Lemme 3. *Sous les hypothèses du lemme 2, nous avons*

$$\int\limits_{E_{f_1}} f_1(x) f_2(x)\,dx = \int\limits_{E_{f_1}} f_1(x)\,dx \int\limits_0^1 f_2(x)\,dx.$$

Soit, par exemple, $E_{f_1} = \underset{x}{E}\{\alpha \leqslant f_1(x) < \beta\}$. Posons

$$Z_r^{(n)} = \underset{x}{E}\Big\{\alpha + \frac{r(\beta-\alpha)}{n} \leqslant f_1(x) < \alpha + \frac{(r+1)(\beta-\alpha)}{n}\Big\} \quad (r=0,1,\dots,n-1).$$

Nous avons évidemment

$$E_{f_1} = \sum_{r=0}^{n-1} Z_r^{(n)},\quad Z_i^{(n)} Z_k^{(n)} = 0 \qquad (i \neq k)$$

et

$$\int\limits_{E_{f_1}} f_1(x) f_2(x)\,dx = \sum_{r=0}^{n-1}\int\limits_{Z_r^{(n)}} f_1(x) f_2(x)\,dx,$$

$$\Big|\int\limits_{Z_r^{(n)}} f_1(x) f_2(x)\,dx - \Big(\alpha + \frac{r(\beta-\alpha)}{n}\Big)\int\limits_{Z_r^{(n)}} f_2(x)\,dx\Big| \leqslant \frac{\beta-\alpha}{n}\int\limits_{Z_r^{(n)}} |f_2(x)|\,dx,$$

donc

$$\Big|\int\limits_{E_{f_1}} f_1(x) f_2(x)\,dx - \sum_{r=0}^{n-1}\Big(\alpha + \frac{r(\beta-\alpha)}{n}\Big)\int\limits_{Z_r^{(n)}} f_2(x)\Big| \leqslant \frac{\beta-\alpha}{n}\int\limits_0^1 |f_2(x)|\,dx.$$

En passant à la limite pour $n\to\infty$, nous obtenons en vertu du lemme 1

$$\int\limits_{E_{f_1}} f_1(x) f_2(x)\,dx = \int\limits_{E_{f_1}} f_1(x)\,dx\,.\int\limits_0^1 f_2(x)\,dx.$$

Lemme 4. *Si les fonctions $f_1(x),\dots,f_k(x)$ sont indépendantes, si les intégrales*

$$\int_0^1 f_j(x)\,dx \quad (j=1,2,\dots,k) \text{ et } \int_0^1 f_j(x)f_k(x)\,dx \quad (j=1,2,\dots,k-1)$$

existent et $Z=E_{f_1}\times\dots\times E_{f_{k-1}}$, *alors*

$$\int_Z f_j(x)f_k(x)\,dx = |E_{f_1}|\dots|E_{f_{j-1}}||E_{f_{j+1}}|\dots|E_{f_{k-1}}|\int_{E_{f_j}} f_j(x)dx\int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 3.

Dans certaines considérations on rencontre des ensembles définies par des inégalités simultanées

$$F_i(f_1(x),\dots,f_k(x))\leqslant d_i \quad (\geqslant d_i) \qquad (i=1,\dots,j),$$

les $F_i(x_1,\dots,x_k)$ étant continues. Il est assez facile de voir qu'un tel ensemble est une somme finie ou dénombrable d'ensembles disjoints de la forme $E_{f_i}\times\dots\times E_{f_k}$.

Remarquons aussi que si les fonctions $f_i(x)$ sont indépendantes et les fonctions $\Phi_i(x)$ continues (on peut supposer qu'elles sont seulement mesurables), alors les fonctions $\Phi_i(f_i(x))$ sont indépendantes.

2. Théorème 1. *Pour que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ soient indépendantes, il suffit (la nécessité est évidente d'après le lemme 2) que l'on ait*

$$(1)\qquad \int_0^1 e^{i(\xi f_1(x)+\eta f_2(x))}dx = \int_0^1 e^{i\xi f_1(x)}dx\,.\int_0^1 e^{i\eta f_2(x)}dx \quad (i=\sqrt{-1})$$

quels que soient les nombres réels ξ,η.

Démonstration. Montrons par exemple que

$$\left|\underset{x}{E}\{|f_1(x)|<M\}\times\underset{x}{E}\{|f_2(x)|<N\}\right| = \left|\underset{x}{E}\{|f_1(x)|<M\}\right|.\left|\underset{x}{E}\{|f_2(x)|<N\}\right|.$$

Remarquons d'abord que l'on peut supposer

$$(2)\qquad \left|\underset{x}{E}\{|f_1(x)|=M\}\right|=0 \text{ et } \left|\underset{x}{E}\{|f_2(x)|=N\}\right|=0,$$

car dans le cas contraire nous pouvons choisir deux suites $\{M_p\}$ et $\{N_p\}$ croissantes ($M_p\to M$, $N_p\to N$) et telles que

$$\left|\underset{x}{E}\{|f_1(x)|=M_p\}\right|=0 \text{ et } \left|\underset{x}{E}\{|f_2(x)|=N_p\}\right|=0.$$

Nous démontrerons le théorème pour M_p et N_p et, en passant à la limite pour $p\to\infty$, nous obtiendrons le théorème pour M et N.

On sait que

$$(3)\qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin M\xi}{\xi}e^{i\gamma\xi}d\xi = \begin{cases}1 & \text{pour } |\gamma|<M\\ \frac12 & \text{» } |\gamma|=M\\ 0 & \text{» } |\gamma|>M\end{cases};$$

il en résulte sans peine que

$$(4)\qquad \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin M\xi\sin N\eta}{\xi\eta}e^{i(\gamma_1\xi+\gamma_2\eta)}d\xi\,d\eta$$

$$=\begin{cases}1 \text{ pour } |\gamma_1|<M \quad |\gamma_2|<N\\ \frac12 \text{ » } |\gamma_1|<M \quad |\gamma_2|=N \text{ ou } |\gamma_1|=M \ |\gamma_2|<N\\ \frac14 \text{ » } |\gamma_1|=M \quad |\gamma_2|=N\\ 0 \text{ dans les autres cas.}\end{cases}$$

D'après (2), (3) et (4) nous avons

$$\left|\underset{x}{E}\{|f_1(x)|<M\}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin M\xi}{\xi}\left[\int_0^1 e^{i\xi f_1(x)}dx\right]d\xi,$$

$$\left|\underset{x}{E}\{|f_2(x)|<N\}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin N\eta}{\eta}\left[\int_0^1 e^{i\eta f_2(x)}dx\right]d\eta,$$

$$\left|\underset{x}{E}\{|f_1(x)|<M\}\times\underset{x}{E}\{|f_2(x)|<N\}\right|$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin M\xi\sin N\eta}{\xi\eta}\left[\int_0^1 e^{i(\xi f_1(x)+\eta f_2(x))}dx\right]d\xi\,d\eta;$$

en employant (1) nous obtenons notre théorème.

Si l'on suppose que $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont intégrables avec chaque puissance, il s'ensuit de même que (1) est équivalent à

$$(5)\qquad \int_0^1 f_1^k(x)f_2^l(x)\,dx = \int_0^1 f_1^k(x)\,dx\,.\int_0^1 f_2^l(x)\,dx$$

pour tous les k et l naturels [5]).

3. M. Steinhaus a introduit les fonctions $\vartheta_n(x)$ [6]) qui jouissent des propriétés suivantes:

[5]) Pour une classe de fonctions moins étendue, cette proposition a été obtenue par M. L. Kantorovitch (L'Enseignement Mathématique (1930) p. 18).

[6]) Loc. cit [3a]).

1. $0 \leqslant \vartheta_i(x) \leqslant 1$;
2. $|E_x\{\vartheta_i(x) \in L\}| = |L|$ $(i=1,2,\ldots;$ $L \subset \langle 0,1\rangle$ mesurable);
3. les fonctions $\vartheta_i(x)$ sont indépendantes.

Posons $\psi_n(x) = 2\vartheta_n(x) - 1$. Les fonctions $\psi_n(x)$ sont aussi indépendantes. Calculons par exemple

$$|E_x\{|\sum_{k=1}^n a_k\psi_k(x)| < t\}|.$$

Il est facile de voir, que

$$|E_x\{|\sum_{k=1}^n a_k\psi_k(x)| < t\}| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t\xi}{\xi}\left[\int_0^1 e^{i\xi\sum_{k=1}^n a_k\psi_k(x)}dx\right]d\xi,$$

car $\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t\xi}{\xi}e^{i\xi\sum_{k=1}^n a_k\psi_k(x)}d\xi$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $E_x\{|\sum_{k=1}^n a_k\psi_k(x)| < t\}$. Or, on a d'après 2,

$$\int_0^1 e^{i\xi a_k\psi_k(x)}dx = \int_0^1 e^{i\xi a_k(2x-1)}dx = \frac{\sin a_k\xi}{\xi},$$

donc d'après 3

$$\int_0^1 e^{i\xi\sum_{k=1}^n a_k\psi_k(x)}dx = \prod_{k=1}^n\int_0^1 e^{i\xi a_k\psi_k(x)}dx = \prod_{k=1}^n\frac{\sin a_k\xi}{\xi};$$

nous aurons donc

$$|E_x\{|\sum a_k\psi_k(x)| < t\}| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t\xi}{\xi^{n+1}}\sin a_1\xi\ldots\sin a_n\xi\, d\xi.$$

La propriété 2 donne presque immédiatement l'égalité suivante:

$$\underset{|x_k|<1,\,|\sum_{k=1}^n a_k x_k|<t}{\int\ldots\int} dx_1\ldots dx_n = 2^n|E_x\{|\sum_{k=1}^n a_k\psi_k(x)| < t\}|$$

$$= \frac{2^n}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t\xi}{\xi^{n+1}}\sin a_1\xi\ldots\sin a_n\xi\, d\xi.$$

Nous avons en même temps retrouvé une formule importante de M. G. Pólya[7]). Notre méthode permet aussi de calculer certaines intégrales des fonctions qui dépendent d'une infinité dénombrable de variables.

4. Dans la suite nous supposons

$$\int_0^1 f_i(x)\,dx = 0 \qquad \int_0^1 f_i^2(x)\,dx = b_i.$$

Théorème 2. *Si* $b_i = 1$ *et* $\int_0^1 |f_i(x)|^k dx < M$ $(i=1,2,\ldots;$ $k=3,4,\ldots)$, *alors*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (n^{-1/2}\sum_{i=1}^n f_i(x))^k dx = \frac{2^{k/2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} t^k e^{-t^2}dt.$$

Démonstration. Ecrivons $\exp x$ pour e^x; nous avons d'après le lemme 2

$$\int_0^1 \exp(zn^{-1/2}\sum_{i=1}^n f_i(x))\,dx = \prod_{i=1}^n\int_0^1\exp(zn^{-1/2}f_i(x))\,dx,$$

z étant un nombre complexe arbitraire, et

$$\int_0^1 \exp(zn^{-1/2}f_i(x))\,dx = 1 + \frac{z^2}{2}\cdot\frac{1}{n} + \sum_{k=3}^\infty\frac{z^k}{k!}n^{-\frac{k}{2}}\int_0^1 f_i^k(x)\,dx.$$

Pour $|z| \leqslant R$ nous avons

$$\left|\sum_{k=3}^\infty\frac{z^k}{k!}n^{-\frac{k}{2}}\int_0^1 f_i^k(x)\,dx\right| = O(n^{-3/2}),$$

donc

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^n\int_0^1\exp(z\,.\,n^{-1/2}f_i(x))\,dx = e^{\frac{z^2}{2}} = 1 + \sum_{k=1}^\infty\frac{z^{2k}}{2^k.\,k!} \tag{6}$$

uniformément dans le cercle $|z| \leqslant R$. D'autre part

$$\int_0^1\exp(zn^{-1/2}\sum_{i=1}^n f_i(x))\,dx = 1 + \sum_{k=1}^\infty\frac{z^k}{k!}\int_0^1(n^{-1/2}\sum_{i=1}^n f_i(x))^k dx. \tag{7}$$

---

[7]) G. Pólya, Berechnung eines bestimmten Integrals, Math. Ann. 74 (1913) p. 204—212 (en particulier p. 204—208).

D'après le bien connu théorème de Weierstrass sur la convergence d'une suite de séries de puissances, (6) et (7) donnent

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k!}\int_0^1 (n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n} f_i(x))\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } k \text{ impair} \\ \dfrac{1}{(k/2)!\,2^{k/2}} & \text{» } k \text{ pair.}\end{cases}$$

Cette relation est équivalente à notre théorème.

Théorème 3. *Si*

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i < \infty,$$

la série

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

est convergente presque partout.

En s'appuyant sur le lemme 4 et les remarques finales du nº 1, nous n'avons qu'à répéter la démonstration d'un théorème analogue de M. Steinhaus [8]).

Comme une consequence simple, nous obtenons ce corollaire: *Si*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{b_i}{i^2} < \infty,$$

on a

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0$$

presque partout.

En effet, la série $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f_i(x)}{i}$ est convergente presque partout (voir théorème 3); en se servant d'un théorème bien connu de Kronecker, on obtient notre proposition. Cette proposition correspond à la „loi forte des grands nombres" de M. A. Kolmogoroff. Nous pouvons démontrer cette loi d'une façon très simple, sous des conditions un peu différentes.

Théorème 4. *Si chaques quatre fonctions de la suite $\{f_i(x)\}$ sont indépendantes et*

[8]) Loc. cit [3a]), p. 34—35.

1. $\int_0^1 f_i^4(x)\,dx < q\,b_i^2 \quad (q \geqslant 1;\quad i = 1, 2, \ldots),$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} b_i)^2 < \infty,$

alors

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0 \text{ \textit{presque partout.}}$$

Démonstration. Observons que

$$\int_0^1 f_i^3(x) f_k(x)\,dx = \int_0^1 f_i^3(x)\,dx \int_0^1 f_k(x)\,dx = 0 \quad (i \neq k),$$

$$\int_0^1 f_i^2(x) f_k^2(x)\,dx = b_i b_k \quad (i \neq k),$$

$$\int_0^1 f_{i_1}(x) f_{i_2}(x) f_{i_3}(x) f_{i_4}(x)\,dx = 0 \quad (i_1 < i_2 < i_3 < i_4);$$

il en résulte sans peine que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(x))^4 dx \leqslant 6\,q\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-2}\sum_{i=1}^{n} b_i)^2 < \infty.$$

D'après un théorème connu, on en déduit que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(x))^4$$

est convergente presque partout, donc

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = 0$$

presque partout.

5. Sous les conditions du théorème 4 (la condition 2 exclue), nous avons le

Théorème 5. *Si*

$$t < (\sum_{i=1}^{n} b_i)^{1/2} = B_i^{1/2},$$

alors

$$|E| = |\underset{x}{E}\{|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)| < t\}| < \frac{1}{2}\Big[2 + \sigma - (\sigma^2 + 4(1 - \frac{t^2}{B_n}))^{1/2}\Big],$$

où $\sigma = (q-1)^{1/2} + 1.$

Démonstration[9]). Nous avons évidemment

$$t^2 \geqslant t^2 |E|$$

$$\geqslant \int_E |\sum_{i=1}^n f_i(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_E f_i^2(x)\,dx - 2\sum_{1\le i<k\le n} \int_E f_i(x) f_k(x)\,dx$$

$$(8) \quad = |E|.B_n - \sum_{i=1}^n \int_{CE} [f_i^2(x) - b_i]\,dx - 2\sum_{1\le i<k\le n} \int_{CE} f_i(x) f_k(x)\,dx$$

$$\geqslant |E|.B_n - |\sum_{i=1}^n \int_{CE} [f_i^2(x) - b_i]\,dx| - 2|\sum_{1\le i<k\le n} \int_{CE} f_i(x) f_k(x)\,dx|$$

($CE =$ l'ensemble complémentaire à E). Nous pouvons supposer que

$$\int_0^1 f_i^4(x)\,dx > b_i^2$$

(dans le cas contraire, c'est à dire quand

$$\int_0^1 f_i^4(x)\,dx = b_i^2$$

pour certains i, nous aurons $f_i^2(x) \equiv b_i$ presque partout, et certains termes manqueront). Il est aisé de voir que les fonctions

$$(A_i - b_i^2)^{-1/2}(f_i^2(x) - b_i) \quad (i = 1, 2 \ldots) \quad (A_i = \int_0^1 f_i^4(x)\,dx)$$

sont orthogonales et normées ainsi que les fonctions

$$b_i^{-1/2} b_k^{-1/2} f_i(x) f_k(x) \quad (i < k).$$

En employant l'inégalité de Bessel, nous obtenons après quelques transformations faciles

$$|\sum_{i=1}^n \int_{CE} [f_i^2(x) - b_i]\,dx| < (q-1)^{1/2}\, B_n (1 - |E|)^{1/2},$$

$$|\sum_{1\le i<k\le n} \int_{CE} f_i(x) f_k(x)\,dx| < B_n (1 - |E|)^{1/2},$$

donc, en comparant avec (8),

$$|E|.B_n - \sigma B_n (1 - |E|)^{1/2} < t^2.$$

Cette inégalité implique notre théorème.

[9]) Nous employons une méthode due à M. A. Zygmund, avec quelques modifications.

Théorème 6. *Sous les conditions du théorème 3, nous avons*

$$\int_0^1 |\sum_{i=1}^n f_i(x)|\,dx \geqslant R(q) B_n^{1/2} \quad {}^{10})$$

avec $R(q) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2}(2 + \sigma - (\sigma^2 + 3)^{1/2})\right].$

Démonstration. Soit

$$t = \frac{1}{2} B_n^{1/2} \text{ et } F = \underset{x}{E}\{|\sum_{i=1}^n f_i(x)| > t\};$$

d'après le théorème 5,

$$|F| > 1 - \frac{1}{2}(2 + \sigma - (\sigma^2 + 3)^{1/2}) = 2R(q),$$

donc

$$\int_0^1 |\sum_{i=1}^n f_i(x)|\,dx > t.|F| = R(q)\,B_n^{1/2}.$$

Nous pouvons affirmer généralement que

$$\int_0^1 |\sum_{i=1}^n f_i(x)|^k dx > t^k.|F| = \frac{R(q)}{2^{(k-1)}} B_n^{\frac{k}{2}} \quad (k > 0).$$

6. L'analogie entre les fonctions indépendantes et les „variables éventuelles indépendantes“ est évidente. Nous voulons montrer sur un exemple, comment on peut appliquer les fonctions indépendantes au calcul des probabilités. Nous démontrerons la proposition suivante:

Soit $\{x_i(t)\}$ *une suite de fonctions définies dans l'intervalle* $\langle 0, 1\rangle$ *et telles que*

$$\int_0^1 x_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad \sum_{i=1}^\infty i^{-2} \int_0^1 x_i^2(t)\,dt < \infty.$$

La probabilité que, pour une suite $\{t_n\}$ *choisie au hasard* $(0 \leqslant t_n \leqslant 1)$, *on ait*

[10]) Cette relation pour les fonctions de Rademacher a été obtenue par MM. S. Kaczmarz et H. Steinhaus (Theorie der Orthogonalreihen, Monogr. Mat. 6 (1935) p. 132). Pour la démonstration, les auteurs utilisent l'inégalité de M. Khintchine et ils obtiennent la constante $^1/_8$. (Pour les fonctions de Rademacher $R(q) = R(1) = {}^1/_4 > {}^1/_8$).

(P) $$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_i) = 0,$$

est 1.

(C'est une forme de la „loi forte des grands nombres").

Démonstration. D'après une intérpretation connue[11]), il s'agit de démontrer que la mesure, dans l'espace de suites $\{t_n\}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ (cet éspace est le produit $X_1 \times X_2 \times \ldots;\ X_i = \langle 0,1\rangle$), de l'ensemble des suites pour lesquelles (P) est rempli, est égale à 1. M. Steinhaus a montré[12]) que les fonctions $\vartheta_n(t)$ définissent la mesure dans l'espace considéré et que, d'après les propriétés de ces fonctions, (P) équivaut à

(P') $$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i(\vartheta_i(t)) = 0$$

presque partout.

On voit sans peine que $\{x_i(\vartheta(t))\}$ est une suite de fonctions indépendantes, qui remplit les conditions du corollaire du théorème 3; il en résulte la relation (P'), donc aussi (P).

Il est assez clair que l'on peut identifier les „variables éventuelles indépendantes", avec les fonctions indépendantes; cette interprétation nous permettra de réduire les notions du calcul des probabilités à celles de la théorie des fonctions de variables réelles.

---

[11]) Z. Łomnicki et S. Ulam, Sur la théorie de la mesure dans les espaces combinatoires et son application au calcul des probabilités I., Fund Math. 23 (1934) p. 237—278.

[12]) Loc. cit [8a]), p. 23—28.

(Reçu par la Rédaction le 10 1. 1936).