Sur la convergence des séries orthogonales

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

1. Le but de cette note est de démontrer les deux théorèmes suivants:

Théorème A. *Pour chaque système $\{\varphi_i(x)\}$ orthogonal et normé dans $(0, \pi)$ on peut choisir une suite $\{n_i\}$ de sorte que l'expression*

1.1 $$S_{n_i}(x) = \sum_{\nu=1}^{n_i} a_\nu \varphi_\nu(x)$$

soit presque partout convergente, dès que l'on a

1.2 $$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2 < \infty .$$

Théorème B. *La série*

1.3 $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/6} \cos nx$$

représente une fonction $f(x) \in L^p$, $(p < 6/5)$. On y peut changer l'ordre des termes de sorte que la série ainsi obtenue

1.4 $$\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu^{-1/6} \cos n_\nu x$$

jouisse de la propriété suivante:

Chaque suite

1.5 $$\sum_{\nu=1}^{q_i} n_\nu^{-1/6} \cos n_\nu x$$

diverge presque partout.

Le théorème A généralise dans un sens certains théorèmes de M. M. Kolmogoroff [1]) et Kaczmarz [2]). Le théorème B montre que l'hypothèse (1.2) ne peut pas être remplacée par celle que la série

1.6 $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

soit le développement d'une fonction $f(x) \in L^p$, $p < 6/5$, même si l'on détermine la suite $\{n_i\}$ pour chaque fonction séparément et si le système $\{\varphi_i(x)\}$ est complet dans L^1 et uniformément borné.

2. Démonstration de A. La suite $\{\varphi_i(x)\}$ étant donnée dans l'intervalle $(0, \pi)$, posons

2.1 $$\varphi_i(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^{(i)} \cos \nu x .$$

Le système $\varphi_i(x)$ étant orthogonal et normé, on a d'après l'inégalité de Bessel

2.2 $$\sum_{i=1}^{\infty} |a_\nu^{(i)}|^2 < \infty \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Déterminons la suite infinie de nombres naturels croissants (n_ν) remplissant l'inégalité

2.3 $$\sum_{i \geq n_\nu}^{\infty} |a_\nu^{(i)}|^2 < \pi^2 2^{-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

et posons pour $n_\nu \leqslant i < n_{\nu+1}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$

2.4 $$u(i) = \nu,$$

2.5 $$\varphi_i'(x) = \sum_{\nu=0}^{u(i)} a_\nu^{(i)} \cos \nu x \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots).$$

(D'après (2.3) on peut supposer $u(0) = 0$).

Évaluons la somme de la série

2.6 $$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| . |\varphi_i'(x)| ;$$

[1]) A. Kolmogoroff, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, Fund. Math. 5 (1924) p. 96—97.

[2]) S. Kaczmarz, Note on orthogonal series I, Studia Math. 5 (1935) p. 24—28.

d'après (2.3), (2.4) et (2.5) on obtient

$$\sum_{(i)} |a_i \varphi_i'(x)| \leqslant \sum_{(i)} |a_i| \sum_{\nu=0}^{u(i)} |a_\nu^{(i)}|$$

2.7 $$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\substack{(i) \\ u(i) \geq \nu}} |a_i a_\nu^{(i)}| \leqslant \Big(\sum_{(i)} a_i^2 \Big)^{1/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big(\sum_{u(i) \geq \nu} a_\nu^{(i)2} \Big)^{1/2}$$
$$\leqslant \Big(\sum_{(i)} a_i^2 \Big)^{1/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\nu/2} \leqslant 4 \Big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \Big)^{1/2}.$$

Choisissons maintenant la fonction croissante $v(i)$ de sorte que

2.8 $$\Bigg(\int_0^{\pi} \Big(\sum_{v(i)+1}^{\infty} a_\nu^{(i)} \cos \nu x \Big)^2 dx \Bigg)^{1/2} < 2^{-}$$

et posons

2.9 $$\varphi_i'' = \sum_{v(i)+1}^{\infty} a_\nu^{(i)} \cos \nu x ,$$

2.10 $$\varphi_i^* = \sum_{u(i)+1}^{v(i)} a_\nu^{(i)} \cos \nu x ;$$

d'après l'inégalité

2.11 $$\int_0^{\pi} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \varphi_i''| \Big)^2 dx \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 . \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \varphi_i''^2 dx \leqslant 2 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$$

on conclut que la série $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i \varphi_i''|$ converge presque partout vers une fonction de classe L^2 dès que

2.12 $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty ,$$

et il en résulte en vertu de (2.7) sous l'hypothèse (2.12) que la série

2.13 $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i^*$$

vérifie la relation

2.14 $$\lim_{p, q \to \infty} \int_0^{\pi} \Big(\sum_{p}^{q} a_i \varphi_i^* \Big)^2 dx = 0 .$$

Ces remarques faites, on démontre le théorème A avec la suite $\{n_i\}$ soumise à l'unique condition

2.15 $$u(n_{i+1}) > 2\,v(n_i), \quad (n_0 = 1).$$

En effet, la série

2.16 $$\sum_{i=2}^{\infty} a_i\,\varphi_i(x)$$

étant donnée et la condition (2.12) remplie, posons

2.17 $$a_i' = \left| \begin{array}{ll} 0 \text{ pour } n_{2\nu+1} < i \leqslant n_{2\nu} & (\nu = 0, 1, 2, \ldots); \\ a_i \text{ pour } n_{2\nu} < i \leqslant n_{2\nu+1} & (\nu = 0, 1, 2, \ldots); \end{array} \right.$$
$$a_i'' = \left| \begin{array}{ll} 0 \text{ pour } n_{2\nu} < i \leqslant n_{2\nu+1} & (\nu = 0, 1, 2, \ldots); \\ a_i \text{ pour } n_{2\nu+1} < i \leqslant n_{2\nu} & (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \end{array} \right.$$

D'après (2.13) et (2.14) la série

2.18 $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i'\,\varphi_i^*$$

converge „en moyenne" vers une fonction $f \in L^2$. D'autre part, en désignant par $S_n(f, x)$ la somme partielle d'ordre n du développement de la fonction $f(x)$ d'après le système 1, $\cos x$, $\cos 2x, \ldots$ (considéré dans $(0, \pi)$), on obtient

2.19 $$\sum_{\nu=1}^{n_{2i+1}} a_\nu'\,\varphi_\nu^* = \sum_{\nu=1}^{n_{2i+2}} a_\nu'\,\varphi_\nu^* = S_{v(n_{2i+1})}(f, x).$$

Or, on a d'après (2.15)

2.20 $$v(n_{2i+1}) > 2v(n_{2i-1});$$

on en tire, d'après un théorème connu de M. Kolmogoroff, la convergence presque partout de la suite $S_{v(n_{2i+1})}(f, x)$, donc aussi celle de

2.21 $$\sum_{\nu=1}^{n_i} a_\nu'\,\varphi_\nu^*$$

et, d'une façon analogue, celle de

2.22 $$\sum_{\nu=1}^{n_i} a_\nu''\,\varphi_\nu^*.$$

Les formules (2.7), (2.11), (2.21) et (2.22) prouvent le théorème A.

En conservant la démonstration on peut donner une autre forme au théorème démontré, à savoir:

Soit

2.23 $$S(x) = \underset{(i)}{\text{borne sup}} \sum_{\nu=1}^{n_i} a_\nu\,\varphi_\nu(x);$$

alors

2.24 $$\int_0^\pi S^2(x)\,dx \leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} a_\nu^2,$$

où les n_i sont définis par les formules (2.15) *et C désigne une constante* [8]).

3. Démonstration de B. La première partie du théorème B est banale; en effet $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/6} \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n + 1/2)\,x}{2 \sin x/2}\,\Delta_n$, où $\Delta_n = n^{-1/6} - (n+1)^{-1/6}$, donc

3.1 $$|f(x)| \leqslant c \sum_{n=1}^{[\frac{1}{x}]} x^{-1} |\sin(n + 1/2)\,x|\,\Delta_n + c \sum_{n=[\frac{1}{x}]+1}^{\infty} x^{-1}\,\Delta_n$$
$$= O(x^{1/6-1}) + O(x^{1/6-1}) = O(x^{-5/6}).$$

Pour prouver la deuxième partie, définissons la suite $\{n_i\}$ de sorte qu'elle satisfasse aux conditions suivantes:

3.2 $n_i \leqslant 4\,i^3$,

3.3 l'équation $n = \pm n_i \pm n_{i'}$ admet au plus une solution pour chaque $n \neq 0$.

A ce but supposons $n_1 = 1$; $n_1, n_2, \ldots n_k$ définis, il y a au plus $4\,k^3$ nombres positifs de forme $\pm n_i \pm n_{i'} \pm n_{i''}$; il en résulte l'existence d'un $n_{k+1} \leqslant 4(k+1)^3$ qui n'est pas de la forme $\pm n_i \pm n_{i'} \pm n_{i''}$ avec $i, i', i'' \leqslant k$. La suite $\{n_k\}$ ainsi définie vérifie (3.2) et (3.3). Désignons par m_i les nombres entiers différents de n_i. D'après (3.2) la série

3.4 $$\sum_{i=1}^{\infty} (n_i^{-1/6})^2$$

---

[8]) Voir A. Zygmund, Trigonometrical series, Warszawa 1935, p. 252.

diverge; cela permet de choisir la suite infinie $\{p_i\}$ de sorte que

3.5 $$(i+1)^4 \geqslant \sum_{\nu=1}^{p_i} (n_\nu^{-1/6})^2 > i^4,$$

$$(p_{k+1} - p_k > k; \quad k = 1, 2, \ldots).$$

Posons

3.6 $$\varphi_1(x) = \cos n_1 x, \quad \varphi_2(x) = \cos n_2 x,$$
$$\varphi_{p_1}(x) = \cos n_{p_1} x, \quad \varphi_{p_1+1}(x) = \cos m_1 x,$$

d'une façon générale

$$\varphi_{p_k+k}(x) = \cos m_k x, \quad \varphi_{p_k+k+1}(x) = \cos n_{p_k+1} x,$$

3.7 $$\varphi_{p_k+k+2}(x) = \cos n_{p_k+2} x \ldots$$
$$\varphi_{p_{k+1}+k}(x) = \cos n_{p_{k+1}}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

et désignons par

3.8 $$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

le développement de la fonction $f(x)$ définie par (1.3) d'après le système $\varphi_i(x)$. La série (3.8) ne diffère de (1.3) que par l'ordre de ses termes. Soit E, $|E| > 0$, un ensemble arbitraire.

Choisissons k assez grand pour que l'on ait

3.9 $$\int_E \cos^2 n_i x\, dx \geqslant {}^1/_4 |E|, \quad \text{pour } i > p_k,$$

3.10 $$\Big(\sum_{\substack{i,j=p_k \\ i \neq j}}^{\infty} \Big(\int_E \cos n_i x \cos n_j x\, dx\Big)^2\Big)^{1/2} \leqslant {}^1/_8 |E|;$$

la formule (3.10) est réalisable d'après (3.3). Si

$$p_r + r \leqslant q < p_{r+1} + r,$$

alors

3.13 $$\int_E \Big(\sum_{i=p_k+k}^{q} a_i \varphi_i(x)\Big)^2 dx$$

$$\geqslant \int_E \Big(\sum_{i=p_k+1}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x\Big)^2 dx$$

$$- 2\int_E \Big|\sum_{i=p_k+1}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x \sum_{i=k}^{r} m_i^{-1/6} \cos m_i x\Big| dx$$

$$- \int_E \Big(\sum_{i=k}^{r} m_i^{-1/6} \cos m_i x\Big)^2 dx \geqslant \sum_{i=p_k+1}^{q-r} n_i^{-1/3} \int_E \cos^2 n_i x\, dx$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=p_k+1 \\ i \neq j}}^{q-r} n_i^{-1/6} n_j^{-1/6} \int_E \cos n_i x \cos n_j x\, dx$$

$$- 2 r\pi \Big(\int_E \Big(\sum_{i=p_k+k}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x\Big)^2 dx\Big)^{1/2} - r\pi$$

$$\geqslant {}^1/_4 |E| \sum_{i=1}^{q-r} n_i^{-1/3} - {}^1/_8 |E| \sum_{i=1}^{q-r} n_i^{-1/3} - O(1) - O(r)$$

$$- 2 r\pi \Big(\int_E \Big(\sum_{i=p_{k+1}}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x\Big)^2 dx\Big)^{1/2}$$

$$= {}^1/_8 |E| - O(r) - 2 r\pi \Big(\int_E \Big(\sum_{i=p_{k+1}}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x\Big)^2 dx\Big)^{1/2},$$

où $O(r)$ désigne une expression ne surpassant pas pour k fixe Mr (M constante). On prouve facilement à l'aide de (3.10) que

3.14 $$\int_E \Big(\sum_{i=p_k+1}^{q-r} n_i^{-1/6} \cos n_i x\Big)^2 dx = O\Big(\sum_{i=1}^{q-r} n_i^{-1/3}\Big);$$

les formules (3.13) et (3.14) donnent d'après (3.5)

3.15 $$\int_E \Big(\sum_{i=p_k+k}^{q} a_i \varphi_i(x)\Big)^2 dx \geqslant {}^1/_8 |E|\, r^4 - O(r) - O(r^3)$$

et en posant dans (3.15) $q = q_\nu$, $q_\nu \to \infty$,

3.16 $$\lim_{\nu \to \infty} \int_E \Big(\sum_{i=1}^{q_\nu} a_i \varphi_i(x)\Big)^2 dx = \infty.$$

La suite q_ν et l'ensemble E étant arbitraires, on en tire le théorème.

(Reçu par la Rédaction le 16. 12. 1935).