Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen[1]) (V)

von

W. ORLICZ (Lwów).

Es sei $\{\varphi_i(x)\}$ ein in $(0,1)$ orthogonales, normiertes Funktionensystem. Wir werden im Folgenden ein solches System kurz mit OS bezeichnen. Wir sagen, daß das OS $\{\varphi_i(x)\}$ *gleichmäßig beschränkt* ist, wenn die Ungleichung $|\varphi_n(x)| \leqslant K$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ für fast alle x stattfindet. In dieser Arbeit betrachten wir einige Eigenschaften der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pm p_i \varphi_i(x),$$

wobei wir voraussetzen, daß diese Reihe für jede oder fast jede Vorzeichenverteilung (der Sinn des letzten Ausdruckes soll im Folgenden präzisiert werden) die Entwicklung einer Funktion eines gewissen Funktionenraumes ist. Die hier bewiesenen Sätze bilden eine Weiterführung früherer Untersuchungen des Verfassers[2]); zu betonen ist, daß wir außer den früher untersuchten Räumen (L^{α}), $\alpha \geqslant 1$, (L^{∞}), (C) noch den Raum (V^*) der mit den Funktionen von beschränkter Variation äquivalenten Funktionen betrachten.

Manche auf Reihen obiger Gestalt bezügliche Fragen wurden im Spezialfall des trigonometrischen Systems und für fast alle Vorzeichenverteilungen von verschiedenen Verfassern behandelt (Littlewood, Paley, Zygmund, Salem[3])); der Satz 5 dieser Arbeit bildet eine Verallgemeinerung eines früher von Littlewood für das trigonometrische System bewiesenen Satzes.

[1]) Der Inhalt dieser Arbeit wurde in der Sitzung vom 26. 5. 1934 der Poln. Math. Gesellschaft (Abteilung Lwów) vorgetragen.

[2]) Siehe: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (I), (II), Studia Math. 1 (1929) p. 1—39, p. 241—255; (III) Bull. Ac. Pol. (1932) p. 229—233. Diese Arbeiten zitieren wir im folgenden als Beiträge (I), (II), (III)

§ 1.

In der Theorie der Orthogonalentwicklungen ist es üblich zwei Funktionen nur dann als verschieden zu betrachten, wenn sie nicht äquivalent sind, d. h. nicht für fast jedes x des Definitionsintervalls identisch sind. Da man also verschiedene äquivalente Funktionen nicht unterscheiden will, so werden wir in dieser Arbeit unter einer Funktion von *beschränkter Variation*, immer — wenn das Gegenteil nicht ausdrücklich bemerkt wird — eine solche Funktion verstehen, welche einer Funktion von beschränkter Variation (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) äquivalent ist. Mit (V^*) bezeichnen wir die Menge aller so erklärten Funktionen von beschränkter Variation. Wenn wir die Addition von Funktionen aus (V^*) sowie auch ihre Multiplikation mit reellen Zahlen wie gewöhnlich definieren, so kann ersichtlich (V^*) als ein linearer Raum betrachtet werden.

Sei $f(x) \in (V^*)$; es gibt dann offenbar eine einzige Funktion $f^*(x)$ mit den folgenden Eigenschaften: a) $f(x) = f^*(x)$ für fast jedes x aus $\langle 0,1 \rangle$; b) $f^*(0) = 0$; c) $f^*(x)$ ist für jedes $0 < x \leqslant 1$ linksseitig stetig und ist in $\langle 0,1 \rangle$ im gewöhnlichen Sinne von beschränkter Variation. Die Funktion $f^*(x)$ wollen wir die *reduzierte Funktion* nennen. Folgendes leuchtet sofort ein: 1) zwei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ aus (V^*) sind dann und nur dann äquivalent, wenn überall in $\langle 0,1 \rangle$ $f^*(x) = g^*(x)$; 2) ist $f(x) \in (V^*)$, $g(x) \in (V^*)$, $f(x) + g(x) = h(x)$, so besteht für jedes x aus $\langle 0,1 \rangle$ die Gleichung $f^*(x) + g^*(x) = h^*(x)$; 3) ist $f_i(x) \in (V^*)$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$, $\lim\limits_{i \to \infty} f_i(x) = f(x)$ gleichmäßig in $\langle 0,1 \rangle - A$ mit $|A| = 0$, $f(x) \in (V^*)$, so ist $\lim\limits_{i \to \infty} f_i^*(x) = f^*(x)$ gleichmäßig in $\langle 0,1 \rangle$.

[3]) J. E. Littlewood, On mean values of power series (II), Journal London Math. Soc. 5 (1930) p. 179—182; R. E. A. C. Paley — A. Zygmund, On some series of functions (1), Proc. Cambr. Phil. Soc. 26 (1930) p. 337—357; R. Salem, Sur une propriété des séries de Fourier des fonctions de carré sommable, C. R. 197 (1933) p. 113—115.

Unter *totaler Variation* einer Funktion $f(x)$ aus (V^*) verstehen wir die totale Variation (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) der reduzierten Funktion $f^*(x)$. Wir führen jetzt in (V^*) eine Metrik ein, indem wir für zwei dem Raume (V^*) angehörende Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$

$$(f_1(x), f_2(x)) = \underset{0 \leqq x \leqq 1}{\text{Variation}} (f_1^*(x) - f_2^*(x))$$

setzen; ferner definieren wir noch die Norm von $f(x) \in (V^*)$

$$\|f(x)\|_{V^*} = (0, f(x)) = \underset{0 \leqq x \leqq 1}{\text{Variation}} (f^*(x))\,^{4}).$$

Es möge dem Leser der einfache Beweis überlassen werden, daß (V^*) mit dieser Metrik ein Raum vom Typus (B) ist. Wir bemerken noch, daß man die Norm $\|f(x)\|_{V^*}$ auch so definieren kann:

Man zerlegt das Intervall $\langle 0, 1 \rangle$ durch endlich viele Punkte $0 = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 .. \xi_p < \xi_{p+1} = 1$ in $p+1$ Teilintervalle und bildet die Summe $|M_0| + \sum_{i=1}^{p} (M_i - m_i)$, wo M_i, m_i $(i = 0, 1, 2, \ldots p)$ die kleinste bezw. die größte Zahl bedeutet mit der Eigenschaft, daß $f(x) > M_i$ bezw. $f(x) < m_i$ in $\langle \xi_i, \xi_{i+1} \rangle$ nur in einer Nullmenge besteht. Die obere Grenze aller derartigen Summen, wenn man die Intervalleinteilung beliebig variiert, ist gleich $\|f(x)\|_{V^*}$.

Hilfssatz 1. *Wenn* $f_n(x) \in (V^*)$, $\|f_n(x)\|_{V^*} \leqslant M$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, *so gibt es eine Teilfolge* $\{f_{n_i}(x)\}$ *mit den folgenden Eigenschaften:* a) *es ist fast überall* $\lim_{i \to \infty} f_{n_i}(x) = f(x)$; b) $f(x) \in (V^*)$, $\varliminf_{i \to \infty} \|f_{n_i}(x)\|_{V^*} \geqslant \|f(x)\|_{V^*}$.

Beweis. Betrachten wir die reduzierten Funktionen $f_n^*(x)$. Aus unserer Voraussetzung folgt, daß die totalen Variationen jener Funktionen sowie auch sie selbst beschränkt sind; nach dem bekannten Satz von Helly läßt sich also aus $\{f_n^*(x)\}$ eine überall konvergierende Teilfolge $\{f_{n_i}^*(x)\}$ herausgreifen. Ist $\lim_{i \to \infty} f_{n_i}^*(x) = f(x)$, so besteht $\lim_{i \to \infty} f_{n_i}(x) = f(x)$ fast überall, und es ist $f(x)$ offenbar in (V^*) enthalten. Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben; wir wählen eine Intervalleinteilung $0 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots \xi_p < \xi_{p+1} = 1$, so daß

$$\|f(x)\|_{V^*} - \varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |f^*(\xi_{k+1}) - f^*(\xi_k)|.$$

Da $\lim_{i \to \infty} f_{n_i}^*(0) = f(0) = f^*(0) = 0$, $f^*(x)$ in $\langle 0, 1 \rangle$ linksseitig stetig und höchstens in den Sprungstellen $f(x) \neq f^*(x)$ so kann man immer ξ_k so wählen, daß $f(\xi_k) = f^*(\xi_k)$ $(k = 1, 2 \ldots p)$. Wir haben also für hinreichend große i

$$\|f(x)\|_{V^*} - \varepsilon \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} |f_{n_i}^*(\xi_{k+1}) - f_{n_i}^*(\xi_k)| + \varepsilon \leqslant \|f_{n_i}(x)\|_{V^*} + \varepsilon,$$

woraus sich weiter $\|f(x)\|_{V^*} - 2\varepsilon \leqslant \varliminf_{i \to \infty} \|f_{n_i}(x)\|_{V^*}$, $\|f(x)\|_{V^*} \leqslant \varliminf_{i \to \infty} \|f_{n_i}(x)\|_{V^*}$ ergibt.

Hilfssatz 2. *Wenn das OS* $\{\varphi_i(x)\}$ *aus Funktionen von beschränkter Variation besteht und wenn die Teilsummen der Orthogonalreihe* $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$ *der Bedingung*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \right\|_{V^*} \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

genügen, so ist diese Orthogonalreihe die Orthogonalentwicklung einer Funktion von beschränkter Variation.

Beweis. Der Hilfssatz 1 ist in diesem Falle anwendbar; es gibt also eine Indizesfolge $\{n_p\}$ und eine Funktion von beschränkter Variation $f(x)$, so daß fast überall $\lim_{p \to \infty} \sum_{i=1}^{n_p} c_i \varphi_i(x) = f(x)$ gilt. Da weiter, wegen unserer Voraussetzung, $\left| \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) \right| \leqslant M$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, so haben wir

$$\int_0^1 f(x) \varphi_j(x)\, dx = \lim_{p \to \infty} \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{n_p} c_i \varphi_i(x) \Big) \varphi_j(x)\, dx = c_j.$$

Hilfssatz 3. *Sei* (A) *ein Raum vom Typus* (B), $x_i \in (A)$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$. *Gibt es eine Konstante* M, *so daß für jede Vorzeichenverteilung* $\varepsilon_i = \pm 1$ *die Ungleichung*

[4]) Wohlgemerkt hat die in $\langle 0, 1 \rangle$ stetige Funktion $f(x) = 1$ als reduzierte Funktion $f^*(x) = 1$ $(0 < x \leqslant 1)$, $f^*(0) = 0$ und bekommt demzufolge die Norm 1.

$$\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\| \leqslant M \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

besteht, so gilt auch für jedes d_i, $|d_i| \leqslant 1$, *die Ungleichung*

$$\|\sum_{i=1}^{n} d_i x_i\| \leqslant M \qquad (n=1,2,3\ldots).$$

Beweis. Ist $f(x)$ ein in (A) definiertes, lineares Funktional, dessen Norm die Zahl 1 nicht übertrifft, so folgt aus unserer Voraussetzung $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f(x_i) \leqslant M$ und weiter $\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \leqslant M$, $|f(\sum_{i=1}^{n} d_i x_i)| \leqslant M$, $\|\sum_{i=1}^{n} d_i x_i\| \leqslant M$.

§ 2.

Satz 1. *Es bezeichne* (S) *einen von den folgenden Räumen:* a) (L^{α}) *d. h. den Raum der mit der* α*-ten Potenz* $(\alpha > 1)$ *integrierbaren Funktionen;* b) (L^{∞}) *d. h. den Raum der wesentlich beschränkten Funktionen;* c) (V^*) *d. h. den Raum der Funktionen von beschränkter Variation.*

Gegeben sei ein in (S) *vollständiges* $OS\{\varphi_i(x)\}$, *dessen Funktionen beschränkt sind und außerdem dem Raume* (S) *angehören. Ist die Reihe*

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x)$$

bei beliebiger Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ *die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus* (S), *so ist auch die Reihe*

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} d_i p_i \varphi_i(x),$$

wo $|d_i| \leqslant 1$ $(i=1,2,3\ldots)$, *die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus* (S).

Beweis. Wir werden hier den Beweis für den Raum (V^*) durchführen. Sei (n) die Menge aller unendlichen Folgen $\varepsilon \equiv \{\varepsilon_i\}$, wo $\varepsilon_i = \pm 1$. Die Menge (n) kann man als einen metrischen Raum auffassen, wenn wir die Entfernung zweier Elemente $\varepsilon^1, \varepsilon^2 \in (n)$ durch die Formel

$$(\varepsilon^1, \varepsilon^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^2|}{1+|\varepsilon_i^1 - \varepsilon_i^2|}$$

definieren. Dafür, daß $\lim_{k\to\infty} (\varepsilon^k, \varepsilon) = 0$, wo $\varepsilon^k \equiv \{\varepsilon_i^k\} \in (n)$, $\varepsilon \equiv \{\varepsilon_i\} \in (n)$, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes i $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_i^k = \varepsilon_i$ stattfindet. Es folgt daraus gleich die Vollständigkeit des Raumes (n).

Es sei $\varepsilon \equiv \{\varepsilon_i\} \in (n)$; bezeichnen wir mit $U(\varepsilon) = f(x)$ diejenige Funktion von beschränkter Variation, für welche

$$\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx = \varepsilon_i p_i \qquad (i=1,2,3\ldots);$$

$U(\varepsilon)$ ist eine im Raume (n) definierte Operation, deren Werte dem Raume (V^*) angehören. Diese Operation ist ersichtlich, wegen der Vollständigkeit des $OS\{\varphi_i(x)\}$ in (S), eindeutig definiert. Sei A_r die Menge derjenigen Elemente aus (n), für welche die Ungleichung

$$(3) \qquad \|U(\varepsilon)\|_{V^*} \leqslant r$$

besteht. Wir behaupten, daß die Mengen A_r abgeschlossen sind.

Ist

$\varepsilon^k \in A_r (k=1,2,3\ldots)$, $\lim_{k\to\infty} (\varepsilon^k, \varepsilon) = 0$, $U(\varepsilon^k) = f_k(x)$, $U(\varepsilon) = f(x)$,

so existiert, wegen (3), nach Hilfssatz 1, eine Teilfolge $\{f_{k_i}(x)\}$ und eine Funktion $\bar{f}(x) \in (V^*)$, so daß die Beziehung $\lim_{i\to\infty} f_{k_i}(x) = \bar{f}(x)$ für fast jedes x besteht. Daraus folgt

$$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_j^{k_i} p_j = \lim_{i\to\infty} \int_0^1 f_{k_i}(x)\varphi_j(x)\,dx = \int_0^1 \bar{f}(x)\varphi_j(x)\,dx;$$

da aber andererseits

$$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_j^{k_i} p_j = \varepsilon_j p_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)\,dx$$

so ist, wegen der Vollständigkeit des $OS\{\varphi_i(x)\}$, $f(x) = \bar{f}(x)$ für fast jedes x. Nach Hilfssatz 1, b) ist also $\varliminf_{i\to\infty} \|f_{k_i}(x)\|_{V^*} \geqslant \|f(x)\|_{V^*}$, woraus sich endlich $\|f(x)\|_{V^*} \leqslant r$ ergibt.

Der Raum (n) ist mit der Summe $\sum_{r=1}^{\infty} A_r$ identisch, mithin gibt es ein r_0 derart, daß A_{r_0} von der zweiten Kategorie ist und infolge der Abgeschlossenheit eine Kugel k_0 enthält. Bezeichnen wir mit ϱ den Radius mit $\varepsilon^0 = \{\varepsilon_i^0\}$ den Mittelpunkt dieser Kugel; für jedes Element $\varepsilon \in (n)$, für welches $(\varepsilon, \varepsilon^0) \leqslant \varrho$, besteht die Ungleichung

(4) $$\| U(\varepsilon) \|_{V^*} \leqslant r_0 .$$

Sei m ein fest gewählter Index, mit $\sum_{i=m+1}^{\infty} 1/2^i \leqslant \varrho$, $\varepsilon = \{\varepsilon_i\}$ sei ein beliebiges Element aus (n). Wir definieren jetzt eine Folge $\bar{\varepsilon} = \{\bar{\varepsilon}_i\}$ indem wir $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i^0$ für $1 \leqslant i \leqslant m$, $\bar{\varepsilon}_i = \varepsilon_i$ für $i \geqslant m+1$ setzen. Wie leicht einzusehen, gehört $\bar{\varepsilon}$ der Kugel k_0 an und die Zahlen $\bar{\varepsilon}_i p_i$ sind die Koeffizienten der Funktion

$$U(\varepsilon) - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^0 p_i \varphi_i(x).$$

Nach (4) gelten also die Ungleichungen

$$\| U(\varepsilon) - \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i^0 p_i \varphi_i(x) \|_{V^*} \leqslant r_0 ,$$

(5) $$\| U(\varepsilon) \|_{V^*} \leqslant r_0 + 2 \sum_{i=1}^{m} | p_i | \, \| \varphi_i(x) \|_{V^*} = M.$$

Sei $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \ldots \varepsilon_n$ irgend eine endliche Vorzeichenverteilung; aus (5) folgt sogleich $\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x) \|_{V^*} \leqslant M$; es ist also nach Hilfssatz 3 $\| \sum_{i=1}^{n} d_i p_i \varphi_i(x) \|_{V^*} \leqslant M$, wo $| d_i | \leqslant 1$, und endlich, nach Hilfssatz 2, sind $d_i p_i$ die Koeffizienten einer Funktion von beschränkter Variation.

Im Falle der Räume (L^{α}), (L^{∞}) verläuft der Beweis ganz analog; es ist nur statt des Hilfssatzes 1 der Hilfssatz 1 aus Beiträge (I) (p. 6) und statt des Hilfssatzes 2 die Bemerkung zum Satze 2 derselben Arbeit (p. 12) anzuwenden.

Satz 2. *Gegeben sei ein in (C) abgeschlossenes OS $\{\varphi_i(x)\}$, dessen Funktionen beschränkt sind. Ist die Reihe (1) bei beliebiger*

Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^1), so ist auch die Reihe (2), wo $| d_i | \leqslant 1$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$, die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^1).

Beweis. Ordnen wir einer Folge $\varepsilon \in (n)$, analog wie in dem vorangehenden Beweise, diejenige Funktion $U(\varepsilon) = f(x)$ zu, für welche $\int_0^1 f(x) \varphi_i(x)\, dx = \varepsilon_i p_i$, so haben wir es mit einer eindeutig in (n) erklärten Operation zu tun, deren Wertevorrat dem Raume (L^1) angehört. Es ist — wie früher — zu beweisen, daß die Menge A_r der Elemente $\varepsilon \in (n)$, für welche $\| U(\varepsilon) \|_1 \leqslant r$, abgeschlossen ist. Sei $U(\varepsilon^k) = f_k(x)$, $U(\varepsilon) = f(x)$, $\lim_{k \to \infty} (\varepsilon^k, \varepsilon) = 0$, $\varepsilon^k \in A_r$; man kann eine Teilfolge $\{f_{k_i}(x)\}$ so herausgreifen, daß

(6) $$\lim_{i \to \infty} \int_0^1 f_{k_i}(x) \varphi_j(x)\, dx = \lim_{i \to \infty} \varepsilon_{k_i} p_j = \varepsilon \; p_j = \varepsilon_j \int_0^1 f(x) \varphi_j(x)\, dx .$$

Ist $w(x) = \sum_{i=1}^{p} c_i \varphi_i(x)$ wo c_i irgendwelche reelle Zahlen bedeuten, so folgt aus (6)

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^1 f_{k_i}(x) w(x)\, dx = \int_0^1 f(x) w(x)\, dx ,$$

und weiter — da die Ungleichung $\| f_{k_i}(x) \|_1 \leqslant r$ besteht und das OS $\{\varphi_i(x)\}$ in (C) abgeschlossen ist —

$$\lim_{i \to \infty} \int_0^1 f_{k_i}(x) g(x)\, dx = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$$

für eine beliebige stetige Funktion $g(x)$. Aus der letzten Beziehung folgt aber bekanntlich $\underline{\lim}_{i \to \infty} \| f_{k_i}(x) \|_1 \geqslant \| f(x) \|_1$, woraus sich weiter $\| f(x) \|_1 \leqslant r$, $\varepsilon \in A_r$ ergibt.

Von dieser Stelle an führt man den Beweis dem vorhergehenden ganz analog und man bekommt $\| \sum_{i=1}^{n} d_i p_i \varphi_i(x) \|_1 \leqslant M$, $| d_i | \leqslant 1$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$. Nach dem Satze 3 aus Beiträge (II) und dem Satze 2 aus Beiträge (I) folgt hieraus, daß $d_i p_i$ die Koeffizienten einer integrierbaren Funktion sind.

Bemerkung. In beiden Sätzen haben wir aus unseren Voraussetzungen auf die Ungleichung $\| \sum_{i=1}^{n} d_i p_i \varphi_i(x) \| \leqslant M$, $|d_i| \leqslant 1$ $(n=1,2,3\ldots)$ geschlossen. Diese ist aber im Falle der Räume (L^{α}) $(1 \leqslant \alpha < \infty)$ und (V^*) mit der unbedingten Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i \varphi_i(x)$ in den entsprechenden Funktionenräumen äquivalent [5]). Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 bezw. 2 gilt also: Dafür, daß die Reihe (1) für jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^{α}) $(1 \leqslant \alpha < \infty)$ oder (V^*) sei, ist die unbedingte Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i \varphi_i(x)$ im entsprechenden Funktionenraume notwendig und hinreichend.

Satz 1 in Verbindung mit dem Satze 10 aus Beiträge (II) ergibt den folgenden

Satz 3. *Gegeben sei ein in* (L^{∞}) *vollständiges* OS $\{\varphi_i(x)\}$, *dessen Funktionen beschränkt sind. Damit für jede Vorzeichenverteilung die Reihe* (1) *die Orthogonalentwicklung einer beschränkten Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß für fast jedes* x *die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |p_i| . |\varphi_i(x)| \leqslant M \tag{7}$$

bestehe.

Bemerkung. Für ein gleichmäßig beschränktes OS ist das Bestehen der Ungleichung (7) für fast jedes x mit der Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |p_i|$ äquivalent.

§ 3.

Mit $\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$, $\varepsilon_3(t)\ldots$ bezeichnen wir die Funktionen des Rademacher'schen OS (von $\varepsilon_0(t)$ sehen wir hier ab). Um die i-te

[5]) Für (L^{α}) siehe Beiträge (II); für (V^*) siehe: S. Banach und S. Mazur, Zur Theorie der linearen Dimension, Studia Math. 4 (1933) p. 100—112, insb. p. 108. Im letzten Falle ergibt sich die uns interessierende Tatsache auch leicht aus Hilfssatz 6 der vorliegenden Arbeit.

Funktion $\varepsilon_i(t)$ zu erhalten, zerlegt man das Intervall $(0,1)$ in 2^i gleiche Teilintervalle und setzt in ihren Innern $\varepsilon_i(t)$ abwechselnd ± 1 und 0 in den Endpunkten der Teilintervalle; somit stellt ersichtlich die Funktionenfolge $\{\varepsilon_i(t)\}$ sämtliche unendlichen Vorzeichenverteilungen (bis auf eine abzählbare Menge) in Abhängigkeit von dem Parameter t dar, wo t eine Menge Z durchläuft, die das ganze Intervall $(0,1)$ bis auf die abzählbare Menge der Endpunkte aller Teilintervalle ausmacht. Ist $0, \vartheta_1(t)\, \vartheta_2(t)\, \vartheta_3(t)\ldots$ die dyadische Entwicklung einer Zahl t aus Z, so entspricht ihr umkehrbar eindeutig die Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i(t)$ wobei $\vartheta_i(t) = \frac{1}{2}(1-\varepsilon_i(t))$ $(i=1,2,3\ldots)$; es folgt daraus gleich, daß wenn $t_k \in Z$, $t_0 \in Z$, $\varepsilon(t_k) \equiv \{\varepsilon_i(t_k)\}$, $\varepsilon(t_0) \equiv \{\varepsilon_i(t_0)\}$, die Beziehung $\lim_{k\to\infty} (\varepsilon(t_k), \varepsilon(t_0)) = 0$ mit $\lim_{k\to\infty} \vartheta_i(t_k) = \vartheta_i(t_0)$ $(i=1,2,3\ldots)$ äquivalent ist.

Man sagt, eine Eigenschaft (W) bestehe *für fast jede Vorzeichenverteilung*, wenn die Menge derjenigen Werte t, für welche die Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i(t)$ die Eigenschaft (W) nicht aufweist, vom Maße 0 ist. In diesem Sinne sagt man z. B., daß für fast jede Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i a_i$ konvergiert, oder daß für fast jede Vorzeichenverteilung die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x)$ die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^{α}) ist u. s. w.

Die Orthogonalreihe $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i p_i \varphi_i(x)$ kann wohl die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus einem gewissen Funktionenraume für fast jede dagegen nicht für jede Vorzeichenverteilung sein. Wenn z. B. $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) \log^{1+\varepsilon} i < +\infty$, so ist nach einem Satze der Herren R. E. A. C. Paley und A. Zygmund [6]) die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$ für fast jede Vorzeichenver-

[6]) Vgl. die unter [3]) zit. Arbeit der Herren Paley und Zygmund oder auch: A. Zygmund, Trigonometrical Series, Warszawa (1935), p. 127—128.

teilung ε_i die Fouriersche Reihe einer beschränkten (sogar stetigen) Funktion; wird aber zusätzlich

$$\sum_{i=1}^{\infty}(|a_i|+|b_i|)=+\infty$$

vorausgesetzt, so findet dies sicher (vgl. Satz 3) nicht für jede Vorzeichenverteilung statt. Im allgemeinen kommt also die Untersuchung der Orthogonalreihen für jede Vorzeichenverteilung und fast jede Vorzeichenverteilung nicht auf dasselbe hinaus.

Satz 4. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 1 gilt folgendes: Entweder ist die Reihe* (1) *für fast jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus* (S), *oder für fast jede Vorzeichenverteilung trifft das Gegenteil.*

Beweis. Mit T bezeichnen wir die Menge derjenigen Werte $t \in Z$, für welche die Reihe (1), $\varepsilon_i = \varepsilon_i(t)$ gesetzt, die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (S) ist. Wir setzen ferner für $t \in T$ $U(\varepsilon(t)) = f(x)$, wo $\int_0^1 f(x)\,\varphi_i(x)\,dx = \varepsilon_i(t)\,p_i$ $(i=1,2,3\ldots)$, $f(x) \in (S)$, und betrachten die t-Menge $T.F$, wo F eine abgeschlossene Menge aus Z ist. Sei A_r die Menge derjenigen Werte $t \in T.F$, für welche $\| U(\varepsilon(t))\|_S \leqslant r$. Da aus $t_n \to t_0$, $t_n \in T.F$ die Beziehung $(\varepsilon(t_n), \varepsilon(t_0)) \to 0$, $t_0 \in F$ folgt, so lehrt eine analoge Überlegung wie bei dem Beweise des Satzes 1, daß $t_0 \in A_r$. Die Mengen A_r sind also abgeschlossen, $T.F = \sum_{r=1}^{\infty} A_r$ ist meßbar, daher auch T. Sei $t \in T$ und $0, \vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\ldots$ seine dyadische Entwicklung; wenn für eine Zahl t' die dyadische Entwicklung höchstens auf endlich vielen Stellen von $0, \vartheta_1\,\vartheta_2\,\vartheta_3\ldots$ verschieden ist, so gehört mit t auch t' der Menge T an. Da es aber eine wohlbekannte Tatsache ist, daß eine meßbare Menge mit dieser Eigenschaft entweder das Maß 1 oder 0 besitzt, so ist unser Satz bewiesen.

Analog ergibt sich der folgende Satz:

Satz 4'. *Unter denselben Voraussetzungen wie im Satz 2 ist die Reihe* (1) *entweder für fast jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus* (L^1), *oder für fast jede Vorzeichenverteilung trifft das Gegenteil.*

Hilfssatz 4. *Es bestehen für* $1 \leqslant \alpha < \infty$ *die Ungleichungen*

$$(8) \qquad \int_0^1 \Big|\sum_{i=0}^{n(t)} a_i\,\varepsilon_i(t)\Big|^{\alpha} dt \leqslant C_\alpha\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \qquad (n=1,2,3\ldots),$$

wo $n(t) \leqslant n$ *einen von* t *abhängigen Index bedeutet;*

$$(8') \qquad \Big(\sum_{i=N}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant C_\alpha(E)\int_E \Big|\sum_{i=N}^{n} a_i\,\varepsilon_i(t)\Big|^{\alpha} dt \quad (n=N, N+1\ldots),$$

wobei $E \subset (0,1)$, $|E|>0$ *und* N *von* E *abhängig ist.*

Beweis. Dies sind Verallgemeinerungen der bekannten Ungleichungen von Khintchine; (8) stammt von R. E. A. C. Paley und A. Zygmund [7]); in (8') haben wir das Integrationsintervall durch eine Integrationsmenge ersetzt. Um (8') zu beweisen, bemerken wir vor allem, daß es wegen

$$\int_E \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i\,\varepsilon_i(t)\Big|\,dt \leqslant \Big(\int_E \Big|\sum_{i=0}^{n} a_i\,\varepsilon_i(t)\Big|^{\alpha}\Big)^{\frac{1}{\alpha}} dt\,.\,|E|^{1-\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha>1)$$

nur den Grenzfall $\alpha=1$ zu behandeln genügt. Es bestehen nun die Ungleichungen

$$(9) \qquad \int_E \Big(\sum_{i=N}^{n} a_i\varepsilon_i(t)\Big)^2 dt \leqslant \Big(\int_E \Big|\sum_{i=N}^{n} a_i\varepsilon_i(t)\Big|dt\Big)^{\frac{2}{3}}\Big(\int_E\Big(\sum_{i=N}^{n} a_i\varepsilon_i(t)\Big)^4 dt\Big)^{\frac{1}{3}},$$

$$(10) \qquad \int_E \Big(\sum_{i=N}^{n} a_i\varepsilon_i(t)\Big)^2 dt = |E|\Big(\sum_{i=N}^{n} a_i^2\Big) + 2\sum_{N\leqq i<j}^{n} a_i\,a_j \int_E \varepsilon_i(t)\,\varepsilon_j(t)\,dt\,.$$

Da aber bekanntlich das Funktionensystem $\{\varepsilon_i(t)\,\varepsilon_j(t)\}$ $(i<j)$ in $(0,1)$ orthogonal und normiert ist, so können wir N so groß wählen, daß die Ungleichung $\sqrt{\sum_{N\leqq i<j}^{\infty}\Big(\int_E \varepsilon_i(t)\,\varepsilon_j(t)\,dt\Big)^2} < |E|\,2^{-\frac{3}{2}}$ besteht. Es gilt

$$2\Big|\sum_{N\leqq i<j}^{n} a_i\,a_j\int_E \varepsilon_i(t)\,\varepsilon_j(t)\,dt\Big| \leqslant$$

$$2\Big(\sum_{N\leqq i<j}^{n} a_i^2\,a_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{N\leqq i<j}^{n}\Big(\int_E \varepsilon_i(t)\,\varepsilon_j(t)\,dt\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant 2^{-1}|E|\Big(\sum_{i=N}^{n} a_i^2\Big),$$

und mithin nach (9), (10) und (8)

---

[7]) Siehe [3]).

$$(11)\qquad \Big(\sum_{i=N}^{n} a_i^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1(E)\int_E \Big|\sum_{i=N}^{n} a_i\,\varepsilon_i(t)\Big|\,dt \qquad (n \geqslant N),$$

mit $C_1(E) = 2^{\frac{3}{2}}\,|E|^{-\frac{3}{2}}\,C_4^{\frac{3}{2}}$.

Hilfssatz 5. *Wenn für eine Funktionenfolge* $\{f_i(x)\}$, $f_i(x) \geqslant 0$ *die Ungleichung*

$$(12)\qquad \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\Big)^{\alpha} dx \leqslant M \quad (0<\alpha<\infty;\ n=1,2,3\ldots)$$

besteht, so gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ *einen Index* $p(\varepsilon)$ *mit*

$$(13)\qquad \int_0^1 \Big(\sum_{i=p}^{q} f_i(x)\Big)^{\alpha} dx \leqslant \varepsilon \qquad (q>p).$$

Beweis. Aus (12) folgt, daß die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)$ fast überall konvergiert und $\int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\Big)^{\alpha} dx \leqslant M$ ist. Da $r_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} f_i(x)$ eine monotone Funktionenfolge bilden mit $r_n(x)\to 0$ fast überall, so haben wir $\int_0^1 \big(r_n(x)\big)^{\alpha} dx \to 0$, woraus sich, wegen

$$\int_0^1 \Big(\sum_{i=p}^{q} f_i(x)\Big)^{\alpha} dx \leqslant \int_0^1 r_{p-1}^{\alpha}(x)\,dx,$$

(13) ergibt.

Satz 5. *Von dem OS* $\{\varphi_i(x)\}$ *setzen wir voraus, daß es aus beschränkten Funktionen besteht und in* (L^{α}) *vollständig bezw. in* (C) *abgeschlossen ist, je nachdem* $\alpha>1$ *bzw.* $\alpha=1$ *ist. Dafür, daß die Reihe* (1) *für fast jede Vorzeichenverteilung die Entwicklung einer Funktion aus* (L^{α}) *darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß die folgende Beziehung bestehe:*

$$(14)\qquad \int_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i^2\,\varphi_i^2(x)\Big)^{\frac{\alpha}{2}} dx \leqslant M \qquad (n=1,2,3\ldots).$$

Beweis. 1°. Wir setzen

$$F_{nm}(t) = \max_{n\leqslant q\leqslant m}\Big\{\int_0^1 \Big|\sum_{i=n}^{q} p_i\,\varphi_i(x)\,\varepsilon_i(t)\Big|^{\alpha} dx\Big\};$$

$q(t)$ bezeichne denjenigen Index, für welchen dieses Maximum erreicht ist. Nach (8) erhalten wir

$$\int_0^1 \Big|\sum_{i=n}^{q(t)} p_i\,\varphi_i(x)\,\varepsilon_i(t)\Big|^{\alpha} dt \leqslant C_{\alpha}\Big(\sum_{i=n}^{m} p_i^2\varphi_i^2(x)\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \quad (n=1,2,3\ldots;\ n<m),$$

woraus sich durch beiderseitige Integration und Vertauschung der Integrationsfolge

$$(15)\qquad \int_0^1 F_{nm}(t)\,dt = \int_0^1 dx \int_0^1 \Big|\sum_{i=n}^{q(t)} p_i\,\varphi_i(x)\,\varepsilon_i(t)\Big|^{\alpha} dt \leqslant C_{\alpha}\int_0^1 \Big(\sum_{i=n}^{m} p_i^2\,\varphi_i^2(x)\Big)^{\frac{\alpha}{2}} dx$$

ergibt. Die Funktionenfolge $\{F_{nm}(t)\}$ ist monoton wachsend; setzen wir $\lim_{m\to\infty} F_{nm}(t) = F_n(t)$, so ist wegen (15) die Ungleichung

$$\int_0^1 F_n(t)\,dt \leqslant C_{\alpha}\int_0^1 \Big(\sum_{i=n}^{\infty} p_i^2\,\varphi_i^2(x)\Big)^{\frac{\alpha}{2}} dx$$

erfüllt. Da $F_s(t) \leqslant 2^{\alpha} F_n(t)$ $(s\geqslant n)$, so folgt hieraus nach Hilfssatz 5 die Beziehung

$$(16)\qquad \lim_{n\to\infty} F_n(t) = 0$$

für fast jedes t. Wegen

$$\Big(\int_0^1 \Big|\sum_{i=n}^{m} p_i\,\varphi_i(x)\,\varepsilon_i(t)\Big|^{\alpha} dx\Big) \leqslant F_n(t)$$

ist die Orthogonalreihe (1) in jedem Punkte, in welchem (16) gilt, im Mittel mit der Potenz α konvergent, und stellt mithin die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^{α}) dar.

2°. Wir werden jetzt die Notwendigkeit der angeführten Bedingung beweisen. Es sei also für fast jede Vorzeichenverteilung die Reihe (1) die Entwicklung einer Funktion aus (L^{α}); da die Menge A_r der t-Punkte aus Z, für welche $\|U(\varepsilon(t))\|_{\alpha} \leqslant r$ (wie dies aus dem vorangehenden Beweise hervorgeht) meßbar ist, so ist eine der Mengen A_r, etwa A_{r_0}, von positivem Maße. Setzen wir

$$F_n(t) = \max_{1\leqslant q\leqslant n}\Big\{\int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i(t)\,p_i\,\varphi_i(x)\Big|^{\alpha} dx\Big\} = \int_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{q_n(t)} \varepsilon_i(t)\,p_i\,\varphi_i(x)\Big|^{\alpha} dx,$$

wo $q_n(t)$ den kleinsten Index bezeichnet, für den dieses Maximum erreicht wird, und ferner $\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$. Wir behaupten, daß es eine Menge $A \subset A_{r_0}$ von positivem Maße sowie eine Konstante K gibt derart, daß $F_n(t) \leqslant F(t) \leqslant K$ $(n=1,2,3\ldots)$ für $t\in A$. Betrachten wir zuerst die Punkte $t \in A_{r_0}$, für die von einem gewissen Index an $F_n(t)=F(t)$ stattfindet. Hat die Menge dieser Punkte ein positives Maß, so gibt es offenbar eine Menge $A\subset A_{r_0}$ vom Maße >0, so daß für ein festes n_0 und $t\in A$ $F_{n_0}(t)=F(t)$. Es ist klar, daß $K=\int\limits_0^1 \Big(\sum\limits_{i=1}^{n_0} |p_i|.|\varphi_i(x)|\Big)^\alpha dx$ gesetzt, die Menge A die verlangte Eigenschaft aufweist. Betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Fall. Dann gibt es in A_{r_0} eine Menge $\bar A$ von positivem Maße mit $q_n(t)\to\infty$ für $t\in\bar A$, die in jedem ihrer Punkte die Dichte 1 hat. Bezeichnen wir als i-tes Intervall der n-ten Teilung das Intervall $\delta_i^n \equiv ((i-1)/2^n, i/2^n)$ $(i=1,2\ldots 2^n;\ n=1,2\ldots)$, welches bei der Definition der n-ten RADEMACHER'schen Funktion auftritt. Setzen wir

$$\eta_s = |\bar A|\,2^{-(s+1)},\ \vartheta_s = (|\bar A| - 3/4.\eta_s)(|\bar A| - \eta_s/2)^{-1} \quad (s=1,2,3\ldots).$$

Ordnen wir jedem natürlichen n und $t\in\bar A$ das Intervall $\delta_{i_n(t)}^{q_n(t)}$ der $q_n(t)$-ten Teilung zu, für welches $t\in\delta_{i_n(t)}^{q_n(t)}$; offenbar ist $\lim\limits_{n\to\infty}|\delta_{i_n(t)}^{q_n(t)}|=0$. Es werde mit V die Intervallmenge $\{\delta_{i_n(t)}^{q_n(t)}\}$, $t\in\bar A$ $(n=1,2,3\ldots)$ bezeichnet. Durch wiederholte Anwendung des VITALI'schen Überdeckungssatzes beweisen wir die Existenz einer Folge von Intervallklassen $\{\varDelta_1^s, \varDelta_2^s \ldots \varDelta_{j_s}^s\}$, welche für jedes s die folgenden Eigenschaften besitzen: a) $\varDelta_j^s \in V$ $(j=1,2,\ldots j_s)$; b) $\varDelta_j^s.\varDelta_{j'}^s = 0$ für $j\neq j'$ $(j,j'=1,2,\ldots j_s)$; c) $\varDelta_j^s$ $(j=1,2,\ldots j_s)$ gehört zu einer späteren Teilung als irgend ein $\varDelta_1^{s-1}, \varDelta_2^{s-1},\ldots\varDelta_{j_{s-1}}^{s-1}$; d) $|\varDelta_j^s.\bar A| \geqslant \vartheta_s|\varDelta_j^s|$ $(j=1,2,\ldots j_s)$; e) $|\sum\limits_{j=1}^{j_s}\varDelta_j^s| \geqslant |\bar A| - \eta_s/2$ $(j=1,2,\ldots j_s)$. Wir spiegeln die Menge $\varDelta_j^s.\bar A$ am Mittelpunkte von $\varDelta_j^s$ und bezeichnen den Durchschnitt der so erhaltenen Menge mit der ursprünglichen mit B^s

$(j=1,2,\ldots j_s;\ s=1,2\ldots)$. Aus d) folgt $|B_j^s| \geqslant (2\vartheta_s - 1)|\varDelta_j^s|$; ist $B^s = \sum\limits_{j=1}^{j_s} B_j^s$, so kommt $|B^s| \geqslant (2\vartheta_s-1)|\sum\limits_{j=1}^{j_s}\varDelta_j^s| \geqslant |\bar A| - \eta_s$.

Wir behaupten, daß die Menge $A = \prod\limits_{s=1}^\infty B^s$ das verlangte leistet. Vor allem ist $|A| \geqslant |\bar A|/2 > 0$. Es seien $t_0\in A$ und eine natürliche Zahl n vorgegeben; wir wählen s_0 derart, daß alle $\varDelta_j^{s_0}$ $(j=1,2,\ldots j_{s_0})$ einer späteren Teilung als die n-te angehören. Es ist $t_0 \in B^{s_0}$ und somit für ein gewisses j_0 $t_0\in\varDelta_{j_0}^{s_0} = \delta_I^u$, wobei $u = q_m(\tilde t) > n$, $I = i_m(\tilde t)$, $m \geqslant q_m(\tilde t) > n$. Den Eigenschaften des RADEMACHER'schen Funktionensystems gemäß sind die Funktionen $\int\limits_0^1 |\sum\limits_{i=1}^l \varepsilon_i(t)\, p_i\varphi_i(x)|^\alpha dx$ für $1\leqslant l\leqslant u$ in δ_I^u konstant. Aus dieser Bemerkung sowie aus der Definition von $u=q_m(\tilde t)$ folgern wir, daß für jedes $t\in B^{s_0}.\,\delta_I^u = B_{j_0}^{s_0}$, somit auch für $t=t_0$ die Ungleichung

$$\int_0^1 |\sum_{i=1}^l \varepsilon_i(t)\,p_i\varphi_i(x)|^\alpha dx \leqslant \int_0^1|\sum_{i=1}^u \varepsilon_i(t)\,p_i\varphi_i(x)|^\alpha dx \quad (l=1,2,\ldots u)$$

gilt. Bemerken wir des weiteren $\|U(\varepsilon(t))\|_\alpha \leqslant r_0$ für $t\in B_{j_0}^{s_0}$; da der Menge $B_{j_0}^{s_0}$ offenbar mit t_0 auch der inbezug auf den Mittelpunkt von δ_I^u symmetrisch gelegene Punkt t_0' angehört, dem die Vorzeichenverteilung

$\varepsilon_i(t_0') = \varepsilon_i(t_0)$ $(i=1,2,\ldots u)$, $\varepsilon_i(t_0') = -\varepsilon_i(t_0)$ $(i=u+1,u+2,\ldots)$

entspricht, so ist

$$\Big(\int_0^1 |\sum_{i=1}^u \varepsilon_i(t_0)\,p_i\varphi_i(x)|^\alpha dx\Big)^{\frac1\alpha} = \frac12\|U(\varepsilon(t_0)) + U(\varepsilon(t_0'))\|_\alpha \leqslant r_0.$$

Aus den letzten Ungleichungen folgt

$$\Big(\int_0^1|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t_0)\,p_i\varphi_i(x)|^\alpha dx\Big)^{\frac1\alpha}\leqslant r_0,$$

und die durchgeführte Überlegung beweist für jedes $t\in A$

$$F_n(t)\leqslant K \qquad (n=1,2,3\ldots),$$

wo $K=r_0^\alpha$. Durch Anwendung der Ungleichung (8′) kommt

$$\Big(\sum_{i=N}^{n} p_i^2\,\varphi_i^2(x)\Big)^{\frac{\alpha}{2}} \leqslant C_\alpha(A) \int\limits_A \Big|\sum_{i=N}^{n} \varepsilon_i(t)\,p_i\,\varphi_i(x)\Big|^\alpha dt,$$

woraus sich endlich durch beiderseitige Integration und Vertauschung der Integrationsfolge

$$\int\limits_0^1 \Big(\sum_{i=N}^{n} p_i^2\,\varphi_i^2(x)\Big)^{\frac{\alpha}{2}} dx \leqslant C_\alpha(A) \int\limits_A dt \int\limits_0^1 \Big|\sum_{i=N}^{n} \varepsilon_i(t)\,p_i\,\varphi_i(x)\Big|^\alpha dx$$
$$\leqslant C_\alpha(A)\,|A|\,2^\alpha K = \overline{M}$$

ergibt.

Bemerkungen. 1°. Ist das OS $\{\varphi_i(x)\}$ gleichmäßig beschränkt, so ist die Ungleichung (14) mit $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 < +\infty$ äquivalent. Der sich daraus für $\alpha=1$ ergebende Satz bildet eine Verallgemeinerung des von J. E. Littlewood [8]) für das trigonometrische OS bewiesenen Satzes.

2°. Die folgenden Konsequenzen unseres Satzes verdienen besonders betont zu werden: Wenn — unter den Voraussetzungen des Satzes 5 — die Reihe (1) für fast jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion aus (L^α) ist, so ist sie für fast jede Vorzeichenverteilung: a) im Mittel mit der Potenz α konvergent, b) für fast jedes x konvergent. Wir haben a) im Laufe des Beweises gezeigt; was b) betrifft, so genügt es zu bemerken, daß aus (14) die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2\,\varphi_i^2(x)$ für fast jedes x folgt, woraus sich nach einer geläufigen Methode unsere Behauptung ergibt [9]).

Wir betrachten den Raum (V) aller in $\langle 0,1\rangle$ definierten Funktionen, die (im gewöhnlichen Sinne) von beschränkter Variation sind; die Norm erklären wir durch $\|f(x)\|_V = |f(0)| + \mathrm{Var.}\,(f(x))$.

Hilfssatz 6. *Die Funktionen $f_i(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ seien im gewöhnlichen Sinne von beschränkter Variation; es bestehe für eine Konstante K die Ungleichung*

[8]) Siehe [5]).

[9]) Vgl. dazu die unter [3]) zit. Arbeit der Herren Paley und Zygmund, p. 339.

(17) $$\Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\,f_i(x)\Big\|_V \leqslant K \qquad (n=1,2,3\ldots),$$

wenn t einer Menge A von positivem Maße angehört. Dann ist die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|f_i(x)\|_V^2$$

konvergent [10]).

Beweis. Jede lineare, separable Menge im Raume (V) ist mit einer linearen Menge in (L^1) äquivalent [11]). Sei (V_0) die kleinste auf den Funktionen $f_i(x)$ aufgespannte lineare Menge in (V); (L_0^1) bezeichne die mit ihr äquivalente Menge in (L^1), $F_i(x)$ bezeichne die der Funktion $f_i(x)$ zugeordnete Funktion aus (L_0^1). Wegen (17) und $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\,F_i(x) \in (L_0^1)$ besteht die Ungleichung

$$\int\limits_0^1 \Big|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\,F_i(x)\Big|\,dx \leqslant K \quad (n=1,2,3\ldots,\ t\in A),$$

woraus sich nach (8') die Ungleichung

$$\int\limits_0^1 \Big(\sum_{i=1}^{n} F_i^2(x)\Big)^{\frac{1}{2}} dx \leqslant M \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

ergibt. Diese hat aber die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty}\Big(\int\limits_0^1 |F(x)|\,dx\Big)^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|f_i(x)\|_V^2$$

zur Folge [12]).

Satz 6. *Gegeben sei ein in (V^*) vollständiges OS $\{f_i(x)\}$, dessen Funktionen dem Raume (V^*) angehören. Wenn die Reihe (1) für fast jede Vorzeichenverteilung die Orthogonalentwicklung einer Funktion von beschränkter Variation ist, so muß die Reihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2\,\|\varphi_i(x)\|_{V^*}^2$$

konvergieren.

[10]) Dies ist die Verallgemeinerung eines von den Herren Banach und Mazur bewiesenen Satzes; siehe die unter [5]) zit. Arbeit, p. 108.

[11]) Siehe die unter [5]) zit. Arbeit, p. 101.

[12]) Siehe: W. Orlicz, Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I), Studia Math. 4 (1933) p. 33—37.

Beweis. Durch eine analoge Schlußweise wie beim Beweise des Satzes 5 zeigen wir, daß die Ungleichung

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t)\, p_i\, \varphi_i(x) \Big\|_{V^*} \leqslant K$$

für ein gewisses K besteht, wenn $n = 1, 2 \dots$ und t einer Menge von positivem Maße angehört. Es bleibt noch übrig, den Hilfssatz 6 anzuwenden, um den Beweis zu vollenden.

Bemerkung. Für das trigonometrische OS kommt die Konvergenz der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} p_i^2 \| \varphi_i(x) \|_{V^*}^2$ auf die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$ hinaus.

(Reçu par la Rédaction le 18. 11. 1935).