Über zwei Sätze von G. Fichtenholz und L. Kantorovitch

von

F. HAUSDORFF (Bonn).

$f(x)$ sei eine Abbildung von A in A^*, d. h. jedem $x \in A$ ist ein $f(x) \in A^*$ zugeordnet. Beliebig viele solche Abbildungen mögen *wesentlich verschieden* heißen, wenn es zu endlich vielen verschiedenen $f_1, \ldots, f_k$ unter ihnen immer mindestens eine Stelle x gibt, wo $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ paarweise verschieden sind.

Beliebig viele Teilmengen Z der Menge C mögen *unabhängig* heißen, wenn für endlich viele verschiedene $Z_1, \ldots, Z_p$, $Z'_1, \ldots, Z'_q$ unter ihnen immer

$$Z_1 \ldots Z_p (C - Z'_1) \ldots (C - Z'_q) \neq 0.$$

Dann gelten die Sätze:

I. *Ist A von der unendlichen Mächtigkeit m, so gibt es 2^m wesentlich verschiedene Abbildungen von A in A.*

II. *Eine Menge C der unendlichen Mächtigkeit m hat 2^m unabhängige Teilmengen.*

In ihrer Arbeit: Sur les opérations linéaires dans l'espace des fonctions bornées (Stud. Math. 5 (1935), p. 69—98) haben die Herren G. Fichtenholz und L. Kantorovitch den Satz I (Lemme III, p. 81 und Supplément, p. 94—98) sowie für $m = \aleph_0$ und $m = 2^{\aleph_0}$ den Satz II (p. 80 und Lemme IV, p. 82) bewiesen. Die Beweise sind aber ziemlich umständlich und lassen sich, wie die Verfasser selbst vermuten, sehr viel einfacher führen.

B e w e i s von I. M sei von der Mächtigkeit m und A die Menge der endlichen Mengen $x \subset M$; A ist von der Mächtigkeit $1 + m + m^2 + \ldots = \aleph_0 m = m$. Durchläuft t die sämtlichen 2^m Teilmengen von M, so ist

$$f(x, t) = xt$$

(Durchschnitt von x und t) bei festem t eine Abbildung von A in A. Diese 2^m Abbildungen sind wesentlich verschieden. Denn sind $t_1, t_2, \ldots, t_k$ paarweise verschieden, so wähle man aus jeder der Mengen $(t_i - t_j) + (t_j - t_i) \neq 0$ $(1 \leqslant i < j \leqslant k)$ ein Element und bilde die Summe x dieser Elemente; dann ist $xt_i \neq xt_j$.

B e w e i s von II. Gemäß I nehmen wir 2^m wesentlich verschiedene Abbildungen $f(x, t)$ von A in A als gegeben an, wo der Parameter t eine Menge der Mächtigkeit 2^m durchläuft. Es sei B die Menge der endlichen Mengen $y \subset A$ und $C = (A, B)$ das kombinatorische Produkt von A und B, d. h. die Menge der geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$, $y \in B$. Auch B und C haben die Mächtigkeit m. Jedem t ordnen wir die Menge $Z(t)$ der Paare (x, y) mit $f(x, t) \in y$ zu; $C - Z(t)$ ist die Menge der Paare (x, y) mit $f(x, t) \,\bar{\in}\, y$. Dann sind die 2^m Mengen $Z(t)$ unabhängig. Denn sind $t_1, \ldots, t_p$, $t'_1, \ldots, t'_q$ allesamt verschieden, so gibt es nach I ein x derart, daß die $p + q$ Bilder

$$x_i = f(x, t_i), \quad x'_j = f(x, t'_j)$$

für $i = 1, \ldots, p$ und $j = 1, \ldots, q$ allesamt verschieden sind. Ist dann $y = \{x_1, \ldots, x_p\}$, so ist

$$f(x, t_i) \in y, \quad f(x, t'_j) \,\bar{\in}\, y,$$

also

$$(x, y) \in Z(t_i), \quad (x, y) \in C - Z(t'_j),$$

$$\prod_i Z(t_i) \cdot \prod_j [C - Z(t'_j)] \neq 0.$$

(Reçu par la Rédaction le 13. 11. 1935).