Gemischte Randwertaufgaben bei partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus

von

J. SCHAUDER (Lwów).

Es soll hier ein Verfahren angegeben werden, welches bei allgemeinen nichtlinearen hyperbolischen Differentialgleichungen der Form

$$(1)\quad F\left(x_1,\dots,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_m},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\dots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k},\dots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right)=0$$

diejenigen gemischten Randwertprobleme zu erledigen erlaubt, die in der vorhergehenden Arbeit für den Fall der quasilinearen Differentialgleichung dieser Art gelöst wurden [1]).

Um die später zu entwickelnden Rechnungen einfacher zu gestalten, nehmen wir an, daß die zeitartig orientierte Fläche S_2 mit $x_m=0$, und die raumartige Fläche S_1 mit $x_1=0$ übereinstimmt [2]). Wie weiter anhangsweise gezeigt wird, lassen sich — wenigstens für lineare Differentialgleichungen — diese Probleme auch dann lösen, wenn S_2 charakteristisch ist.

§ 1.

Wir wollen die Anfangswerte von $u, p_1, p_2, \dots, p_m$ auf $x_1=0$ als gleich Null annehmen, was man bekanntlich immer durch eine Variablentransformation erreichen kann. Im Falle des Cauchy'schen Problems würden wir — nach einer früheren Bemerkung von

[1]) M. Krzyżański und J. Schauder, Quasilineare Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben, Studia Math. 6 (1936) p. 162—189. Diese Arbeit wird im Folgenden mit G. R. bezeichnet.

[2]) In G. R. wurde die Ebene $x_m=0$ als die raumartige, die Ebene $x_1=0$ als die zeitartige Fläche angenommen.

mir [3]) — mit der Aufstellung der Differentialgleichungen für $p_1, p_2, \dots, p_m$ beginnen. Bei dem vorliegenden allgemeineren Problem können wir aber in dieser Weise nicht vorgehen, weil auf S_2 nicht einmal die Randwerte von p_m vorgegeben sind. Aus diesem Grunde erscheint es zweckmäßig die Differentialgleichung nicht in der unentwickelten Form (1) zu lassen, sondern sie nach r_{mm} aufzulösen, d. h. nach derjenigen reinen zweiten Ableitung, die in der zur zeitartigen Fläche S_2 normalen Richtung genommen wird [4]). Dies ist möglich, weil S_2, als zeitartig, nicht charakteristisch ist. Es ist nicht nötig vorauszusetzen, daß die Ableitungen $r_{mh}=\frac{\partial p_m}{\partial x_h}$ $(h=1,2,\dots,m-1)$ in F vorhanden sind. Wir schreiben also statt (1)

$$(2)\qquad \Phi + r_{mm}=0;\quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_{mh}}=0 \qquad (h=1,2,\dots,m).$$

Differenzieren wir (2) nach $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$, so erhalten wir für $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ das quasilineare Integro-Differentialsystem

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^{x_1} p_1\,dx_1 \\ &+\sum_{h=1}^{m-1}\frac{\partial\Phi}{\partial p_h}\frac{\partial p_h}{\partial x_j}+\frac{\partial\Phi}{\partial p_m}\frac{\partial p_j}{\partial x_m}+\sum\frac{\partial\Phi}{\partial r_{ik}}\frac{\partial^2 p_j}{\partial x_i\partial x_k}+\frac{\partial^2 p_j}{\partial x_m^2}=0 \\ &(j=1,2,\dots,m-1;\ r_{ik}\neq r_{mh}). \end{aligned}$$

In den Ableitungen $\frac{\partial\Phi}{\partial x_j}, \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial r_{ik}}$ erscheinen als Argumente die Größen

$$(4)\qquad \begin{gathered} x_1, x_2, \dots, x_m, \int_0^{x_1} p_1\,dx_1, p_1, \dots, p_{m-1}, \frac{\partial}{\partial x_m}\int_0^{x_1} p_1\,dx_1, \\ \frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial p_i}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial p_{m-1}}{\partial x_{m-1}}, \frac{\partial p_1}{\partial x_m}, \dots, \frac{\partial p_{m-1}}{\partial x_m}. \end{gathered}$$

[3]) J. Schauder, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen, Fund. Math. 24 (1935) p. 213—246, insb. p. 246, Fußnote [47]).

[4]) Und nicht, wie man vermuten würde, in der zur raumartigen Fläche normalen Richtung.

Die gemischte Randwertaufgabe läßt sich nun für (3) leicht lösen, da das Auftreten der Integrale nicht störend wirkt[5]). Dabei genügen die auf $x_1 = 0$ berechneten Ableitungen von $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ der Beziehung[6])

$$\Phi = 0 \qquad (x_1 = 0). \tag{5}$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Relationen

$$\Delta_{js} = \frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} = 0 \quad (j, s = 1, 2, \dots, m-1) \tag{6}$$

bestehen. Wir bemerken, daß es dazu genügt, für die Δ_{js} ein homogenes lineares Differentialsystem aufzustellen. Aus der Eindeutigkeit dieses Systems und der Tatsache, daß die Anfangswerte und die Randwerte der Δ_{js} gleich Null sind, schließt man, daß die Δ_{js} identisch verschwinden. Diese Bemerkung hat übrigens, wenn es sich um das Cauchy'sche Problem allein handelt, schon Herr Petrowsky geäußert. Für das hier in Betracht kommende, umfassendere Randwertproblem liegen die Verhältnisse komplizierter und erfordern neue Kunstgriffe[7]).

Wir führen folgende Bezeichnungen ein. Für die Ausdrücke (4) schreiben wir nacheinander:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_{m^2+m+1} \tag{7}$$

und für

$$\begin{gathered} \frac{\partial x_1}{\partial x_j}, \frac{\partial x_2}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial x_m}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_j}\int_0^{x_1} p_1\,dx_1, \frac{\partial p_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial p_{m-1}}{\partial x_j}, \\ \frac{\partial p_j}{\partial x_m}, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_i \partial x_k}, \dots, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_{m-1}^2}, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_1 \partial x_m}, \dots, \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_{m-1}\partial x_m} \end{gathered} \tag{8}$$

ebenso

$$\xi_1^j, \xi_2^j, \dots, \xi_m^j, \xi_{m+1}^j, \dots, \xi_{m^2+m+1}^j. \tag{9}$$

---

[5]) Vgl. loc. cit. [3]), Fußnote [47]). Offensichtlich müssen dabei für S_1 und S_2 diejenigen Bedingungen erfüllt sein, die in G. R. (§§ 1, 2) formuliert wurden.

[6]) Diese Beziehung wird am Ende des Beweises benutzt.

[7]) Die Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung liefert das erste Beispiel dieser Schlußweise. Dort handelt es sich um eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung. Aus der Tatsache, daß die Lösung dieser Gleichung an einer Stelle verschwindet, folgert man, daß sie identisch verschwindet.

Diese auf den ersten Blick befremdende Bezeichnung, bei welcher zwischen den einzelnen Variablen nicht unterschieden wird, erweist sich als sehr nützlich. Sie trägt auch zum Gelingen des Beweises bei.

Das System (3) lautet jetzt in der neuen Schreibweise

$$\sum_{l=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_l}\, \xi_l^j + \frac{\partial^2 p_j}{\partial x_m^2} = 0. \tag{10}$$

Wir differenzieren (10) nach $x_s (s < m)$ und erhalten mit Beachtung von (4), (7), (8), (9)

$$\sum_{l,\varrho=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_l \partial \xi_\varrho} \frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s}\, \xi_l^j + \sum_{l=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_l} \frac{\partial \xi_l^j}{\partial x_s} + \frac{\partial^2 \dfrac{\partial p_j}{\partial x_s}}{\partial x_m^2} = 0 \tag{11}$$

$$(j, s = 1, 2, \dots, m-1).$$

Durch Vertauschung der Indizes und Subtraktion folgt

$$\begin{gathered} \sum_{l,\varrho=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_l \partial \xi_\varrho}\left(\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s}\, \xi_l^j - \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}\, \xi_\varrho^s\right) \\ + \sum_{l=1}^{m^2+m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_l}\left(\frac{\partial \xi_l^j}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi_l^s}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial^2 \Delta_{js}}{\partial x_m^2} = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Nun ist

$$\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s}\, \xi_l^j - \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}\, \xi_\varrho^s = \left(\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} - \xi_\varrho^s\right) \xi_l^j + \left(\xi_l^j - \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j}\right) \xi_\varrho^s. \tag{13}$$

Nehmen wir wieder die Formeln (4), (7), (8), (9) zur Hilfe, so ergibt sich zuerst leicht

$$\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} - \xi_\varrho^s = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \dots, 2m). \tag{14}$$

Für $\varrho = 2m+1$ erhalten wir aber

$$\frac{\partial \xi_{2m+1}}{\partial x_s} - \xi_{2m+1}^s = \frac{\partial^2}{\partial x_s \partial x_m}\int_0^{x_1} p_1\,dx_1 - \frac{\partial p_s}{\partial x_m}$$

und daraus, wegen

$$\frac{\partial p_s}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_s}{\partial x_1}\, dx_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_s}\, dx_1 - \frac{\partial p_s}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left[\int_0^{x_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_1} \right) dx_1 \right],$$

d. h.

$$(15) \qquad \frac{\partial \xi_{2m+1}}{\partial x_s} - \xi^s_{2m+1} = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \Delta_{1s}\, dx_1 .$$

Weiter ist

$$\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} - \xi^s_\varrho = \frac{\partial^2 p_i}{\partial x_s \partial x_k} - \frac{\partial^2 p_s}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p_i}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial \Delta_{is}}{\partial x_k}$$

für $\varrho > 2m+1$ und

$$\frac{\partial \xi^j_l}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi^s_l}{\partial x_j} = 0 \qquad (1 \leqq l \leqq 2m),$$

$$(16) \qquad \frac{\partial \xi^j_{2m+1}}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi^s_{2m+1}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \Delta_{js}}{\partial x_m},$$

$$\frac{\partial \xi^j_l}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi^s_l}{\partial x_j} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{\partial p_j}{\partial x_s} - \frac{\partial p_s}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \Delta_{js}}{\partial x_i \partial x_k} \quad (l > 2m+1).$$

Indem wir für $\frac{\partial \xi_\varrho}{\partial x_s} - \xi^s_\varrho$, $\frac{\partial \xi^j_l}{\partial x_s} - \frac{\partial \xi^s_l}{\partial x_j}$ und $\frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} - \xi^j_l$ die sich aus den Formeln (14), (15), (16) ergebenden Ausdrücke unter Beachtung von (13) in (12) eintragen, überzeugen wir uns, daß (12) in ein hyperbolisches lineares und homogenes System für Δ_{js} übergeht, wobei noch Integrale von der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \Delta_{1s}\, dx_1$$

linear auftreten. Es ist aber leicht den Eindeutigkeitsbeweis für lineare Differentialgleichungen auf derartige Systeme zu übertragen [8]). Somit haben wir die Beziehungen (6) bewiesen.

Es bleibt also noch zu zeigen, daß $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$ zusammen mit einer noch zu findenden Funktion p_m die Ableitungen

[8]) Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus den Abschätzungen in G. R.

einer Funktion u sind, die (2) bei den vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen erfüllt. Zu diesem Zwecke werde

$$p_m = \int_0^{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_m}\, dx_1$$

gesetzt. Dann gelten auch die Gleichungen

$$(17) \qquad \frac{\partial p_m}{\partial x_j} - \frac{\partial p_j}{\partial x_m} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1).$$

In der Tat hat man — nach der soeben bewiesenen Identität $\frac{\partial p_1}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_1}$ $(j < m)$ —

$$\frac{\partial p_j}{\partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_j}{\partial x_1}\, dx_1 = \frac{\partial}{\partial x_m} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_j}\, dx_1 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^{x_1} \frac{\partial p_1}{\partial x_m}\, dx_1 = \frac{\partial p_m}{\partial x_j}.$$

Somit sind $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}, p_m$, wegen (6), (17) Ableitungen einer Funktion u, nämlich, wie man sich leicht überzeugt, von

$$(18) \qquad u = \int_0^{x_1} p_1\, dx_1 .$$

Diese Funktion (18) erfüllt (2). Man kann nämlich die Differentialgleichungen (3) jetzt in der Form

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[\Phi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} \right] = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m-1)$$

schreiben. Es ist also

$$\Phi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2} = h(x_m).$$

Anderseits verschwindet aber $\Phi + \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$ für $x_1 = 0$, was durch Formel (5) gewährleistet wird. Somit ist $h(x_m) = 0$.

Die Lösung von (1) bzw. (2) ist durch ihre Anfangswerte und Randwerte im Kleinen eindeutig bestimmt. Denn die Differenz zweier Lösungen u' und u'' genügt einer linearen homogenen hyperbolischen Differentialgleichung mit stetig differenzierbaren

Koeffizienten. Um sich davon zu überzeugen[9]), führe man die Funktion

$$f(t)=F[x_1, x_2, \ldots, x_m, \; tu''+(1-t)u', \ldots, \; tr_{ik}''+(1-t)r_{ik}' \ldots]$$

ein. Man bekommt für die Differenz $f(1)-f(0)$ die Gleichung

$$f(1)-f(0)=\int_0^1 f'(\tau)\,d\tau=\sum_{i,k=1}^{m} A_{ik}\frac{\partial^2(u''-u')}{\partial x_i\,\partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} B_j\frac{\partial(u''-u')}{\partial x_j}+C(u''-u')$$

mit

$$\begin{aligned} A_{ik}&=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial r_{ik}} F[\ldots, \tau u''+(1-\tau)u', \ldots]\,d\tau, \\ B_j&=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial p_j} F[\ldots, \tau u''+(1-\tau)u', \ldots]\,d\tau, \qquad (19) \\ C&=\int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} F[\ldots, \tau u''+(1-\tau)u', \ldots]\,d\tau. \end{aligned}$$

Aus (19) ersieht man sofort, daß die Funktionen A_{ik}, B_j, C stetig differenzierbar sind. Da die Anfangswerte und Randwerte von $u''-u'$ verschwinden, muß $u''-u'$ wegen der Abschätzungen in G. R. identisch verschwinden[10]).

§ 2.

Wir ergreifen die Gelegenheit, um darauf aufmerksam zu machen, daß die im linearen Falle in G. R. gegebenen Abschätzungen und Existenzbeweise auch dann bestehen bleiben, wenn die Fläche S_2 charakteristisch ist. Was die Abschätzung der Integrale $\int\limits_V\cdots\int (D_1 u)^2 dx_1 \ldots dx_m$ anbetrifft, so folgt diese sofort

[9]) Dieser Beweis gilt für dreimal stetig differenzierbare Lösungen.

[10]) Die Frage ob, für hyperbolische Differentialgleichungen solche Regularitätsvoraussetzungen vorhanden sind, bei denen die Anzahl der notwendigen Differentiationen nicht mit der Anzahl der unabhängigen Variablen ins Unendliche wächst (die Herabsetzung der Regularitätsforderungen ist auf jeden Fall möglich), interessiert uns hier nicht.

aus Formel (15) in G. R., denn dann ist $\alpha(G_2)=0$, ja sogar mehr, diese Abschätzung gelingt auch dann, wenn S_2 in manchen Punkten zeitartig, in anderen aber charakteristisch sich verhält. Um die den höheren Ableitungen entsprechenden Integrale abzuschätzen, muß aber anders als in G. R. vorgegangen werden. Nach Hrn. Hadamard[11]) können wir nämlich alle Ableitungen auf einer charakteristischen Fläche S_2 berechnen. Wir sehen dies sofort ein, wenn wir neue Variablen in der Weise einführen, daß die Fläche S_2 mit $x_m=0$ übereinstimmt. Dann wird der Koeffizient A_{mm} der linearen Gleichung gleich Null auf $x_m=0$ und wir bekommen

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{m-1} A_{im}\frac{\partial p_m}{\partial x_i}+B_m p_m = &-\sum_{i,k=1}^{m-1} A_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k} \\ &-\sum_{j=1}^{m-1} B_j\frac{\partial u}{\partial x_j}-Cu+F \text{ auf } x_m=0. \end{aligned} \qquad (20)$$

Die Formel (20) kann als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ für $\pi_m(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) = p_m(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0)$ angesehen werden. Machen wir die natürliche Voraussetzung, daß die Schnittmannigfaltigkeit Γ von S_1 und S_2 nirgends zu einer bicharakteristischen Richtung parallel verläuft, so kann π_m eindeutig durch seine leicht zu findenden Anfangswerte auf dieser Schnittmannigfaltigkeit bestimmt werden. Wenn wir dann weiter unsere Differentialgleichung entsprechend oft differenzieren, so können wir auch die höheren Ableitungen auf S_2 berechnen. Unseren Abschätzungen steht dann nichts mehr im Wege.

Um den Existenzbeweis — zuerst im analytischen Falle — führen zu können, müssen wir die gesuchte Lösung aus zwei Lösungen u_1 und u_2 zusammenheften: der Lösung des Cauchy'schen Problems zwischen S_1 und einer anderen charakteristischen Fläche $\mathfrak{C}$ und der Lösung u_2 eines Goursat'schen Problems zwischen $\mathfrak{C}$ und S_2. Wir müssen also die vollkommen natürliche Voraussetzung machen, daß die zweite neben S_2 aus der Schnittmannig-

[11]) J. Hadamard, Leçons sur la propagation des ondes etc., Paris 1903, insb. p. 268. Wir benutzen hier seine übliche Schreibweise für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

faltigkeit Γ ausgehende charakteristische Fläche in das Gebiet V — in welchem die Lösung gefunden werden soll — hineinragt. Der Übergang zu nichtanalytischen Daten wird nach der alten Methode bewerkstelligt[12]).

[12]) Vgl. loc. cit. [1]), [8]). Die Behandlung anderer Randwertprobleme in einer weiteren Arbeit ist beabsichtigt.

(Reçu par la Rédaction le 27. 9. 1936).