Quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus. Gemischte Randwertaufgaben [1])

von

M. KRZYŻAŃSKI und J. SCHAUDER (Lwów).

§ 1.

Stellung des Problems. Einer der Verfasser hat vor kurzem die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung in m unabhängigen Veränderlichen bewiesen, sobald es sich um das Cauchy'sche Anfangswertproblem für nichtanalytische Differentialgleichungen und Daten handelt [2]). Wir wollen nun hier umfassendere, nämlich gemischte Randwertaufgaben für Differentialgleichungen derselben Art betrachten. Dabei werden ähnliche Methoden benutzt und weiter entwickelt.

Sei

$$(1)\quad f\left(x_1,\ldots,x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u}{\partial x_m},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\ldots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k},\ldots,\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right)=0$$

eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die linke Seite von (1) sei etwa in einer Kugel A des $(2m+m^2+1)$- dimensionalen Raumes mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_m, u, p_1, p_2, \ldots, p_m, r_{11}, \ldots, r_{ik}, \ldots, r_{mm}$ definiert. Wir setzen $a_{ik}=\frac{\partial f}{\partial r_{ik}}$ und betrachten die quadratische Form

$$(2)\quad \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\,\alpha_i\,\alpha_k$$

der Hilfsvariablen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Die a_{ik} sind als Funktionen des

[1]) Die Hauptergebnisse dieser Arbeit wurden der Polnischen Mathematischen Gesellschaft (Abteilung Lwów) in der Sitzung vom 29. 2. 1936 mitgeteilt.

[2]) J. Schauder, Das Anfangswertproblem einer quasilinearen hyperbolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung in beliebiger Anzahl von unabhängigen Veränderlichen, Fund. Math. 24 (1935) p. 213—246.

Punktes in A zu verstehen. Man nennt nun die Gleichung (1) vom normal-hyperbolischen Typus [3]), falls die quadratische Form (2) — bei konstanten a_{ik} — in die Form $\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_{m-1}^2-\beta_m^2$ linear transformiert werden kann. Dieser normal-hyperbolische Charakter von (1) soll im ganzen A gesichert sein.

Wir wollen von einer Fläche $g(x_1, x_2, \ldots, x_m)=0$ sagen, sie sei raumartig, bzw. zeitartig orientiert (oder kürzer, sie sei raum- bzw. zeitartig), je nachdem längs dieser Fläche

$$(3)\quad \mathbf{a}(g)=\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}<0,$$

bzw.

$$(4)\quad \mathbf{a}(g)=\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_k}>0.$$

Diese Definition stimmt übrigens, wie leicht einzusehen, mit der Hadamardschen [4]) überein: das Flächenstück S ist raumartig, falls in jedem Punkte von S die Tangentialebene den charakteristischen Kegel nicht schneidet; wird aber dieser Kegel von der Tangentialebene stets geschnitten, so ist S zeitartig.

Ist S gänzlich raumartig orientiert, so ist die Lösung von (1) durch ihre Cauchy'schen Anfangswerte auf S eindeutig bestimmt. Ist aber ein Teil S_2 von S zeitartig, so reicht auf S_2 die Angabe der Randwerte selbst aus. Das in der vorliegenden Arbeit zu lösende Problem besteht nun darin, *eine Lösung durch die Anfangswerte auf dem raumartig orientierten S_1 und durch die Randwerte auf dem zeitartig orientierten S_2 zu bestimmen, falls sich S_1 und S_2 in einer $(m-2)$- dimensionalen Mannigfaltigkeit schneiden* [5]).

§ 2.

Abschätzungen für lineare Differentialgleichungen; Ableitungen erster Ordnung. Wir beginnen unsere

[3]) J. Hadamard, Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, Paris 1932, insb. p. 46—48. Die dort für den linearen Fall gegebene Definition läßt sich sofort auf die allgemeinste nichtlineare Differentialgleichung übertragen.

[4]) Vgl. loc. cit. [3]), insb. p. 53. Zur Definition des charakteristischen Kegels vgl. dasselbe Buch, insb. p. 24.

[5]) Dieses Problem wurde im Falle der Wellengleichung vom Hrn. Hadamard behandelt. Vgl. loc. cit. [3]), p. 337.

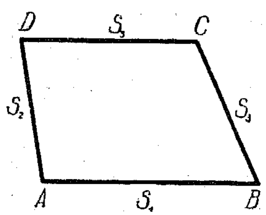
Untersuchungen mit einer linearen normal-hyperbolischen Differentialgleichung

$$(5)\quad \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x_1, x_2, \ldots, x_m)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} b_j(x_1, x_2, \ldots, x_m)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, u = f(x_1 . x_2, \ldots, x_m)$$

und nehmen die quadratische Form

$$(6)\quad \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik}\,\alpha_i\,\alpha_k$$

als *positiv definit* an. Dadurch wird die Allgemeinheit keineswegs beeinträchtigt, da man offensichtlich durch eine orthogonale Transformation immer den Spezialfall (6) herbeiführen kann. Nunmehr betrachten wir im Raume der $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ein Volumenstück V, das die Form eines Pyramidenstumpfes (Kegelstumpfes) besitzt, etwa so, wie es in der Figur gezeichnet wurde. Zum Rande von V gehören erstens die Flächen S_1 bzw. S_2, auf denen die Anfangswerte bzw. Randwerte vorgegeben sind. Die Gesamtheit S_3 der übrigen ebenen Randflächen (schematisch durch BCD dargestellt) soll raumartig orientiert sein und inbezug auf die Koordinatenachsen Neigungen besitzen, welche sich von denen der Fläche S_1 nur wenig unterscheiden. Wir nennen S_1 die untere, CD die obere Basis des Stumpfes. Es ist übrigens in unseren Überlegungen der Fall eines Kegelstumpfes mit einbegriffen, für welchen S_2 mit der ganzen Mantelfläche übereinstimmt. Weiter braucht auch S_1 nicht vorhanden zu sein, wenn es sich um Ableitungen erster Ordnung handelt; dann haben wir es mit einem Kegel schlechthin zu tun. Allen diesen Eventualitäten tragen die später zu entwickelnden Formeln Rechnung.



An Regularitätsbedingungen fordern wir: die Funktionen a_{ik}, sowie die Lösung u und ihre ersten Ableitungen sind in V stetig. Das Gebiet V lasse sich weiter in Teilgebiete zerlegen, in denen die Funktionen b_j, c, f, die ersten Ableitungen $\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}$, sowie die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ stetig sind. Es sei

$$(7)\quad \sum |a_{ik}| + \sum |b_j| + |c| + \sum \left|\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\right| \leqslant \gamma_1 .$$

Mit n_s bezeichnen wir die äußere Normale auf S_s. Die der Fläche S_3 soeben auferlegten Bedingungen sind immer dann erfüllt, wenn der Winkel zwischen n_1 und n_3 nicht zu groß wird, genauer gesagt, wenn er durch eine Zahl λ_0 beschränkt bleibt, die von γ_1, d. h. von der in Formel (7) vorkommenden Schranke abhängt:

$$(8)\quad \text{Winkel zwischen } n_1 \text{ und } n_3 \leqslant \lambda_0(\gamma_1)\ ^{6)}.$$

Unsere Aufgabe wird nun darin bestehen, *die Ableitungen auf S_3 durch die Anfangswerte auf S_1 und die Randwerte auf S_2 abzuschätzen. Die fragliche Abschätzung wird dann gelingen, wenn* (falls S_1 wirklich vorhanden ist)

$$(9)\quad \cos(n_1, x_m) \, . \, \cos(n_2, x_m) > 0,\ ^{7)}$$

eine Zusatzbedingung, die von nun an in der ganzen Arbeit als erfüllt vorausgesetzt wird. Aus (9) folgt wegen der Eigenschaften der Fläche S_3 [vgl. (8)]

$$(10)\quad \cos(n_2, x_m) \, . \, \cos(n_3, x_m) < 0.$$

Indem wir nach Friedrichs und Lewy (5) mit $\frac{\partial u}{\partial x_m}$ multiplizieren [8]) und dann über V integrieren, erhalten wir

$$(11)\quad \int\limits_{S_1+S_2+S_3} \!\!\ldots\! \int \left[2\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_m}\cos(n, x_i) - \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k}\cos(n, x_m)\right] d\sigma = \int\limits_{V}\!\ldots\!\int \Phi\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m + \int\limits_{V}\!\ldots\!\int f\frac{\partial u}{\partial x_m}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_m .$$

---

[6]) Die Schreibweise $\lambda_0(\gamma_1)$, sowie die später zu benutzende $C(\gamma_1)$, $C(\gamma_1, \gamma_2)$ etc. bedeutet, daß λ_0, C, etc. von den in Klammern befindlichen Konstanten abhängen.

[7]) Den Fall $\cos(n_1, x_m)\cos(n_2, x_m) \geqslant 0$ kann man auf den oben erwähnten leicht zurückführen. Man kann diesen Bedingungen eine geometrische Form geben.

[8]) K. Friedrichs und H. Lewy, Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangswertproblem linearer hyperbolischer

(Fortsetzung der Fußnote [8]) auf Seite 166).

Φ ist ein Polynom höchstens zweiten Grades in u, a_{ik}, b_j, c und den ersten Ableitungen dieser Funktionen. Es sei

$$g_s(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0 \tag{12}$$

die Gleichung von S_s $(s = 1, 2, 3)$. Wir führen nun für festes s neue Koordinaten $\eta_1^s, \eta_2^s, \dots, \eta_m^s$ mittels der Tranformation

$$\eta_1^s = x_1,\ \eta_2^s = x_2, \dots, \eta_{m-1}^s = x_{m-1},\ \eta_m^s = g_s(x_1, x_2, \dots, x_m) \tag{13}$$

ein. Für den unter dem Integralzeichen auf der linken Seite von (11) stehenden Ausdruck bekommen wir dann — falls man ihn nur auf S_s betrachtet — nach einigen leichten Umformungen

$$\left[\mathbf{a}(g_s)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^s}\right)^2 - \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial \eta_i^s} \frac{\partial u}{\partial \eta_k^s}\right] \cos(n_s, x_m);\ s = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Spalten wir weiter das auf der linken Seite von (11) auftretende Integral in bereits abgeschätzte und die noch abzuschätzenden Teile, so ergibt sich mit Benutzung von (14)

$$\begin{aligned} &\int_{S_2}\!\!\dots\!\int \mathbf{a}(g_2)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^3}\right)^2 \cos(n_2, x_m)\, d\sigma_2 + \int_{S_3}\!\!\dots\!\int \left[\mathbf{a}(g_3)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^3}\right)^2\right. \\ (15)\quad &\left. - \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial \eta_i^3} \frac{\partial u}{\partial \eta_k^3}\right] \cos(n_3, x_m) d\sigma_3 = \int_V\!\!\dots\!\int \left(\Phi + f \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) dx_1\, dx_2 \dots dx_m \\ &- \int_{S_1}\!\!\dots\!\int + \int_{S_2}\!\!\dots\!\int \left[\sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial \eta_i^2} \frac{\partial u}{\partial \eta_k^2} \cos(n_2, x_m)\right] d\sigma_2. \end{aligned}$$

Wegen $\mathbf{a}(g_3) < 0$ und wegen (6) ist der Ausdruck

$$\left[\mathbf{a}(g_3)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^3}\right)^2 - \sum_{i,k=1}^{m-1} a_{ik} \frac{\partial u}{\partial \eta_i^3} \frac{\partial u}{\partial \eta_k^3}\right] \cos(n_3, x_m) \tag{16a}$$

definit. Ebenso erweist sich der Ausdruck

$$\mathbf{a}(g_2)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_m^3}\right)^2 \cos(n_2, x_m) \tag{16b}$$

Differentialgleichungen, Math. Ann. 98 (1928) p. 192—204. Dort wird eine Abschätzung für

$$\sum_{i=1}^m \int_V\!\!\dots\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\, dx_2 \dots dx_m$$

im linearen Falle gegeben, falls es sich um das Cauchy'sche Problem handelt. Es gelingt hier eine entsprechende Abschätzung auch für die umfassendere gemischte Randwertaufgabe zu liefern.

in Berücksichtigung von $\mathbf{a}(g_2) > 0$ als semidefinit. Aus (10) schließen wir, daß (16a) und (16b) dasselbe Vorzeichen besitzen. Da ferner (16a) auch in $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial u}{\partial x_m}$ definit ist, so bekommt man aus (15) — man beachte auch (7) —

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \int_{S_3}\!\!\dots\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\sigma_3 \leqslant C(\gamma_1)\left\{\sum_{i=1}^m \int_V\!\!\dots\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\, dx_2 \dots dx_m\right. \\ (17)\quad &+ \int_V\!\!\dots\!\int f^2 dx_1\, dx_2 \dots dx_m + \int_{S_1}\!\!\dots\!\int \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^2\right] d\sigma_1 \\ &\left. + \int_{S_2}\!\!\dots\!\int \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_i^2}\right)^2 + u^2\right] d\sigma_2\right\}. \end{aligned}$$

Sei jetzt $S(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, eine eindimensionale Schar von Flächenstücken mit $S(0) = S_1$, $S(1) = S_3$, die in ihrer Gesamtheit das ganze V erschöpfen. Dann gilt eine der Formel (17) ähnliche Abschätzung für jedes $S(t)$[9]:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \int_{S(t)}\!\!\dots\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\sigma(t) \leqslant C(\gamma_1)\left\{\sum_{i=1}^m \int_{V(t)}\!\!\dots\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\, dx_2 \dots dx_m\right. \\ (18)\quad &+ \int_{V(t)}\!\!\dots\!\int f^2\, dx_1\, dx_2 \dots dx_m + \int_{S_1}\!\!\dots\!\int \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^2\right] d\sigma_1 \\ &\left. + \int_{S_2}\!\!\dots\!\int \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_i^2}\right)^2 + u^2\right] d\sigma_2\right\}. \end{aligned}$$

Integrieren wir nun (18) nach t von 0 bis 1, so erhalten wir, falls die „Höhe" des Stumpfes d. i. die größte Entfernung zwischen S_1 und S_3 nicht zu groß ist, etwa für

$$h \leqslant h_0(\gamma_1), \tag{19}$$

die Abschätzungen

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^m \int_V\!\!\dots\!\int \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx_1\, dx_2 \dots dx_m \leqslant C(\gamma_1)\left\{\int_V\!\!\dots\!\int f^2\, dx_1\, dx_2 \dots dx_m\right. \\ (20)\quad &\left. + \int_{S_1}\!\!\dots\!\int \left[\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 + u^2\right] d\sigma_1 + \int_{S_2}\!\!\dots\!\int \left[\sum_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta_i^2}\right)^2 + u^2\right] d\sigma_2\right\}, \end{aligned}$$

---

[9]) Mit $V(t)$ bezeichnen wir den zwischen S_1 und $S(t)$ gelegenen Teil von V; $d\sigma(t)$ ist das der Fläche $S(t)$ entsprechende Differential.

woraus wegen (17) auch auf S_3

(21) $$\sum_{i=1}^{m}\int\underset{S_3}{\dots}\int\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\sigma_3 \leqslant \text{rechte Seite in } (20)$$

folgt [10]).

§ 3.

Lineare Differentialgleichungen; Abschätzungen der Ableitungen höherer Ordnung. Wir wollen uns künftig mit dem Fall beschäftigen, wo die raumartige Fläche S_1 wirklich vorhanden ist. S_2 schneidet S_1 in einer $(m-2)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit Γ. Wir setzen voraus, daß Γ nicht geschlossen ist. Dies genügt. Denn ist Γ geschlossen, handelt es sich also um einen Kegelstumpf mit S_2 als der Mantelfläche, so kann man das Innere, d. h. unser Volumenstück V, dachziegelartig in Volumenstücke V^r zerlegen, bei denen die entsprechenden Γ^r nicht geschlossen sind. Indem wir dann die verlangte Abschätzung der höheren Ableitungen in jedem V^r einzeln vornehmen, bekommen wir offensichtlich eine ähnliche Abschätzung im ganzen V. Ist nun Γ nicht geschlossen, so besitzt die durch die Gleichungen

(22) $x_1=\eta_1,\ x_2=\eta_2,\dots,x_{m-1}=\eta_{m-1},\ g_2(x_1,x_2,\dots x_m)=\eta_m$ [11])

definierte Koordinatentransformation $\eta=\Psi(x)$ im ganzen V eine nirgends singuläre inverse Transformation $x=\Psi^{-1}(\eta)$

(23) $\eta_1=x_1,\ \eta_2=x_2,\dots,\ \eta_{m-1}=x_{m-1},\ \varphi(\eta_1,\ \eta_2,\dots,\eta_m)=x_m,$

welche Ableitungen von ebenso hoher Ordnung zuläßt, wie die Funktion g_2. Für

(24) $$\bar{u}(\eta_1,\ \eta_2,\dots,\eta_m)=u(x_1,\ x_2,\dots,x_m)\ ^{12})$$

[10]) Aus (15) läßt sich wegen (20) und (21) eine analoge Abschätzung auch für $\int\underset{S_2}{\dots}\int\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_m^2}\right)^2 d\sigma_2$ erhalten. Doch wird dies im folgenden nicht benutzt.

[11]) Formel (22) ist mit der Formel (13) für $s=2$ identisch. Wir haben es vorgezogen, zwecks Vermeidung vieler Indices η_i statt η_i^2 zu schreiben. $g_2=0$ ist die Gleichung der Fläche S_2 [vgl. Formel (12)].

[12]) Wir schreiben hier und an manchen anderen Stellen $\bar{u}$ statt u, um anzudeuten., daß es sich nach ausgeführter Koordinatentransformation eigentlich um eine andere Funktion handelt. Entsprechende Bezeichnungen sollte man auch in den Koefizienten a_{ik}, b_j etc. einführen. Doch ist dies für das Folgende belanglos.

bekommt man in den Variablen $\eta_1,\ \eta_2,\dots,\ \eta_m$ die Differentialgleichung

(25) $$\begin{aligned}&\sum_{j,s=1}^{m-1}a_{js}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta_j\,\partial\eta_s}+2\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}a_{jk}\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta_j\,\partial\eta_m}\\&+\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\frac{\partial g_2}{\partial x_i}\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta_m^2}=\sum_{r=1}^{m}b_r'\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_r}-c\bar{u}+f.\end{aligned}$$

Für das Folgende muß nun beachtet werden, daß auf S_2 nur die Ableitungen $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_1},\dots,\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_{m-1}}$ — nicht aber $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_m}$ — als gegeben zu betrachten sind. Demzufolge differenzieren wir (25) nach

$$\eta_1,\ \eta_2,\dots,\ \eta_{m-1}$$

und bekommen für $l\leqslant m-1$

(26) $$\begin{aligned}&\sum_{j,s=1}^{m-1}a_{js}\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\partial\eta_s}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_l}+2\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1}a_{jk}\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\,\partial\eta_m}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_l}\\&+\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\frac{\partial g_2}{\partial x_i}\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\frac{\partial^2}{\partial\eta_m^2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_l}=\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\varrho_{jh}\frac{\partial}{\partial\eta_j}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_h}\\&+\left[\frac{\partial}{\partial\eta_l}\left(\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\frac{\partial g_2}{\partial x_i}\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\right)\right]\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta_m^2}+\dots;\ l\leqslant m-1.\end{aligned}$$

Die nicht hingeschriebenen Glieder enthalten Ableitungen von höchstens erster Ordnung. Das störende Glied

$$\left[\frac{\partial}{\partial\eta_l}\left(\sum_{i,k=1}^{m}a_{ik}\frac{\partial g_2}{\partial x_i}\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\right)\right]\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta_m^2}$$

kann nun leicht mit Hilfe von (25) beseitigt werden, da in (25) der Koeffizient von $\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\eta_m^2}$ nirgends Null ist. Man bekommt also

(27) $$\begin{aligned}&\text{linke Seite in } (26)=\sum_{h=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m}\varrho_{jh}'\frac{\partial}{\partial\eta_j}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_h}\\&\quad+\text{Glieder höchstens erster Ordnung in }\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_1},\dots,\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_m}.\end{aligned}$$

Zu den alten Variablen $x_1,x_2,\dots,x_m$ zurückkehrend erhalten wir aus (27) für $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_1},\ \frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_2},\dots\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_{m-1}}$ Differentialgleichungen von der Form [13])

[13]) $\frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta_j}$ wird in den Formeln (28) (29) etc. als Funktion der Variablen $x_1,x_2,\dots,x_m$ betrachtet.

$$(28)\quad \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_k}\frac{\partial\bar u}{\partial\eta_l} + \sum_{h=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m} b''_{jh}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\bar u}{\partial\eta_h} + \sum_{h=1}^{m-1} c'_h\frac{\partial\bar u}{\partial\eta_h} = f'.$$

Wir multiplizieren (28) mit $\dfrac{\partial}{\partial x_m}\dfrac{\partial\bar u}{\partial\eta_l}$, summieren über $l\,(l\leqslant m-1)$ und bekommen, genau so wie in § 2 verfahrend,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m-1}\int\limits_{S_3}\!\!\cdots\!\!\int\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\bar u}{\partial\eta_l}\right)^2 d\sigma_3 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m-1}\int\limits_{V}\!\!\cdots\!\!\int\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\bar u}{\partial\eta_l}\right)^2 dx_1\,dx_2\ldots dx_m$$

$$(29)\quad \leqslant \text{Konst.}\Big\{\int\limits_V\!\!\cdots\!\!\int\Big[f^2+\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)^2\Big]dx_1\,dx_2\ldots dx_m + \sum_{j\leq 2}\int\limits_{S_1}\!\!\cdots\!\!\int (D_j u)^2 d\sigma_1$$
$$+\int\limits_{S_2}\!\!\cdots\!\!\int\Big[u^2+\sum_{i=1}^{m-1}\Big(\frac{\partial\bar u}{\partial\eta_i}\Big)^2+\sum_{i,k=1}^{m-1}\Big(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\eta_i\,\partial\eta_k}\Big)^2\Big]d\sigma_2\Big\}.$$

Mit Rücksicht auf (25) läßt sich aber $\dfrac{\partial^2\bar u}{\partial\eta_m^2}$ durch die anderen Ableitungen ausdrücken und man gelangt somit auch zur Abschätzung

$$(30)\quad \int\limits_V\!\!\cdots\!\!\int\left(\frac{\partial^2\bar u}{\partial\eta_m^2}\right)^2 dx_1\,dx_2\ldots dx_m \leqslant \text{rechte Seite in (29)}\,^{14}).$$

Die Abschätzung der dritten und noch höheren Ableitungen wird nach demselben Schema bewerkstelligt. Für die Abschätzung von

$$\int\limits_V\!\!\cdots\!\!\int (D_h u)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m \quad\text{mit } h\leqslant m+2\ ^{15})$$

genügt die Kenntnis der Schranken von $D_{h-1}a_{ik}$, $D_{h-1}b_j$, $D_{h-1}c$ etc. Es ist nun ein springender Punkt der Methode — wie dies bereits in der in § 1 zitierten Arbeit genau auseinandergesetzt wurde [16]) — daß, falls es sich um höhere Ableitungen, etwa um $D_{m+\varrho}u$ mit $\varrho\geqslant 3$ handelt, man zur fraglichen Abschätzung

[14]) Aus (29), (30) folgen sofort Abschätzungen für alle
$$\int\limits_V\!\!\cdots\!\!\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right)^2 dx_1\,dx_2\ldots dx_m.$$

[15]) D_h das Zeichen für irgendeine Ableitung h-ter Ordnung.

[16]) Loc. cit. [2]), insb. p. 222—226, §§ 5, 6.

von $\int\limits_V\!\cdots\!\int (D_{m+\varrho}u)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m$ auch dann gelangt, wenn man nur über eine Kenntnis der Schranken für

$$\int\limits_V\!\!\cdots\!\!\int (D_{h+m}a_{ik})^2 dx_1\,dx_2\ldots dx_m,\quad \int\limits_V\!\!\cdots\!\!\int (D_{m+h}b_j)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m$$

etc., mit $h\leqslant\varrho-1$ verfügt. Da dieses Verfahren fast ohne Änderung auch dem jetzigen Falle angepaßt werden kann, überlassen wir in diesem Punkte den Beweis dem Leser. Ein Umstand darf dabei nicht vergessen werden. Da auf S_2 Ableitungen beliebiger Ordnung von $\bar u$ nur nach den Variablen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{m-1}$ bekannt sind, so ergibt das oben erwähnte Verfahren unmittelbar Abschätzungen für [17])

$$\int\limits_V\!\!\cdots\!\!\int (\underset{\eta}{D}_{m+\varrho}\bar u)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m \quad\text{bzw. für}\quad \int\limits_{S_3}\!\!\cdots\!\!\int (\underset{\eta}{D}_{m+\varrho}\bar u)^2\,d\sigma_3,$$

wobei in $\underset{\eta}{D}_{m+\varrho}\bar u$ höchstens eine Differentiation nach η_m vorkommen kann. Um die anderen Ableitungen $\underset{\eta}{D}_{m+\varrho}\bar u$ abzuschätzen, kann Induktion nach ϱ angewandt werden. Man nehme an, daß alle $\int\limits_V\!\cdots\!\int (D_{m+\varrho-1}u)^2 dx_1\,dx_2\ldots dx_m$ bereits abgeschätzt sind, wie auch diejenigen $\int\limits_V\!\cdots\!\int (\underset{\eta}{D}_{m+\varrho}\bar u)^2\,dx_1\,dx_2\ldots dx_m$, bei welchen die Differentiation nach η_m höchstens $(p-1)$- mal vorkommt $(p-1>0)$. Schreibt man das betreffende $\underset{\eta}{D}_{m+\varrho}\bar u$ in der Form

$$\underset{\eta}{D}_{m+\varrho}\bar u = \frac{\partial^2}{\partial\eta_m^2}\Delta_{m+\varrho-2}\bar u,$$

wobei Δ wieder ein Zeichen für eine Ableitung bedeutet — so hat man für $\Delta_{m+\varrho-2}\bar u$ die Differentialgleichung

$$(31)\quad \begin{aligned}&\sum_{j,s=1}^{m-1} a_{js}\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\,\partial\eta_s}\Delta_{m+\varrho-2}\bar u + 2\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{m-1} a_{jk}\frac{\partial g_2}{\partial x_k}\frac{\partial^2}{\partial\eta_j\,\partial\eta_m}\Delta_{m+\varrho-2}\bar u\\ &\quad+\sum_{j,s=1}^{m} a_{js}\frac{\partial g_2}{\partial x_j}\frac{\partial g_2}{\partial x_s}\frac{\partial^2}{\partial\eta_m^2}\Delta_{m+\varrho-2}\bar u = \Omega.\end{aligned}$$

[17]) Mit $\underset{\eta}{D}_i\bar u$ bezeichnen wir irgendeine Ableitung i-ter Ordnung von $\bar u$ nach den Variablen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$.

Hier läßt sich nach der zitierten Arbeit[18]) $\int\limits_V \cdot\cdot \int \Omega^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$ durch die entsprechenden Daten und ihre Ableitungen bis zu $(m+\varrho-1)$- er Ordnung abschätzen. Da auch eine Abschätzung für $\frac{\partial^2}{\partial\eta_j \partial\eta_s} \Delta_{m+\varrho-2}\bar{u}$ mit $j \leqslant m-1$, $s \leqslant m$ bekannt ist, so schließt man aus (31) auf das Vorhandensein einer Schranke für

$$D_{\substack{m+\varrho \\ \eta}}\bar{u} = \frac{\partial^2}{\partial\eta_m^2} \Delta_{m+\varrho-2}\bar{u}.$$

Als Endergebnis erhalten wir, falls

$$|a_{ik}| \leqslant \gamma_1,\ |b_j| \leqslant \gamma_1,\ |D_1 a_{ik}| \leqslant \gamma_1,\ |c| \leqslant \gamma_1,$$
$$|D_{h'} a_{ik}| \leqslant \gamma_2,\ |D_{h'} b_j| \leqslant \gamma_2,\ |D_{h'} c| \leqslant \gamma_2;\ (h' \leqslant m+1),$$

$$(32)\quad \sum \int\limits_V \cdot\cdot \int \left[(D_{h+m} a_{ik})^2 + (D_{h+m} b_j)^2 + (D_{h+m} c)^2\right] dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant \gamma_2;$$
$$(h \leqslant \varrho - 1),$$

die Abschätzung

$$(33)\quad \begin{aligned} &\sum_{h=0}^{m+\varrho} \int\limits_V \cdot\cdot \int (D_h u)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant C(\gamma_1, \gamma_2) \Big[\sum_{h=0}^{m+\varrho} \int\limits_{S_1} \cdot\cdot \int (D_h u)^2\, d\sigma_1 \\ &+ \sum_{\substack{h=0 \\ \eta \neq \eta_m}}^{m+\varrho} \int\limits_{S_2} \cdot\cdot \int (D_{\substack{h \\ \eta}} \bar{u})^2 d\sigma_2 + \sum_{h=0}^{m+\varrho-1} \int\limits_V \cdot\cdot \int (D_h f)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \Big]\end{aligned}$$ [19]).

Für diejenigen Ableitungen $D_{\substack{h \\ \eta}}\bar{u}$, bei denen die Differentiation nach η_m höchstens einmal vorkommt, gilt noch

$$(34)\quad \sum_{h=0}^{m+\varrho} \int\limits_{S_3} \cdot\cdot \int \left(D_{\substack{h \\ \eta}}\bar{u}\right)^2 d\sigma_3 \leqslant \text{rechte Seite in (33).}$$

Einige Bemerkungen sind hier noch am Platze:

I. *Ist h die Höhe des Stumpfes V, so gilt unter Voraussetzung von* (32) *genauer*

[18]) Loc. cit. [2]), insb. p. 224—226.

[19]) Man könnte eine ähnliche Abschätzung auch für alle $\int\limits_{S_2} \cdot\cdot \int \left(D_h u\right)^2 d\sigma_2$ bekommen.

$$(35)\quad \sum_{h=0}^{m+\varrho} \int\limits_V \cdot\cdot \int (D_h u)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant h\,[\text{rechte Seite in (33)}]$$ [20]).

Für solche Integrale $\int\limits_V \cdot\cdot \int (D_{\substack{h \\ \eta}}\bar{u})^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m$, bei welchen die Differentiation nach η_m höchstens einmal vorkommt, folgt dies sofort aus (34) durch Integration nach t. Wegen (31) ergibt sich durch Induktion (vgl. oben) dasselbe auch für die anderen Integrale.

II. Auf S_1 — das man sich der Einfachheit halber als das Ebenenstück $x_m = 0$ denken kann — sind nur die Ableitungen der Form $\frac{\partial^r u}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_{m-1}^{r_{m-1}}}$ bzw. der Form $\frac{\partial^{r+1} u}{\partial x_1^{r_1} \ldots \partial x_{m-1}^{r_{m-1}} \partial x_m}$ vorgegeben. *Alle anderen Ableitungen auf S_1 müssen erst aus* (5) *durch Differentiation berechnet und abgeschätzt werden.* Die Voraussetzungen, die dabei zu machen sind, sowie den Beweis der entsprechenden Abschätzungen entnehme man wörtlich der unter [2]) zitierten Arbeit (insbesondere p. 226—229).

III. Damit die Abschätzung von $D_{m+\varrho}u$ gelingt, müssen nur die Ableitungen $D_h u$ mit $h \leqslant m+\varrho$ und die Ableitungen $D_h a_{ik}$, $D_h b_j$, $D_h c$, $D_h f$ für $h \leqslant m+\varrho-2$ als stetig vorausgesetzt werden. Was die Ableitungen $D_{m+\varrho+1}u$ und $D_{m+\varrho-1}a_{ik}$, $D_{m+\varrho-1}b_j$, $D_{m+\varrho-1}c$, $D_{m+\varrho-1}f$ anbetrifft, so genügt es sie als *abteilungsweise stetig* anzunehmen [21]).

§ 4.

Kompatibilitätsbedingungen. Von nun an wollen wir annehmen, daß die Fläche S_1 mit $x_m = 0$ und die Fläche S_2 mit $x_1 = 0$ übereinstimmt. Dies soll so verstanden werden, daß nach einer eventuellen Koordinatentransformation die Ebenen $x_m = 0$, $x_1 = 0$ in zwei Flächen S_1', S_2' übergehen (wobei zugleich auch die Differentialgleichung sich ändert) in der Weise, daß nunmehr die in den vorhergehenden Paragraphen näher bespro-

[20]) Diese stärkere Abschätzung wird beim Existenznachweis für quasilineare Differentialgleichungen benutzt [vgl. loc. cit. [2]), insb. p. 234, Bemerkung 3° und p. 244, Formel (39)].

[21]) Wird in § 8 benutzt [vgl. Fußnote [15])].

chenen Voraussetzungen für das Bestehen der Abschätzungen in den neuen Koordinaten erfüllt sind. Offensichtlich bestehen dann die analogen Abschätzungen auch in den alten Koordinaten. Es möge noch betont werden, daß die Annahme, S_1 bzw. S_2 stimme mit $x_m = 0$ bzw. $x_1 = 0$ überein, nicht unbedingt notwendig ist; sie erleichtert aber sehr die folgenden Erwägungen.

Wir suchen eine Lösung, für welche

$$\begin{aligned} &u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}), \\ (36)\qquad &\frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0) = \psi(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}), \\ &u(0, x_2, \ldots, x_{m-1}, x_m) = \chi(x_2, x_3, \ldots, x_m). \end{aligned}$$

Es ist klar, daß, falls eine stetige Lösung unseres Problems gesucht wird, die Daten auf den Ebenen $x_m = 0$ und $x_1 = 0$ der folgenden Kompatibilitätsbedingung nullter Ordnung genügen müssen:

$$(37)\qquad \varphi(0, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \chi(x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, 0).$$

Sollen auch die Ableitungen erster Ordnung stetig sein, so muß

$$(38)\qquad \psi(0, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \left(\frac{\partial \chi}{\partial x_m}\right)_{x_m = 0}$$

bestehen. Wir bezeichnen (38) als Kompatibilitätsbedingung erster Ordnung. Aus (36) berechnet man alle Ableitungen der zweiten Ordnung auf S_1 bis auf $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}\right)_{x_m = 0} = \psi^{(2)}$. Diese wird aus der Differentialgleichung (5) selbst berechnet. Die Stetigkeit der zweiten Ableitungen erfordert also

$$\psi^{(2)}(0, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x_m^2}\right)_{x_m = 0}.$$

Dies ist die Kompatibilitätsbedingung zweiter Ordnung. Indem wir (5) $(k-2)$-mal nach x_m differenzieren, berechnen wir in derselben Weise $\psi^{(k)} = \left(\frac{\partial^k u}{\partial x_m^k}\right)_{x_m = 0}$. Man folgert daraus die Kompatibilitätsbedingung k-ter Ordnung

$$(39)\qquad \psi^{(k)}(0, x_2, \ldots, x_{m-1}) = \left(\frac{\partial^k \chi}{\partial x_m^k}\right)_{x_m = 0}.$$

§ 5.

Analytische Daten, linearer Fall. Zuerst soll der Beweis der Lösbarkeit unseres Problems im linearen Falle geliefert werden. Wir nehmen die Koeffizienten a_{ik}, b_j, c der Gleichung (5), sowie auch die Anfangsdaten φ, ψ, χ, f als „genügend analytisch" an. D. h. genauer: die genannten Funktionen sollen sich in jedem Punkte ihres Definitionsgebietes in Potenzreihen entwickeln lassen mit einem Konvergenzradius, der größer als der Durchmesser dieses Gebietes ist. Mit anderen Worten, wir beschränken uns auf solche φ, ψ, χ, f, für welche der Konvergenzradius oberhalb einer festen, von der Wahl des Anfangspunktes unabhängigen Schranke liegt; eine Bedingung, die z. B. dann erfüllt ist, wenn diese Daten sich auf Polynome reduzieren. Überdies sollen die Anfangsdaten Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung k einschließlich genügen (vgl. § 4).

Nach dem Hilfssatze von Schauder[22]) gibt es ein $\delta_1 > 0$, das von den Daten φ, ψ, χ und f[23]) nicht abhängt — wohl aber von den übrigen Koeffizienten der Gleichung — so daß Folgendes statthat: in dem ganzen zylinderartigen Streifen V_1 von der Höhe δ_1 mit $x_m = 0$ als der unteren Basis gibt es eine analytische Lösung u' von (5) mit den Anfangsdaten $u' = \varphi$, $\frac{\partial u'}{\partial x_m} = \psi$ auf $x_m = 0$. Dabei kann u' um jeden Punkt innerhalb V_1 in eine Potenzreihe entwickelt werden, deren Konvergenzradius wieder oberhalb einer von φ, ψ, f und χ[24]) unabhängigen Schranke liegt. Sei Γ der Durchschnitt (vgl. § 3) von S_1 und S_2. Wir betrachten die durch Γ hindurchgehende singularitätenfreie charakteristische Fläche G von (5), welche ins Innere von V_1 ragt. G teilt V_1 in zwei Gebiete, von welchen wir dasjenige W' ins Auge fassen, welches zwischen S_1 und G gelegen ist. Wir setzen $u = u'$ in W', womit insbesondere u auf G selbst definiert wird. Es bleibt also ein Goursat'sches Problem zwischen G und S_2 zu lösen, indem wir dort eine Lösung u'' von (5) bestimmen wollen,

---

22) Vgl. loc. cit. [2]), insb. p. 229—231.

23) Vgl. Formel (36). Es ist zweckmäßig im linearen Falle f öfters zu den Daten mitzurechnen.

24) Die Unabhängigkeit des Konvergenzradius von χ folgt daraus, daß χ in dem betreffenden Hilfssatze überhaupt nicht vorkommt.

die auf G mit u' und auf S_2 mit χ übereinstimmt. Wir setzen dann $u = u''$ zwischen G und S_2, womit die Randwertaufgabe vollständig gelöst wird.

Die Fortsetzung dieses Paragraphen ist dem Nachweis gewidmet, daß es eine andere Zahl $\delta_2 > 0$ gibt, so daß in jeder Kugel vom Radius δ_2, deren Mittelpunkt auf Γ gelegen ist, u'' sich in eine Potenzreihe entwickeln läßt. Dabei ist wieder δ_2 von φ, ψ, χ, f unabhängig. Um dies zu zeigen, nehmen wir eine Variablentransformation vor, derart, daß die Fläche G in $y_1 = 0$ und die Fläche S_2 in $y_2 = 0$ übergeht. Dabei können nach Hrn. Hadamard die neuen Variablen so gewählt werden[25]), daß die transformierte Gleichung die Form

$$\frac{\partial^2 \bar{u}''}{\partial y_1 \partial y_2} = H + f_1(y_1, y_2, \ldots, y_m) \tag{40}$$

besitzt. H ist ein linearer Ausdruck in $\bar{u}''$ und den ersten und zweiten Ableitungen von $\bar{u}''$, wobei aber in H keine Derivation nach y_1 vorkommt.

Bei dem Goursat'schen Problem für (40) handelt es sich nun um die Konstruktion einer Lösung $\bar{u}''$, die sich auf den Ebenen $y_1 = 0$ bzw. $y_2 = 0$ auf gegebene Funktionen $v(y_2, y_3, \ldots, y_m)$ bzw. $w(y_1, y_3, \ldots, y_m)$ reduziert Offensichtlich ist der neue Konvergenzradius r von v, w und f_1, nach der ausgeführten Koordinatentransformation, wieder nur von den Koeffizienten von H abhängig. Aus diesem Grunde können wir unsere Aufgabe vereinfachen, indem wir $v \equiv 0$, $w \equiv 0$ annehmen. Dadurch wird höchstens f_1 geändert und die oben auferlegte Bedingung über seinen Konvergenzradius bleibt weiter bestehen. Wir suchen nun die Gleichung (40) durch eine nach Potenzen in y_1 fortschreitende Reihe[25])

$$\bar{u}'' = a_0 + a_1 y_1 + \ldots + a_h y_1^h + \ldots \tag{42}$$

zu lösen. Man rechnet sofort die einzelnen a_h aus und es bleibt noch der Konvergenznachweis für die Reihe (42) in einer Kugel von einem festen Radius ϱ. Zu diesem Zwecke nehme man für H eine Majorante der Form

[25]) Vgl. loc. cit. [3]), insb. p. 107.

$$M \cdot \frac{\bar{u}'' + \sum\limits_{i=2}^{m} p_i + \sum\limits_{i,k=2}^{m} p_{ik}}{1 - \dfrac{\dfrac{y_1}{\alpha} + y_2 + \cdots + y_m}{r}}, \tag{43}$$

wobei $p_i = \dfrac{\partial \bar{u}''}{\partial y_i}$, $p_{ik} = \dfrac{\partial^2 \bar{u}''}{\partial y_i \partial y_k}$ ist, und für f_1 eine der Form

$$\frac{K}{1 - \dfrac{\dfrac{y_1}{\alpha} + y_2 + \ldots y_m}{r}}. \tag{44}$$

Dann genügt es zu beweisen, daß die Gleichung[26])

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial y_1 \partial y_2} = \frac{MZ + M\left(\sum\limits_{i=2}^{m} \dfrac{\partial Z}{\partial y_i} + \sum\limits_{i,k=2}^{m} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial y_i \partial y_k}\right) + K}{1 - \dfrac{\dfrac{y_1}{\alpha} + y_2 + \ldots + y_m}{r}} \tag{45}$$

eine Lösung mit positiven Koeffizienten besitzt, deren Konvergenzradius von K unabhängig ist. Man setze

$$X = y_1 + \alpha \sum_{i=2}^{m} y_i \tag{46}$$

und suche eine Lösung Z von (45) der Gestalt $Z(X)$. Dann reduziert sich (45) auf die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 Z}{dX^2} = \frac{MZ + M\alpha(m-1)\dfrac{dZ}{dX} + K}{L - \dfrac{X}{r}}, \tag{47}$$

$$L = \alpha - N\alpha^2, \quad N = \frac{(m-1)(m-2)}{2}.$$

Man wählt α derart, daß $L > 0$.

Die Gleichung (47) besitzt eine Lösung, die mitsamt ihrer ersten Derivierten für $X = 0$ verschwindet. Diese Lösung ist re-

[26]) Für das Folgende ist es wesentlich, daß in der Differentialgleichung (45) die Zahl K vorkommt, welche die Majorante (44) für f_1 charakterisiert.

gulär für $|X| \leqslant Lr$, d. h. in einem von K unabhängigen Intervall [27]). Man bekommt auf diese Weise die verlangte Majorante für (42) und daraus leitet man durch Übergang zu den alten Koordinaten die Existenz einer Zahl δ_2 mit den verlangten Eigenschaften ab.

Wir fassen das bisherige Ergebnis dieses Paragraphen zusammen: *es gibt eine Zahl $\delta > 0$* [28]), *die von den auf S_1 und S_2 gewählten Daten und von f unabhängig ist, derart daß für $0 \leqslant x_m \leqslant \delta$ die Lösung u der hier betrachteten gemischten Randwertaufgabe existiert.*

Die Ableitungen von u bis zur Ordnung k einschließlich sind stetig, denn die eventuellen Sprünge können nur auf der charakteristischen Fläche G vorhanden sein. Der stetige Übergang über G ist aber eine unmittelbare Folgerung aus den vorausgesetzten Kompatibilitätsbedingungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich [29]). *Was die Ableitungen höherer Ordnung anbelangt, so sind sie zwischen S_1 und G und zwischen G und S_2 vorhanden und dort stetig.* Sie können aber wohl auf G Diskontinuitäten besitzen.

§ 6.

Hilfssätze aus der Theorie der reellen Funktionen. Der Übergang zu nichtanalytischen Daten und Koeffizienten wird durch einige Hilfssätze aus der Theorie der reellen Funktionen ermöglicht, mit denen wir uns jetzt kurz befassen wollen.

Definitionen: a) Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ nennt man totalstetig im Sinne des Hrn. Tonelli, wenn sie sich auf fast jeder achsenparallelen Geraden als totalstetig im gewöhnlichen Sinne erweist und ihre fast überall vorhandenen Ableitungen erster Ordnung im Definitionsbereiche integrierbar sind.

b) Sei $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine Funktion, die quadratisch integrierbare Ableitungen bis zu k-ter Ordnung einschließlich fast überall besitzt. Die Ableitungen von f bis zu $(k-1)$-er Ordnung einschließlich sollen in V im Sinne des Hrn. Tonelli totalstetig sein. Die Klasse dieser Funktionen wird im Folgenden mit R_k bezeichnet.

[27]) Wohl aber ist sie von M, d. h. von der in der Majorante (43) von H vorkommenden Konstante abhängig.

[28]) $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$.

[29]) Vgl. loc. cit. [3]), p. 110.

Hilfssatz I. Sei f eine Funktion der Klasse R_k im m-dimensionalen Würfel Q: $-1 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Dann gibt es eine Folge von Polynomen p_j derart, daß

$$\lim_{j=\infty} \int \underset{Q}{\cdots} \int (D_h p_j - D_h f)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_m = 0; \quad 0 \leqslant h \leqslant k. \tag{48}$$

Zum Beweise werde

$$\Phi_l(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(y_1, y_2, \ldots, y_m)$$

gesetzt, mit $y_i = x_i\left(1 - \frac{1}{l}\right)$. Die Funktionen Φ_l gehören wieder zu R_k; sie sind nicht nur in Q, sondern sogar in dem etwas größeren Würfel $|x_i| \leqslant \frac{1}{1 - {}^1/_l}$ definiert. Überdies hat man

$$\lim_{l=\infty} \int \underset{Q}{\cdots} \int (D_h \Phi_l - D_h f)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_m = 0 \quad (0 \leqslant h \leqslant k).$$

Es genügt also den Hilfssatz nur für die Funktionen Φ_l zu beweisen. Sei

$$\Phi_{sl}(x_1, x_2, \ldots x_m) = \frac{\int \underset{Q_s}{\cdots} \int \Phi_l \, d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_m}{s^{-m}} \quad (s = 1, 2, \ldots). \tag{49}$$

Q_s ist der Würfel $|x_i - \xi_i| \leqslant \frac{1}{s}$. Die Ableitungen von Φ_{sl} bis zur Ordnung k einschließlich, werden durch Differentiation unter dem Integralzeichen in (49) gewonnen, d. h. es ist

$$D_h \Phi_{sl} = \frac{\int \underset{Q_s}{\cdots} \int D_h \Phi_l \, d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_m}{s^{-m}} \quad (0 \leqslant h \leqslant k). \tag{50}$$

Man hat überdies

$$\lim_{h=\infty} \int \underset{Q}{\cdots} \int (D_h \Phi_{sl} - D_h \Phi_l)^2 dx_1 dx_2 \ldots dx_m = 0.$$

Nun sind die Funktionen Φ_{sl} mitsamt ihren Ableitungen $D_h \Phi_{sl}$ $(h \leqslant k)$ stetig [30]). Nach einem bekannten Satze gibt es also eine Folge von Polynomen, die mitsamt ihren Ableitungen bis zur

[30]) Dies folgt sofort aus der Darstellung (50) für diese Ableitungen.

Ordnung k einschließlich gleichmäßig gegen Φ_{sl} und deren entsprechende Ableitungen konvergieren. Wir erhalten schließlich durch das Diagonalverfahren eine Polynomfolge, die (48) erfüllt.

Bemerkung. Es ist klar, daß unser Hilfssatz auch dann bestehen bleibt, wenn man Q durch das in dem vorhergehenden Paragraphen betrachtete Volumenstück V ersetzt.

Es ist nun notwendig das vorhergehende Resultat noch zu vervollständigen:

Hilfssatz II. Setzen wir voraus, daß f in V den Bedingungen des Hilfssatzes I genügt und in einem Pyramidenstumpf $W \subset V$, der mit V die gemeinsame untere Basis hat, *stetige* Ableitungen bis zur Ordnung r einschließlich besitzt. In diesem Falle konvergieren die Ableitungen der r ersten Ordnungen der Approximationspolynome des Hilfssatzes I in W *gleichmäßig* gegen die entsprechenden Ableitungen von f.

Der einfache Beweis wird dem Leser überlassen.

Hilfssatz III. Voraussetzungen: Die Funktionen f_s gehören alle in V derselben Klasse R_k mit $k \geqslant m+1$ an; überdies sei

$$\int_V \cdots \int (D_h f_s)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant \text{Konst.} \qquad (0 \leqslant h \leqslant k).$$

Behauptung. Man kann eine gleichmäßig konvergente Teilfolge f_{s_i} herausgreifen, deren Grenzfunktion f in V wieder der Klasse R_k angehört.

Beweis. Die Existenz einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge f_{s_i} ergibt sich sofort aus den früheren Hilfssätzen (vgl. z. B. loc. cit. [2]) Hilfssatz I). Daß dann die Grenzfunktion f zu R_k gehört, folgt aus einer bekannten Tatsache [31]): Gewisse Linearkombinationen

$$\bar{f}_i = \sum_{\varrho=1}^{i} c_{\varrho i} f_\varrho$$

haben die Eigenschaft, daß nicht nur $\bar{f}_i \to f$ gleichmäßig, sondern außerdem auch die Ableitungen $D_h \bar{f}_i$ im Mittel konvergieren

[31]) Vgl. z. B. S. Banach et S. Saks, Sur la convergence forte dans les champs L^p, Studia Math. 2 (1930) p. 51—57. Es gibt auch andere Wege um den Hilfssatz III zu beweisen.

$$\lim_{i, i' = \infty} \int_V \cdots \int (D_h \bar{f}_i - D_h \bar{f}_{i'})^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m = 0; \quad 0 \leqslant h \leqslant k. \tag{51}$$

Die Zugehörigkeit der Grenzfunktion f zur Klasse R_k ist aber mit Benutzung von (51) sehr leicht zu beweisen.

§ 7.

Fortsetzung von § 5; Erweiterung des Existenzgebietes. Nach Festsetzung der Zahl $\delta > 0$ (vgl. § 5) zerlegen wir das Volumenstück V durch die Ebenen $x_m = i\delta$ in endlich viele Streifen: $V_1, V_2, \ldots, V_p$. $V_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ ist also der zwischen den Ebenen $x_m = (i-1)\delta$ und $x_m = i\delta$ gelegene Teil von V. Ähnlich bezeichne B_i den Durchschnitt von V mit der Ebene $x_m = i\delta$ und Γ_i den Durchschnitt von S_2 mit $x_m = i\delta$. Wir wollen — unter Benutzung der Hilfssätze des § 6 — zeigen, daß die in § 5 in V_1 gefundene Lösung u sich auf das ganze V erweitern läßt, wobei die Randbedingungen erfüllt bleiben. Wir verlieren aber dabei im Allgemeinen den analytischen Charakter der Lösung [32]) — auch dann, wenn die Koeffizienten und die Daten analytisch waren. Um den Nachweis für die Möglichkeit dieser Erweiterung zu liefern, werden in jedem V_i $(2 \leqslant i \leqslant p)$ entsprechende Lösungen u_{is} $(2 \leqslant i \leqslant p;\ s = 1, 2, \ldots)$ konstruiert; benachbarte $u_{(i-1)s}$, u_{is} bekommen auf B_i übereinstimmende Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung und zugleich werden auch u_{is} Kompatibilitätsbedingungen entsprechend hoher Ordnung genügen [33]). Dies wird jetzt näher ausgeführt.

Wir setzen

$$\begin{aligned} & u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \delta) = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}), \\ & \frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, \delta) = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}) \text{ [34])} \end{aligned} \tag{52}$$

und bemerken, daß man diese Funktionen nicht ohne Weiteres als Anfangswerte auf B_1 annehmen darf. Denn φ_2 bzw. ψ_2 sind

[32]) Eigentlich ist auch in V_1 die Lösung u nicht analytisch. Doch läßt sich V_1 in Teilgebiete zerlegen, in welchen u analytisch wird. Für V_i mit $i \geqslant 2$ läßt sich nicht einmal dieses behaupten.

[33]) Es besteht ein gewisser Unterschied in der Konstruktion der Lösungen in V_2 und der Lösungen in V_i mit $i \geqslant 3$.

[34]) Dementsprechend setze man auf S_1 $\varphi = \varphi_1$, $\psi = \psi_1$ [vgl. Formel (36)].

mitsamt ihren Ableitungen nur bis zu k bzw. $(k-1)$-er Ordnung einschließlich stetig, während die Beweismethode des § 5 analytische Daten erfordert. Dennoch besitzen φ_2 und ψ_2 zwei Eigenschaften, die uns im folgenden vom großen Nutzen sein werden: α) φ_2, ψ_2 haben Ableitungen beliebig hoher Ordnung in allen Punkten, die nicht auf dem Durchschnitt ω_1 von B_1 und G liegen (vgl. das Ende des § 5); β) auf Γ_1 erfüllen φ_2, ψ_2 zusammen mit den alten Randwerten χ Kompatibilitätsbedingungen beliebig hoher Ordnung.

Wir approximieren nun φ_2 bzw. ψ_2 durch Polynome φ_{2s} bzw. ψ_{2s} derart, daß

(53a) die Ableitungen von φ_{2s} bzw. ψ_{2s} bis zu k bzw. $(k-1)$-er Ordnung einschließlich gegen diejenigen von φ_{2s} bzw. ψ_{2s} auf dem ganzen B_1 gleichmäßig konvergieren,

(53b) in der Umgebung von Γ_1 konvergieren die Ableitungen von φ_{2s}, ψ_{2s} sogar die der Ordnungen $\leqslant k+m(p-2)$ gleichmäßig gegen diejenigen von φ_2, ψ_2 [35]).

Nun müssen auf Γ_1 auch die Kompatibilitätsbedingungen approximiert werden. Dies wird etwa in folgender Weise bewerkstelligt. Wir berechnen formell aus den Anfangswerten φ_{2s}, ψ_{2s} $(s=1,2,\ldots)$ und der genügend oft differenzierten Differentialgleichung (5) die Ableitungen der ihnen entsprechenden Lösungen u_{2s} auf B_1 und fassen insbesondere ihre Werte auf Γ_1 ins Auge. Wegen (53b) konvergieren die Ableitungen

$$\frac{\partial^h u_{2s}}{\partial x_m^h} \text{ auf } \Gamma_1 \text{ gleichmäßig gegen } \left(\frac{\partial^h \chi}{\partial x_m^h}\right)_{x_m=\delta} \quad [0 \leqslant h \leqslant k+m(p-2)]. \tag{54}$$

Wir approximieren also auf S_2 — von der Ebene $x_m=\delta$ aufwärts — die Randwerte χ durch Polynome χ_s, derart daß

$$\left(\frac{\partial^h \chi_s}{\partial x_m^h}\right)_{\Gamma_1} = \left(\frac{\partial^h u_{2s}}{\partial x_m^h}\right)_{\Gamma_1}, \quad \lim_{s=\infty} D_h \chi_s = D_h \chi \text{ auf } S_2 \quad \text{für } 0 \leqslant h \leqslant k+m(p-2). \tag{55}$$

[35]) Die Möglichkeit einer solchen Approximation folgt aus den eben erwähnten Eigenschaften α), β). Wir erinnern: p ist die Anzahl der Streifen, in welche V zerlegt wird.

Nun sind nach § 5 in V_2 Lösungen u_{2s} von (5) vorhanden, die auf B_1 die Anfangswerte φ_{2s}, ψ_{2s} und auf S_2 von $x_m=\delta$ aufwärts die Randwerte χ_s annehmen. Da jetzt auf Γ_1 für u_{2s} Kompatibilitätsbedingungen bis zur Ordnung $k+m(p-2)$ einschließlich erfüllt sind [vgl. (54), (55)], so besitzt jedes u_{2s} in V_2 stetige Ableitungen bis zur Ordnung $k+m(p-2)$ einschließlich. Die Situation hat sich also wesentlich gebessert. Seien

$$u_{2s}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 2\delta) = \varphi_{3s},$$
$$\frac{\partial u_{2s}}{\partial x_m}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 2\delta) = \psi_{3s}$$

die Anfangswerte auf B_2. Sie besitzen dort stetige Ableitungen bis zur Ordnung $k+m(p-2)$ bzw. $k+m(p-2)-1$ einschließlich.

Es können also bei festem s Polynome

$$\varphi_{3sr}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}), \quad \psi_{3sr}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$$

derart gebildet werden, daß gleichmäßig auf B_2

$$\lim_{r=\infty} D_h \varphi_{3sr} = D_h \varphi_{3s}, \quad \lim_{r=\infty} D_{h-1} \psi_{3sr} = D_{h-1} \psi_{3s}, \quad [0 \leqslant h \leqslant k+m(p-2)] \text{ [36]}) \tag{56}$$

ist. Wir berechnen wieder auf B_2 die Ableitungen $\dfrac{\partial^h u_{3sr}}{\partial x_m^h}$ für $0 \leqslant h \leqslant k+m(p-2)$. Auf Γ_2 genügen φ_{3s}, ψ_{3s} zusammen mit χ_s Kompatibilitätsbedingungen der Ordnungen $\leqslant k+m(p-2)$. Somit lassen sich die Randwerte χ_s auf S_2 von der Ebene $x_m=2\delta$ aufwärts durch Polynome χ_{sr} gleichmäßig approximieren:

$$\left(\frac{\partial^h \chi_{sr}}{\partial x_m^h}\right)_{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial^h u_{3sr}}{\partial x_m^h}\right)_{\Gamma_2}, \quad \lim_{r=\infty} D_h \chi_{sr} = D_h \chi_s \text{ auf } S_2 \quad [0 \leqslant h \leqslant k+m(p-2)]. \tag{57}$$

Die den Daten φ_{3sr}, ψ_{3sr}, χ_{sr} entsprechenden Lösungen u_{3sr} existieren also im ganzen V_3 und haben dort wegen (57) stetige Ableitungen der Ordnung $k+m(p-2)$. Wegen (56), (57) und (33) gilt für sie also die gemeinsame Abschätzung

[36]) In V_i $(i \geqslant 3)$ müssen wir also zu Funktionen mit wenigstens drei Indices übergehen.

$$(58)\qquad \int\underset{V_3}{\dots}\int (D_h\, u_{3sr})^2 dx_1\, dx_2 \dots dx_m \leqslant \text{Konst.}\quad [0 \leqslant h \leqslant k + m\,(p-2)].$$

Aus (58) kann bekanntlich für eine gewisse Teilfolge u_{3sr_ϱ} die Existenz einer Grenzfunktion u_{3s}, die (5) in V_3 löst, und die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{r_\varrho=\infty} D_h\, u_{3sr_\varrho} = D_h\, u_{3s} \text{ in } V_3 \quad [0 \leqslant h \leqslant k + m\,(p-3)]$$

gefolgert werden [37].

So fortfahrend bilden wir in $V_i\,(2 \leqslant i \leqslant p)$ eine Lösung u_{is} von (5), die dort stetige Ableitungen der Ordnung $k + m\,(p-i)$ besitzt. Sie nimmt auf S_2 die Randwerte χ_s an und erfüllt für $x_m = (i-1)\,\delta$ die Bedingung

$$D_h\, u_{(i-1),s} = D_h\, u_{is} \text{ auf } B_{i-1} \quad [0 \leqslant h \leqslant k + m\,(p-i)].$$

Für festes s lassen sich also die $u_{is}\,(i \geqslant 2)$ zusammenheften; man bekommt in $V_2 + V_3 + \dots + V_p$ eine Lösung u_s von (5) mit den Randwerten χ_s auf S_2 und den Anfangswerten φ_{2s}, ψ_{2s} auf B_1. u_s ist in $V_2 + V_3 + \dots + V_p$ k-mal stetig differenzierbar. Zugleich hat man mit Rücksicht auf (53), (57) und (33) [38]

$$(59)\qquad \int\underset{V_2+V_3+\dots+V_p}{\dots}\int (D_h\, u_s)^2 dx_1\, dx_2 \dots dx_m \leqslant \text{Konst.} \qquad (0 \leqslant h \leqslant k).$$

Nach § 5 Hilfssatz III folgt aus (59) die Existenz einer Grenzfunktion u, die in $V_2 + V_3 + \dots + V_p$ der Klasse R_k angehört und dort, falls $k \geqslant m + 2$ [39]), offensichtlich der Gleichung (5) genügt. *Zusammen mit der in § 5 gefundenen Lösung in V_1, bildet sie wegen* (52), (53) *die gesuchte Lösung unserer Randwertaufgabe in V. Sie ist in V der Klasse R_k und erfüllt auf Γ Kompatibilitätsbedingungen bis zu k-ter Ordnung einschließlich.*

[37]) Vgl. z. B. loc. cit. [2]), Hilfssatz I.

[38]) Den Formeln (57), (58) für u_{3sr} entsprechen ähnliche für die weiteren u_{isr} $(i > 3)$.

[39]) Dann sind nämlich die zweiten Ableitungen von u in V stetig. Später (§ 10) werden wir sogar $k \geqslant 2m + 2$ annehmen. Offensichtlich kann man weniger einschränkende Voraussetzungen machen; wir interessieren uns aber nicht für solche Untersuchungen, weil ihnen vorläufig keine prinzipielle Bedeutung zukommt.

§ 8.

Lineare Differentialgleichungen mit nichtanalytischen Koeffizienten und Daten. Sei V der Pyramidenstumpf aus § 2. Die Koeffizienten von (5) und f sollen nunmehr nur der Klasse R_{k-1} angehören mit $k \geqslant m + 2$ [39]). Wir betrachten weiter einen Pyramidenstumpf $W \subset V$, der mit V die gemeinsame Basis S_1 und Seitenflächen besitzt, ausgenommen diejenige Seitenfläche, welche durch die Schnittmannigfaltigkeit Γ hindurchgeht [40]). Wir setzen voraus, daß in W die Koeffizienten und f stetige Ableitungen von genügend hoher Ordnung k' besitzen, etwa $k' = k + m$ [41]). Was die Anfangs- und Randwerte anbetrifft, nehmen wir diese vorsichtshalber etwa auch als $k' = k + m$-mal differenzierbar an. Sie sollen Kompatibilitätsbedingungen bis zu k-ter Ordnung einschließlich erfüllen.

Unter diesen Bedingungen, *gibt es eine Lösung u von* (5) *der hier betrachteten gemischten Randwertaufgabe, die in V in die Klasse R_k fällt. In W gehört sie sogar der Klasse R_{k+m} an, besitzt also dort stetige Ableitungen k-ter Ordnung* [42]). *u erfüllt die Kompatibilitätsbedingungen bis zu k-ter Ordnung einschließlich. Endlich bestehen für u wieder die Abschätzungen* (33), (35), *falls* (32) [43]) *erfüllt ist.*

Zum Beweise genügt es nach den Hilfssätzen I, II des § 6 die Koeffizienten a_{ik}, b_j, c und f durch Polynome derart zu approximieren, daß diese mitsamt ihren Ableitungen bis zu $(k-1)$- er Ordnung einschließlich gegen die entsprechenden Funktionen und ihre Ableitungen a) in V im Mittel, und b) in W sogar gleichmäßig bis zu Ableitungen entsprechender Ordnung konvergieren. Gleichzeitig werden Anfangswerte und Randwerte approximiert

[40]) Alle Randflächen von W sollen raumartig sein.

[41]) Wären die Koeffizienten auch in W nur der Klasse R_{k-1}, so könnten wir nicht die Existenz der k-ten Ableitungen $D_k u$ für $x_m = 0$ nachweisen. Die Kompatibilitätsbedingungen k-ter Ordnung würden dann ihren Sinn verlieren. Darum fordern wir von den Koeffizienten und Daten in W eine höhere Regularität.

[42]) In $V - W$ brauchen gewisse Ableitungen $D_h u$ nicht zu existieren. Für einen Punkt P von Γ verstehen wir also unter $(D_h u)_P$ den Grenzwert $\lim_{P_n \to P} (D_h u)_{P_n}$, falls P_n im Innern von W oder auf $S_1 - \Gamma$ liegen.

[43]) Mit $\varrho = k - m$.

unter Beibehaltung der Kompatibilitätsbedingungen bis zu k-ter Ordnung[44]). Die Approximationsgleichungen

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}^{s} \frac{\partial^2 u^s}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} b_j^s \frac{\partial u^s}{\partial x_j} + c^s u^s = f^s$$

können nun nach § 7 gelöst werden. Es ist nach §§ 2, 3

$$\int \dots \int_V (D_h u^s)^2 dx_1 dx_2 \dots dx_m \leqslant \text{Konst.} \quad (0 \leqslant h \leqslant k)\,[45]),$$

woraus nach § 6 Hilfssatz III die gleichmäßige Konvergenz einer entsprechenden Teilfolge u^{s_ϱ} gegen eine Funktion u aus R_k folgt[46]). u löst die Randwertaufgabe für (5). Daß u in W sogar zu der höheren Klasse R_{k+m} gehört, folgt bereits aus den früheren Ergebnissen[47]).

§ 9.

Quasilineare Differentialgleichungen. Einführung einer Funktionaloperation. Wir beschränken uns auf folgendes Hauptproblem: eine Lösung u der quasilinearen Differentialgleichung

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f\left(x_1, x_2, \dots, x_m, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) \tag{64}$$

zu finden, welche auf $x_m = 0$ die gegebenen Anfangswerte und auf $x_1 = 0$ die gegebenen Randwerte annimmt. Alle anderen hier behandelten Randwertaufgaben lassen sich auf diesen Fall zurückführen[48]). Sei $v(x_1, x_2, \dots, x_m)$ eine genügend oft differenzierbare, vorläufig aber nicht näher bestimmte Funktion. Betrachten wir die lineare Hilfsgleichung

$$\sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}\left(x_1, x_2, \dots, x_m, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_m}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_k} = f\left(x_1, x_2, \dots, x_m, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_m}\right); \tag{65}$$

durch (65) ist eine Funktionaloperation[49])

$$w = T(v) \tag{66}$$

definiert. Unser Problem reduziert sich also darauf, *die Existenz eines Fixpunktes von* (66) *in einer passend gewählten Funktionenklasse nachzuweisen*, d. i. eines Punktes u, für welchen

$$u = T(u).$$

§ 10.

Der Existenzbeweis im quasilinearen Fall. Sei V das Volumenstück aus § 2. Wir setzen voraus, daß die Cauchy'schen Anfangswerte

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0) &= \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \\ \frac{\partial u}{\partial x_m}(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, 0) &= \psi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}) \end{aligned} \tag{67 a}$$

auf $x_m = 0$ und die Randwerte

$$u(0, x_2, \dots, x_m) = \chi(x_2, \dots, x_m) \tag{67 b}$$

auf $x_1 = 0$, sowie die Koeffizienten a_{ik} und f genügend oft differenzierbar sind. Überdies sollen die Kompatibilitätsbedingungen bis zu k-ter Ordnung einschließlich erfüllt sein. Diese definiert man ähnlich wie im linearen Fall.

Sei W ein Teilpyramidenstumpf: $W \subset V$, dessen Lage inbezug auf V bereits in § 8 besprochen wurde. Alle Randflächen von W mögen raumartig angenommen werden. Nach dem Ergebnis von Schauder[50]) gibt es in W eine Lösung u von (64) mit den Anfangswerten φ, ψ auf $x_m = 0$. Wegen der vorausgesetzten genügend hohen Differenzierbarkeit der Koeffizienten und Daten

---

[44]) Dies wird wie in § 7 durchgeführt.

[45]) In $V_2 + V_3 + \dots + V_p$ wurden diese Abschätzungen bereits in Formel (59) gewonnen. Indem man die Bemerkung III aus § 3 benutzt, überzeugt man sich, daß die Abschätzungen auch in V_1 gelten, denn die u^s besitzen dort (vgl. das Ende des § 5) stetige Ableitungen k-ter und abteilungsweise stetige Ableitungen $(k+1)$-er Ordnung.

[46]) Durch einen Grenzübergang bestätigt man, daß für u die Abschätzungen (33), (35) unter Voraussetzung von (32) weiter bestehen, obwohl jetzt u nur zur Klasse R_k gehört.

[47]) Vgl. loc. cit. [2]), Kap. II.

[48]) Vgl. § 3, Anfang.

[49]) Unter w verstehen wir eine Lösung von (65) mit den Daten (36).

[50]) Vgl. loc. cit. [2]), Kap. III.

besitzt diese Lösung in W Ableitungen bis zur $(k+m)$- ten (wir setzen $k \geqslant 2m+2$ voraus) Ordnung einschließlich. Wir gehen von dieser Lösung u in W aus und werden diese auf das ganze V derart erweitern, daß nunmehr auch (67 b) erfüllt ist. Zur Konkurrenz lassen wir nun folgende Funktionen v zu:

1) v ist in V definiert und stimmt in W mit der dort bereits vorhandenen Lösung u überein,

2) v nimmt auf $x_1 = 0$ die Randwerte χ an,

3) v gehört in V der Klasse R_k an, mit $k \geqslant 2m+2$ und es ist

$$\int_{V} \cdots \int (D_h v)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant \mu; \qquad 0 \leqslant h \leqslant k. \tag{68}$$

Die von den Funktionen v gebildete Klasse bezeichnen wir mit (K). Sie ist offensichtlich nicht leer. Löst man die Hilfsgleichung (65) für eine Funktion v aus (K), *so gehört die Lösung w wieder zu* (K). In der Tat, man sieht gleich, daß sie in W mit u übereinstimmt wegen der *Eindeutigkeit* des Cauchy'schen Problems in W. Wir zeigen jetzt, daß w wieder in V zur Klasse R_k gehört. Zu diesem Zwecke schätzen wir — nach Einsetzung von v in (65) — die Koeffizienten und ihre Ableitungen ab. Die totalen Ableitungen $\Delta_h a_{ik}$, $\Delta_h f$ h-ter Ordnung haben die Form

$$\Delta_h a_{ik} = \sum \Phi_p . D_p a_{ik}, \quad \Delta_h f = \sum \Phi_p . D_p f. \tag{69}$$

In (69) bezeichnet Φ_p ein Produkt verschiedener Ableitungen $D_\varrho v$, wobei in jedem Φ_p höchstens eine Ableitung der Ordnung $> k-m$ [51]) vorkommen kann. Daraus folgt [vgl. (33), (68)]

$$\begin{aligned} &\int_{V} \cdots \int (\Delta_h a_{ik})^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant \nu(\mu), \\ &\int_{V} \cdots \int (\Delta_h f)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant \nu(\mu). \end{aligned} \tag{70}$$

Indem wir jetzt die Abschätzungen (35) benutzen [52]), schließen wir aus (70)

$$\int_{V} \cdots \int (D_h w)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant h\, \nu_1(\mu);$$

[51]) Vgl. loc. cit. [2]), p. 243.

[52]) Die schwächeren Abschätzungen (33) würden nicht ausreichen [vgl. Fußnote [20])].

h ist die Höhe von V. Für genügend kleines h bekommen wir also wieder

$$\int_{V} \cdots \int (D_h w)^2 dx_1\, dx_2 \ldots dx_m \leqslant \mu.$$

Die Funktionenklasse (K) bildet eine konvexe Menge bei entsprechender Normierung. Genau so wie beim Cauchy'schen Problem verfahrend, erhalten wir für ein gewisses u

$$u = T(u), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

(Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1936).