Zum HELMHOLTZschen Raumproblem

von

H. AUERBACH (Lwów).

Bei diesem Problem [1]) handelt es sich um den Satz:

Sei G eine kontinuierliche lineare homogene Gruppe mit reellen Koeffizienten in n *Veränderlichen, welche jedes reelle System inzidenter Richtungselemente in jedes andere auf eine einzige Weise zu überführen gestattet. Dann besteht G aus allen reellen Substitutionen von der Determinante* 1, *welche eine gewisse positiv-definite quadratische Form in sich transformieren.*

Ein System inzidenter Richtungselemente im Sinne dieses Satzes setzt sich zusammen aus einer orientierten eindimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M_1, welche den Anfangspunkt enthält, einer orientierten zweidimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M_2, welche M_1 enthält, ..., einer orientierten $(n-1)$-dimensionalen linearen Mannigfaltigkeit M_{n-1}, welche M_{n-2} enthält.

Im folgenden wird ein einfacher Beweis des obigen Satzes mitgeteilt, welcher keine Rechnung erfordert und sich auf den Satz stützt:

Jede lineare homogene Gruppe mit beschränkten reellen Koeffizienten besitzt eine positiv-definite invariante quadratische Form [2]).

Einem beliebigen reellen System inzidenter Richtungselemente r ordnen wir n vom Anfangspunkt ausgehende paarweise

[1]) Vgl. H. Weyl, Raum Zeit Materie, 5. Aufl. (Berlin, Springer 1923) p. 100 und H. Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems (Berlin, Springer 1923), fünfte Vorlesung.

[2]) H. Auerbach, Sur les groupes bornés de substitutions linéaires, Comptes Rendus 195 (1932) p. 1367—1369; W. Fenchel, Über beschränkte lineare Gruppen, Matem. Tidsskr. (1936) p. 10.

orthogonale Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ zu, derart daß die Vektoren $e_1, \ldots, e_k$ die lineare Mannigfaltigkeit M_k aufspannen und in dieser Reihenfolge ihre Orientierung kennzeichnen $(k=1, \ldots, n-1)$ und daß die Determinante der orthogonalen Matrix $|e_1 \ldots e_n|$ den Wert 1 hat.

Wie leicht ersichtlich, wird auf diese Weise die Gesamtheit R der Systeme r umkehrbar eindeutig und stetig auf die Menge der reellen orthogonalen Matrizen von der Determinante 1 abgebildet. Daher ist R eine geschlossene, zusammenhängende, $n(n-1)/2$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Aus der Voraussetzung, daß die Gruppe G in R einfach transitiv ist, folgt in bekannter Weise, daß die Parameterzahl von G gleich $n(n-1)/2$ ist, sowie daß die Substitution $A(r)$ von G, welche ein fest gewähltes System inzidenter Richtungselemente in das System r überführt, stetig von r abhängt. Da die Mannigfaltigkeit R geschlossen ist, sind die Koeffizienten von $A(r)$ gleichmäßig beschränkt. Nach dem erwähnten Satze besitzt also die Gruppe G eine positiv-definite invariante quadratische Form. Da die Gruppe G offenbar zusammenhängend und von der Ordnung $n(n-1)/2$ ist, stimmt sie überein mit der Gesamtheit der reellen Substitutionen von der Determinante 1, welche diese Form in sich transformieren.

(Reçu par la Rédaction le 18. 7. 1936).