Über k-fach monotone Folgen

von

W. ORLICZ (Lwów).

1. In diesem Aufsatz bringen wir einige Sätze aus der Theorie der unendlichen Reihen sowie auch aus der Theorie der Orthogonalentwicklungen. Obwohl die Sätze des zweiten bezw. dritten Abschnittes verschiedenen Problemkreisen angehören, so haben sie doch das Gemeinsame, daß man es bei ihnen mit k-fach monotonen Zahlenfolgen zu tun hat.

Die Folge $\{a_\nu\}$ heißt bekanntlich k-fach monoton abnehmend, wenn die zugehörigen i-ten Differenzen $\Delta^{(i)} a_\nu$ nichtnegativ sind für $i=1, 2, \ldots k$ und alle ν. Die Folge $\{a_\nu\}$ nennen wir *von beschränkter Variation k-ter Ordnung*, wenn die Reihe

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k-1} |\Delta^{(k)} a_\nu|$$

konvergiert. Offensichtlich ist die Konvergenz von (1) mit der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \nu^{k-1} |\Delta^{(k)} a_\nu|$ äquivalent.

Wir bezeichnen mit (v^k) den linearen Raum aller nullkonvergenten Zahlenfolgen $\{a_\nu\}$, die von beschränkter Variation k-ter Ordnung sind; definieren wir die Entfernung zweier Elemente $a \equiv \{a_\nu\}$, $b \equiv \{b_\nu\}$ aus (v^k) durch

$$(a, b) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\nu+k-1}{k-1} |\Delta^{(k)}(a_\nu - b_\nu)|,$$

so erweist sich (v^k), wie man zeigen kann, als ein Raum vom Typus (B) [1]).

[1]) Vgl. dazu: J. Pfleger, Über Reihen mit r-fach monoton abnehmenden Gliedern, Monatshefte f. Math. u. Phys. 41 (1934) p. 191—200, insb. p. 196—197.

Wir definieren noch die Norm eines Elementes $a\equiv\{a_\nu\}\in(v^k)$:

$$\|a\|=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k-1}{k-1}|\Delta^{(k)}a_\nu|;$$

ist $a^p\equiv\{a_\nu^p\}$, so folgt aus $\|a^p\|\to 0$ insbesondere $\lim\limits_{p\to\infty}a_\nu^p=0$ $(\nu=0,1,2,\dots)$. Eine Folge aus (v^r) gehört auch jedem Raume (v^s) $(s=1,2,\dots r-1)$ an [2]).

Wir formulieren zuerst den folgenden von Herrn J. Pfleger herrührenden Hilfssatz [3]).

Hilfssatz 1. *Ist $\{\Delta_\nu\}$ eine Zahlenfolge, für welche die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k-1}{k-1}|\Delta_\nu|$$

konvergiert, so ist die Folge

$$a_n=\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu-n+k-1}{k-1}\Delta_\nu\qquad(n=0,1,2,\dots)\tag{2}$$

nullkonvergent und $\Delta^{(k)}a_n=\Delta_n$ $(n=0,1,2,\dots)$.

Der Zusammenhang zwischen k-fach monoton abnehmenden Zahlenfolgen und Folgen von beschränkter Variation k-ter Ordnung wird durch den folgenden Hilfssatz beleuchtet:

Hilfssatz 2. *Ist die nullkonvergente Folge $\{a_\nu\}$ k-fach monoton abnehmend, so ist sie von beschränkter Variation k-ter Ordnung.*

Ist die nullkonvergente Folge $\{a_\nu\}$ von beschränkter Variation k-ter Ordnung, so gibt es zwei k-fach monoton abnehmende nullkonvergente Folgen $\{a'_\nu\}$, $\{a''_\nu\}$ so daß $a_\nu=a'_\nu-a''_\nu$ $(\nu=0,1,2,\dots)$.

Beweis. Der erste Teil des Hilfssatzes ist bekannt; um den zweiten Teil zu beweisen, setzen wir

$$\Delta'_\nu={}^1\!/_2(|\Delta^{(k)}a_\nu|+\Delta^{(k)}a_\nu),\quad \Delta''_\nu={}^1\!/_2(|\Delta^{(k)}a_\nu|-\Delta^{(k)}a_\nu)$$

und definieren die Folgen $\{a'_\nu\}$, $\{a''_\nu\}$ durch

$$a'_n=\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu-n+k-1}{k-1}\Delta'_\nu,\quad a''_n=\sum_{\nu=n}^{\infty}\binom{\nu-n+k-1}{k-1}\Delta''_\nu.$$

[2]) Vgl. dazu Hilfssatz 2.

[3]) L. c. [1]), p. 194, Hilfssatz VI.

Aus $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k-1}{k-1}|\Delta^{(k)}a_\nu|<+\infty$ folgt nach Hilfssatz 1 $a'_n\to 0$, $a''_n\to 0$ und $\Delta^{(k)}a'_n=\Delta'_n$, $\Delta^{(k)}a''_n=\Delta''_n$. Da $\Delta^{(k)}a'_n\geqslant 0$, $a'_n\to 0$, so ist die Folge $\{\Delta^{(k-1)}a'_n\}$ nullkonvergent und nichtwachsend, so daß $\Delta^{(k-1)}a'_n\geqslant 0$; durch wiederholte Anwendung derselben Schlüsse ergibt sich allgemein $\Delta^{(i)}a'_n\geqslant 0$ $(i=1,2,\dots k)$. Ebenso ist $\Delta^{(i)}a''_n\geqslant 0$ $(i=1,2,\dots k)$; da $\Delta^{(k)}(a'_n-a''_n)=\Delta^{(k)}a_n$ so ist $a_n=a'_n-a''_n$ und unser Hilfssatz ist bewiesen.

Als erste Anwendung dieses Hilfssatzes werden wir jetzt zeigen, daß *der Raum (v^k) separabel ist.* Sei $a\equiv\{a_\nu\}\in(v^k)$ und $\Delta^{(k)}a_\nu\geqslant 0$. Wir betrachten die Folge

$$\Delta_0=\Delta^{(k)}a_0,\dots,\ \Delta_p=\Delta^{(k)}a_p,\ \Delta_{p+1}=0,\ \Delta_{p+2}=0,\dots$$

und def nieren die Folge $a^p\equiv\{a_\nu^p\}$ mittels der Formel (2). Eine ähnliche Schlußweise wie früher zeigt, daß diese Folge k-fach monoton abnehmend ist. Ferner ist

$$\|a^p-a\|=\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+k-1}{k-1}|\Delta^{(k)}(a_\nu^p-a_\nu)|=\sum_{\nu=p+1}^{\infty}\binom{\nu+k-1}{k-1}|\Delta^{(k)}a_\nu|,$$

also $\lim\limits_{p\to\infty}\|a^p-a\|=0$. Hieraus folgt, unter Beachtung des Hilfssatzes 2, daß die Menge aller Zahlenfolgen von beschränkter Variation k-ter Ordnung, deren Glieder sämtlich rationale Zahlen sind und von einer Stelle an verschwinden, in (v^k) überalldicht liegt.

2. Es bezeichne im Folgenden X einen Raum vom Typus (B). Sei $\{x_\nu\}$ eine Folge von Elementen aus X; wir bezeichnen mit $c_n^{(k)}(x_n)$ die Cesàroschen Mittel k-ter Ordnung der Folge $\{x_\nu\}$, es ist also

$$c_n^{(k)}(x_n)=\frac{s_n^{(k)}(x_n)}{\binom{n+k}{k}}\qquad(n=0,1,2,\dots),$$

wo $s_n^{(k)}(x_n)=\sum\limits_{\nu=0}^{n}\binom{n+k-\nu-1}{k-1}x_\nu$.

Es bedeute T^* eine Matrix $(b_{i\nu})$, welche den Bedingungen $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}b_{i\nu}=1$, $\lim\limits_{i\to\infty}b_{i\nu}=0$ $(\nu=0,1,2,\dots)$ genügt; als i-te Transformierte der Folge $\{x_\nu\}$ bezeichnen wir die Summe

$$T_i(x_0, x_1, \ldots) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{i\nu} x_\nu .$$

Satz 1. *Es sei* $y_n = \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu$, $y_n(c) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu x_\nu$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, *wo* $x_\nu \in X$ *und* $c \equiv \{c_\nu\}$ *eine Zahlenfolge bedeutet. Wir setzen voraus, daß für jede k-fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge* $a \equiv \{a_\nu\}$ *eine Konstante* $L(a)$ *existiert, so daß*

(3) $$\| T_i(y_0(a), y_1(a), \ldots) \| \leqslant L(a) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dann gibt es eine universelle Konstante L, *so daß*

(4) $$\| c_n^{(k-1)}(y_n) \| \leqslant L \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

(5) $$\| c_n^{(k-1)}(z_0^i + \ldots + z_n^i) \| \leqslant L \qquad (i, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $z_n^i = x_n \left(\sum_{j=n}^{\infty} b_{ij} \right)$.

Beweis. Zum Beweise benötigen wir folgenden Hilfssatz:

Wenn für eine Elementenfolge $\{z_\nu\}$, $z_\nu \in X$, und für eine beliebige Zahlenfolge $\{a_\nu\}$ aus (v^k) mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern die Ungleichung

(6) $$\| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_\nu \| \leqslant L \| a \|$$

besteht, so gilt

(7) $$\max_n | c_n^{(k-1)}(z_0 + \ldots + z_n) | \leqslant L .$$

Wir definieren die Zahlenfolge $\{a_\nu\}$ mittels der Formel (2), in der wir

$$\Delta_\nu = \Delta^{(k)} a_\nu = 0 \text{ für } \nu \neq n, \quad \Delta_n = \Delta^{(k)} a_n = \frac{1}{\binom{n+k-1}{k-1}}$$

gesetzt haben. Wenden wir auf die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_\nu$ die Abelsche Umformung an, so erhalten wir wegen (6)

$$\| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_\nu \| = \| \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z_\nu \| = \| \sum_{\nu=0}^{n} \Delta^{(k)} a_\nu s_\nu^{(k)}(z_\nu) + \Delta^{(k-1)} a_{n+1} s_n^{(k)}(z_n)$$
$$+ \Delta^{(k-2)} a_{n+1} s^{(k-1)}(z_n) + a_{n+1} s_n^{(1)}(z_n) \|$$
$$= \| \frac{1}{\binom{n+k-1}{k-1}} s_n^{(k)}(z_n) \| \leqslant L \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da aber $s_n^{(k-1)}(z_0 + z_1 + \ldots + z_n) = s_n^{(k)}(z_n)$, so ist (7) bewiesen.

Um jetzt den Satz 1 zu beweisen, betrachten wir die Folge der Transformierten $\{T_i(y_0(a), y_1(a), \ldots)\}$. Aus Voraussetzung (3) und Hilfssatz 2 folgt, daß für jede Folge $a \equiv \{a_\nu\} \in (v^k)$ die Folge $\{T_i(y_0(a), y_1(a), \ldots)\}$ beschränkt ist; somit ergibt die Anwendung eines bekannten Satzes über Folgen linearer Operationen[4]) die Existenz einer Konstanten L, mit welcher die Ungleichung

(8) $$\| T_i(y_0(a), y_1(a), \ldots) \| \leqslant L \| a \| \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

besteht. Für jede Zahlenfolge $\{a_\nu\}$, deren Glieder fast alle Null sind, gilt offenbar

$$T_i(y_0(a), y_1(a), \ldots) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x_\nu \sum_{i=\nu}^{\infty} b_{ij}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_\nu^i ,$$

also nach (8)

$$\| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z_\nu^i \| \leqslant L \| a \| \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da nach dem obigen Hilfssatze die Ungleichung

$$\max_n \| c_n^{(k-1)}(z_0^i + \ldots + z_n^i) \| \leqslant L \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

besteht, so ist (5) bewiesen. Um noch (4) zu beweisen, bemerken wir, daß $\lim_{i \to \infty} z_\nu^i = x_\nu$, mithin gilt bei festem n

$$\lim_{i \to \infty} c_n^{(k-1)}(z_0^i + \ldots + z_n^i) = c_n^{(k-1)}(x_0 + \ldots + x_n)$$

und nach (5)

$$\| c_n^{(k-1)}(y_n) \| \leqslant L \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

[4]) Siehe: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932); p. 80, Théorème 5.

Bemerkung. Setzen wir voraus, daß die Matrix T^* zeilenfinit ist, d. h. $b_{i\nu}=0$ für $\nu > n(i)$, so folgt aus (5)

$$\|T_i(y_0, y_1, \ldots)\| \leqslant L \qquad (i=0,1,2,\ldots). \tag{9}$$

In der Tat, es ist $z_\nu^i=0$ für $\nu > n(i)$ und demzufolge

$$\lim_{n\to\infty} c_n^{(k-1)}(z_0^i+\ldots+z_n^i)=\sum_{j=0}^{n(i)} z_j^i=\sum_{\nu=0}^{n(i)} b_{i\nu}(x_0+x_1+\ldots+x_\nu).$$

Hieraus folgt wegen (5) die Ungleichung (9).

Im Sonderfalle $k=1$ wurde Satz 1 zuerst von Herrn S. Kaczmarz[5]) bewiesen.

Satz 2. *Damit die Reihe*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x_\nu \tag{10}$$

für jede k-fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge $\{a_\nu\}$ (C, l)*-summierbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Ungleichung*

$$\|c_n^{(m)}(y_n)\| \leqslant L \qquad (n=0,1,2,\ldots) \tag{11}$$

bestehe, wo $m=\min(l, k-1)$, $y_n=\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu$ *ist.*

Beweis. Die angegebene Bedingung ist notwendig. Aus Satz 1 und der vorstehenden Bemerkung folgt sogleich die Beschränktheit der Cesàroschen Mittel $(k-1)$-ter und l-ter Ordnung der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} x_\nu$.

Die angegebene Bedingung ist hinreichend. Um dies zu beweisen, bemerken wir, daß die (C, p)-Summierbarkeit für $p<q$ die (C, q)-Summierbarkeit zur Folge hat, daß weiter für k-fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolgen die Beziehung $\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+p-1}{p-1}\Delta^{(p)}a_\nu<+\infty$, $p\leqslant k$, gilt und daß der folgende Satz besteht:

[5]) S. Kaczmarz, Une remarque sur les séries, Studia Math. 3 (1931) p. 95–100, insb. p. 97.

Ist die Bedingung (11) erfüllt und $\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\nu+m}{m}|\Delta^{(m+1)}a_\nu|<+\infty$, $a_\nu\to 0$, so ist die Reihe (10) (C, m)-summierbar[6]).

Was den zuletzt genannten Satz betrifft, so ist er für numerische Reihen bekannt; seine Verallgemeinerung auf den Fall eines beliebigen B-Raumes liegt auf der Hand.

Bemerkung. Man kann im Satze 2 die Worte „(C, l)-summierbar" durch „(C, l)-beschränkt" ersetzen.

Im Sonderfalle $k=2$, $l=1$ wurde Satz 2 von Herrn Szidon[7]), für $k=2$, $l=0$ von Herrn S. Kaczmarz[8]) bewiesen.

Satz 3. *Wir setzen voraus, daß die Toeplitzsche Summationsmethode T die folgende Eigenschaft besitzt:*

Immer wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu$ *T-summierbar ist, ist auch die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\lambda_\nu$ *T-summierbar, wobei* $\{a_\nu\}$ *eine beliebige monotone* $(k=1)$ *nullkonvergente Zahlenfolge bedeutet. Unter dieser Voraussetzung ist die T-Summierbarkeit mit der gewöhnlichen Konvergenz äquivalent.*

Beweis. Aus unserer Voraussetzung folgt nach Satz 1 aus der T-Summierbarkeit der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu$ die Beschränktheit ihrer Teilsummen. Nach einem Satze von Mazur-Orlicz[9]) ergibt sich hieraus die Behauptung.

Satz 4. *Wir setzen voraus, daß die Toeplitzsche Summationsmethode T mit allen Toeplitzschen Methoden, die von ihr*

[6]) G. H. Hardy, Generalisation of a theorem in the theory of divergent series, Proc. London Math. Soc. (2) 6 (1907); H. Bohr, Bitrag til de Dirichletske Raekkers Theorie, Inaug.-Diss., Kopenhagen (1910), insb. p. 61; vgl. auch: I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. reine und ang. Math. 151 (1921) p. 79–111, insb. p. 104–106.

[7]) S. Szidon, Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen, Math. Zeitschr. 10 (1921) p. 121–127.

[8]) L. c. [5]).

[9]) S. Mazur et W. Orlicz, Sur les méthodes linéaires de sommation, C. R. de l'Acad. des Sc. 196 (1933) p. 32–34; siehe Théorème 6.

nicht schwächer sind, konsistent ist[10]) *und die folgende Eigenschaft besitzt:*

Immer wenn die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu$ *T-summierbar ist, ist auch die Reihe* $\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\lambda_\nu$ *T-summierbar, wobei* $\{a_\nu\}$ *eine beliebige k-fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge bedeutet. Unter diesen Voraussetzungen ist die Methode T nicht stärker als die* $(C, k-1)$*-Summierbarkeit.*

Beweis. Für die Summationsmethode T gilt folgendes[11]): Es existiert eine abzählbare Menge S von konvergenten Zahlenfolgen, so daß für jede T-summierbare Folge $\{s_\nu\}$, $\varepsilon>0$ und jedes ganze $p\geqslant 0$ eine Folge $\{s_\nu^0\}\in S$ vorhanden ist, die den Ungleichungen

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{i\nu}(s_\nu-s_\nu^0)\Big|<\varepsilon \qquad (i=0,1,2,\dots),$$

$$|s_\nu-s_\nu^0|<\varepsilon \qquad (\nu=0,1,2,\dots p),$$

$$\Big|\sum_{\nu=0}^{n}a_{i\nu}(s_\nu-s_\nu^0)\Big|<\varepsilon \qquad (i=0,1,2,\dots p;\ n=0,1,2,\dots)$$

genügt. Aus Satz 1 folgern wir, daß für jede T-summierbare Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu$ die Folge $\{c_n^{(k-1)}(\lambda_0+\dots+\lambda_n)\}$ beschränkt ist. Jetzt nehmen wir an, es sei

$$c_{p_i}^{(k-1)}(\lambda_0+\dots+\lambda_{p_i})\to a,\quad c_{q_i}^{(k-1)}(\lambda_0+\dots+\lambda_{q_i})\to b.$$

Da offenbar für jede Folge $\{s_\nu\}\in S$ der Grenzwert

$$\lim_{i\to\infty}c_{p_i}^{(k-1)}(s_{p_i})$$

existiert, so existiert dieser Grenzwert, infolge der oben angegebenen Eigenschaft der Methode T, für jede T-summierbare Folge $\{s_\nu\}$. Somit ist die Summationsmethode, die der Transformierten $c_{p_i}^{(k-1)}(s_{p_i})$ entspricht, nicht schwächer als die T-Methode und aus $\lim_{i\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{i\nu}s_\nu=r$ folgt $\lim_{i\to\infty}c_{p_i}^{(k-1)}(s_{p_i})=r$. Daher ist

$$a=\lim_{i\to\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{i\nu}(\lambda_0+\lambda_1+\dots+\lambda_\nu)=\varDelta;$$

man beweist ganz analog $b=\varDelta$, die Folge $\{c_n^{(k-1)}(\lambda_0+\dots+\lambda_n)\}$ muß also konvergieren.

[10]) Das heißt: wenn jede T-summierbare Folge $\overline{T}$-summierbar ist, so erteilt die $\overline{T}$-Methode jeder T-summierbaren Folge denselben Grenzwert wie die Methode T.

[11]) L. c. [9]).

3. Sei $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein in (a,b) orthogonales Funktionensystem; mit (L^α, L^β) bezeichnen wir die Menge aller Folgen $\{\lambda_\nu\}$ mit der Eigenschaft, daß immer, wenn

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}f_\nu\varphi_\nu(x) \tag{12}$$

die Entwicklung einer Funktion aus (L^α) ist, die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu f_\nu\varphi_\nu(x) \tag{13}$$

die Entwicklung einer Funktion aus (L^β) darstellt.

Es bezeichne $K_n^{(k)}(x,\xi)$ das n-te Cesàrosche Mittel k-ter Ordnung der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(\xi)$; als die n-te der (C,k)-Methode entsprechende *Lebesguesche Funktion* bezeichnen wir

$$\varrho_n^{(k)}(\xi)=\int_a^b|K_n^{(k)}(x,\xi)|\,dx.$$

Satz 5. *Es bestehe* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *aus beschränkten Funktionen und sei in* (L^1) *vollständig. Dafür, daß jede k-fach monoton abnehmede nullkonvergente Zahlenfolge* $\{\lambda_\nu\}$ *der Menge* (L^1, L^1) *angehört, ist die Existenz einer Konstanten* M*, mit der die Ungleichung*

$$\varrho_n^{(k-1)}(\xi)\leqslant M \tag{14}$$

für fast jedes ξ *besteht, notwendig und hinreichend.*

Beweis. 1°. Die Bedingung ist hinreichend. Wenn die Ungleichung (14) für fast jedes ξ besteht und $f(x)\in(L^1)$ so ist die Entwicklung (12) im Raume (L^1) $(C, k-1)$-summierbar somit im Raume (L^1) auch die Reihe (13) für jede k-fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge $\{\lambda_\nu\}$ $(C, k-1)$-summierbar und stellt die Entwicklung einer integrierbaren Funktion dar.

2°. Die Bedingung ist notwendig. Aus Voraussetzungen des Satzes 5 folgt nach Hilfssatz 2, daß jede Folge $\{\lambda_\nu\}\epsilon(v^k)$ der Menge (L^1, L^1) angehört. Wenn $\lambda\equiv\{\lambda_\nu\}\epsilon(v^k)$, so bezeichnen wir (bei festgehaltenem $f(x)$) mit $U(\lambda; x)$ diejenige integrierbare Funktion, für welche

$$\int_a^b U(\lambda; x)\,dx = \lambda_\nu \int_a^b f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx, \quad (\nu=0,1,2,\ldots), \quad f(x)\epsilon(L^1).$$

$U(\lambda; x)$ stellt eine lineare Operation in (v^k) dar[12]); es gibt also eine Konstante M_f so daß

$$\| U(\lambda; x)\|_1 \leqslant M_f \| a \|. \tag{15}$$

Wir definieren jetzt eine Folge $\lambda\equiv\{\lambda_\nu\}$ mittels (2), worin $\varDelta_\nu = \varDelta^{(k)}\lambda_\nu = 0$ für $\nu \neq n$, $\varDelta_n = \varDelta^{(k)}\lambda_n = \dfrac{1}{\binom{n+k-1}{k-1}}$ gesetzt wird.

Da $\|\lambda\|=1$, $\lambda_{n+1}=\lambda_{n+2}=\ldots=0$, so ist nach (15)

$$\| U(\lambda; x)\|_1 = \Big\| \sum_{\nu=0}^{n} \lambda_\nu f_\nu \varphi_\nu(x)\Big\|_1 \leqslant M_f.$$

Die Anwendung der Abelschen Umformung auf die linkerhand stehende Summe ergibt (vgl. den Beweis des Hilfssatzes auf Seite 152)

$$\left\| \frac{s_n^{(k-1)}\left(\sum_{\nu=0}^{n} f_\nu \varphi_\nu(x)\right)}{\binom{n+k-1}{k-1}} \right\|_1 \leqslant M_f \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Somit ist für jedes $f(x)\epsilon(L^1)$ die Reihe (12) $(C, k-1)$-beschränkt (im Raume (L^1)), woraus bekanntlich (14) für fast jedes ξ folgt.

[12]) Um das einzusehen genügt es z. B. einen Satz von S. Banach anzuwenden; siehe das unter [4]) zit. Buch, p. 41, Théorème 7.

Man beweist ganz ähnlich den Satz:

Satz 6. *Das Orthogonalsystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$, $\varphi_\nu(x)\epsilon(L^\beta)$, *sei in* (L^α) *vollständig. Dafür, daß jede k-fach monoton abnehmende nullkonvergente Zahlenfolge* $\{\lambda_\nu\}$ *der Menge* (L^α, L^α) *angehört, ist notwendig und hinreichend, daß die Entwicklung einer beliebigen Funktion* $f(x)\epsilon(L^\alpha)$ *im Raume* (L^α) $(C, k-1)$-*summierbar sei.*

(Reçu par la Rédaction le 3. 7. 1936).