Über lineare Gleichungen in separablen Räumen

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

In dieser Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Auflösung von Gleichungen der Form

$$y_0 = U(x),$$

mitgeteilt, wo $U(x)$ eine in einem Raum E vom Typus (B) erklärte lineare Operation mit Werten aus einem Raum G vom Typus (B_0)[1]) ist und y_0 ein Element aus G bezeichnet.

Dies gelingt uns im § 1, unter Benutzung einer Methode des Herrn S. BANACH, für (nicht notwendig separable) Räume, deren Elemente — in einem später zu erklärenden Sinn — lineare Funktionale eines anderen Raumes repräsentieren, bei speziellen Voraussetzungen über die Operation $U(x)$. Für gewisse Räume, wie (L^p), (l^p) $(p > 1)$ und (s)[2]), gelten die oben genannten Bedingungen ohne irgendwelche Beschränkung für $U(x)$. Mit Hilfe dieser Sätze stellen wir im § 2 allgemeine Bedingungen für separable Räume und beliebige lineare Operationen auf. Im § 3 interpretieren wir diese Bedingungen in den Räumen (c_0), (c), (C) und (L). Zuletzt geben wir im § 4 einige Anwendungen in verschiedenen Gebieten der Analysis.

§ 1.

Im folgenden werden wir immer, wofern das Gegenteil nicht ausdrücklich gesagt wird, mit E einen Raum vom Typus (B) und

[1]) Siehe: S. Mazur und W. Orlicz, Zur Theorie der linearen metrischen Räume, erscheint im nächsten Band dieses Journal; die Definition eines Räumes vom Typus (B_0) findet man auch in meiner nächsten Note, dieser Band p. 139.

[2]) Was die im folgenden benutzten Bezeichnungen und Begriffe anbetrifft, siehe: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932). Dieses Buch wird im folgenden als Opérations zitiert.

mit $U(x)$ eine lineare in E erklärte Operation, mit Werten aus einem Raum G vom Typus (B_0) bezeichnen. Die Elemente des Raumes E werden mit x, die Elemente des Raumes G mit y und die linearen Funktionale in G mit $Y(y)$ bezeichnet.

Nehmen wir an, daß die Elemente eines Raumes E lineare Funktionale eines anderen Raumes E' repräsentieren, d. h. daß jedem Paar von Elementen x, x' $(x \in E,\ x' \in E')$ eine Zahl (xx') zugeordnet ist, die folgenden Bedingungen genügt:

1. bei festem x ist (xx') ein lineares Funktional in E';
2. für jedes lineare Funktional $f(x')$ in E' gibt es ein Element $x \in E$, so daß $f(x') = (xx')$ für $x' \in E'$ und $|f| = |x|$ ist;
3. bei festem x' ist (xx') ein lineares Funktional in E, dessen Norm gleich $|x'|$ ist.

Als Räume E, E' kann man z. B. (l) und (c_0), (m) und (l), (M) und (L) u. s. w. nehmen.

Es sei eine Operation

$$y = U(x)$$

in E erklärt von der Eigenschaft, daß es für jedes $Y(y)$ ein Element $x' \in E'$ gibt, so daß

$$Y[U(x)] = (xx') \text{ für } x \in E \tag{1}$$

ist.

Satz 1. *Damit die Gleichung*

$$y_0 = U(x) \tag{2}$$

eine Lösung x in E mit $|x| \leqslant M$, wo $M > 0$ eine gegebene Zahl ist, besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$|Y(y_0)| \leqslant M|X| \tag{3}$$

besteht, wobei $X(x) = Y[U(x)]$ gesetzt wurde.

Beweis. Ist x_0, $|x_0| \leqslant M$ eine Lösung von (2), so hat man für jedes $Y(y)$

$$|Y(y_0)| = |Y[U(x_0)]| = |X(x_0)| \leqslant M|X|,$$

womit die Notwendigkeit von (3) bewiesen ist.

Es sei nun M eine Zahl die der Ungleichung (3) genügt. Bezeichnen wir mit H die Menge der Punkte $x' \in E'$, für welche es ein $Y(y)$ gibt, so daß (1) besteht. Da (xx') nach 1. in Bezug auf x' additiv und homogen ist, so ist H linear. Wir erklären nun in H ein Funktional $\varphi(x')$ indem wir für ein x', welches dem Funktional $Y(y)$ entspricht,

$$\varphi(x') = Y(y_0) \tag{4}$$

setzen. Dieses Funktional ist eindeutig bestimmt, da aus $Y_1[U(x)] \equiv Y_2[U(x)]$ nach (3) $|Y_1(y_0) - Y_2(y_0)| = 0$ folgt. Berücksichtigen wir ferner 3., so ergibt sich aus (3), daß $\varphi(x')$ auch linear in H mit $|\varphi_H| \leqslant M$ ist. Folglich [3]) gibt es ein lineares Funktional $\Phi(x')$ in E', so daß

$$\Phi(x') = \varphi(x') \text{ für } x' \in H;\ |\Phi| \leqslant M \tag{5}$$

ist. Nach 2. folgt daraus die Existenz eines $x_0 \in E$ mit $|x_0| \leqslant M$, so daß

$$(x_0 x') = \Phi(x') \text{ für } x' \in E' \tag{6}$$

gilt. Lassen wir hier x' die Menge H durchlaufen, so bekommen wir nach (1), (4), (5)

$$Y[U(x_0)] = Y(y_0)$$

für jedes $Y(y)$ und folglich $U(x_0) = y_0$.

Bemerkung 1. Der bewiesene Satz gilt auch ohne spezielle Voraussetzungen über die Operation $U(x)$, wenn der Raum E die folgende Eigenschaft besitzt:

Wird mit $\bar{E}$ der zu E konjugierte Raum aller in E erklärten, linearen Funktionale $f(x)$ bezeichnet, so ist jedes lineare Funktional $\Phi(f)$ in $\bar{E}$ von der Form

$$\Phi(f) = f(x_0), \quad x_0 \in E.$$

Als Raum E' können wir dann nämlich den Raum $\bar{E}$ nehmen und $(xx') = f(x)$ setzen. Die Voraussetzung über $U(x)$ ist in diesem Fall von selbst erfüllt.

Die obige Eigenschaft besitzen die Räume (l^p), (L^p), $(p > 1)$ und der Raum (s) [4]) vom Typus (B_0). Für den Raum (s) nimmt die Bedingung für die Lösbarkeit der Gleichung (2) die Form

$$Y(y_0) = 0, \text{ wenn } Y[U(x)] \equiv 0 \text{ ist,} \tag{7}$$

---

[3]) Vgl. Opérations, p. 55, th. 2.

[4]) Vgl. Opérations, p. 50, th. 11. und S. Banach, Teorja operacyj, Warszawa (1931) p. 62, twierdzenie 4.

an. Diese Bedingung sichert nämlich die Eindeutigkeit des im Beweise des Satzes 1 erklärten Funktionals $\varphi(x')$, seine Linearität aber folgt hier aus der Additivität[5]).

Bemerkung 2. In analoger Weise bekommen wir ohne spezielle Voraussetzungen über den Raum E und die Operation $U(x)$, wenn G ein Raum vom Typus (B) ist, den folgenden Satz[6]).

Satz 2. *Damit es für ein gegebenes lineares Funktional $X(x)$ in E und eine gegebene Zahl $M>0$ ein $Y(y)$ gibt, so daß die Gleichung*

$$X(x)=Y[U(x)] \text{ für } x\in E, \quad |Y|\leqslant M$$

besteht, ist notwendig und hinreichend, daß

$$|X(x)|\leqslant M|U(x)|, \text{ für } x\in E \tag{8}$$

gilt.

Es genügt im Beweise des Satzes 1 statt der Menge H die Bildmenge der Abbildung $y=U(x)$ zu nehmen,

$$\varphi(y)=X(x) \text{ für } y=U(x)$$

zu setzen und dieses Funktional zu erweitern.

§ 2.

Es sei eine Operation $U(x)$ im Raume (l) der absolut konvergenten Reihen erklärt, und eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$ gegeben.

Hilfssatz 1. *Damit die Gleichung*

$$y_0=U(x) \tag{9}$$

in (l) eine Lösung $x_0=\sum\xi_n^{(0)}$ mit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\xi_n^{(0)}|}{\varepsilon_n}\leqslant 1 \tag{10}$$

besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$|Y(y_0)|\leqslant \sup_{n=1,2,\dots}\varepsilon_n|a_n| \tag{11}$$

besteht, wobei $Y[U(x)]=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\xi_n$, $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ gesetzt wurde[7]).

Beweis. Es sei $x_0=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^{(0)}$ eine Lösung von (9), die der Ungleichung (10) genügt. Wir setzen

$$e_k=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^{(k)}; \quad \xi_n^{(k)}=0,\ k\neq n,\ \xi_n^{(n)}=1; \quad y_n=U(e_n) \quad (n=1,2,\dots)$$

und betrachten die Operation

$$V(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\varepsilon_n y_n,$$

die den Raum (l) auf G abbildet. $V(x)$ ist linear und genügt, wegen $\varepsilon_n\to 0$, der im Satz 1 über die Operation $U(x)$ gemachten Voraussetzung. Da $U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n y_n$ ist, so besitzt die Gleichung

$$y_0=V(x) \tag{12}$$

die Lösung $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n^{(0)}}{\varepsilon_n}$ und es ist nach (10) $|x|\leqslant 1$. Wendet man jetzt den Satz 1 an und beachtet man, daß $Y[U(x)]=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n Y(y_n)$ und daß für $X(x)=Y[V(x)]$, $|X|=\sup_{n=1,2,\dots}\varepsilon_n|Y(y_n)|$ ist, so bekommt man (11).

Nehmen wir jetzt an, daß die Folge $\{\varepsilon_n\}$ der Ungleichung (11) genügt. Für die Gleichung (12) sind dann die Bedingungen des Satzes 1 erfüllt und folglich gibt es eine Lösung $x=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$

---

5) Loc. cit. 4) p. 62, twierdzenie 6 und twierdzenie 7.

6) Auf diese Folgerung hat mich Herr S. Mazur aufmerksam gemacht.

7) Wir bemerken, daß es für eine absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n$ immer eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$ und sogar $\varepsilon_n\geqslant\varepsilon_{n+1}$ $(n=1,2,\dots)$ gibt, so daß $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\xi_n|}{\varepsilon_n}\leqslant 1$ ist. Besitzt also die Gleichung (9) überhaupt eine Lösung, so gibt es eine derartige Folge $\{\varepsilon_n\}$, welche die Ungleichung (11) erfüllt.

von (12) mit $\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|\leqslant 1$. Die Gleichung (9) besitzt dann die Lösung $x_0=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n^{(0)}$ mit $\xi_n^{(0)}=\varepsilon_n\xi_n$ und es ist $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\xi_n^{(0)}|}{\varepsilon_n}\leqslant 1$, w. z. b. w.

Es sei nun E ein beliebiger separabler Raum. Offenbar gibt es dann eine beschränkte Punktfolge $\{x_n\}$ und eine Zahl $M>0$, so daß für jedes in E lineare Funktional $f(x)$ die Ungleichung

$$|f|\leqslant M\sup_{n=1,2,\ldots}|f(x_n)| \tag{13}$$

gilt.

Hilfssatz 2. *Damit die Gleichung*

$$y_0=U(x) \tag{14}$$

eine Lösung in E besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$|Y(y_0)|\leqslant\sup_{n=1,2,\ldots}\varepsilon_n|Y[U(x_n)]| \tag{15}$$

besteht.

Beweis. Betrachten wir die Operation

$$T(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n x_n,\quad z=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_n\in(l),$$

welche den Raum (l) auf den Raum E abbildet. $T(z)$ ist wegen der Beschränktheit der Folge $\{x_n\}$ linear. Ist ferner $f(x)$ ein beliebiges lineares Funktional in E, so gilt für $g(z)=f[T(z)]$, $|g|=\sup_{n=1,2\ldots}|f(x_n)|$. Folglich ist nach (13) $|f|\leqslant M|g|$ und nach einem Satz des Herrn Banach[8]) bildet die Operation $T(z)$ den Raum (l) auf den ganzen Raum E ab. Daraus folgt, daß die Gleichung (14) dann und nur dann eine Lösung in E besitzt, wenn die Gleichung

$$y_0=U[T(z)]$$

eine Lösung in (l) besitzt. Nach dem Hilfssatz 1 ist das dann und nur dann der Fall, wenn es eine Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$ gibt, so daß (15) besteht, w. z. b. w.

[8]) Opérations, p. 146, th. 1.

Definition 1. *Eine Punktfolge $\{e_n\}$ nennt man eine Basis, wenn jedes Element x eine Entwicklung von der Form*

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}c_n e_n,$$

wobei c_i Zahlen sind, zuläßt; die Koefizienten c_i sollen eindeutig bestimmt sein.

Man beweist, daß dann

$$c_i=g_i(x)\qquad(i=1,2,\ldots) \tag{16}$$

lineare Funktionale sind[9]).

Definition 2. *Eine Basis $\{e_n\}$ nennen wir ausgezeichnet, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: sind* n *und* m > n *zwei natürliche, $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ und λ_m beliebige Zahlen, so ist*

$$|\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_n e_n+\lambda_m e_m|\geqslant|\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\ldots+\lambda_n e_n|. \tag{17}$$

Hilfssatz 3. *Besitzt der Raum E eine ausgezeichnete Basis $\{e_n\}$, so besteht für jedes in E lineare Funktional $f(x)$ die Gleichung*

$$|f|=\lim_{n\to\infty}|f_n|,$$

wobei $f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}f(e_i)g_i(x)$ gesetzt wurde.

Beweis. Da $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$ für $x\in E$ ist, so haben wir

$$|f|\leqslant\varliminf_{n\to\infty}|f_n|. \tag{18}$$

Anderseits ist, wenn wir $s_n(x)=\sum_{i=1}^{n}g_i(x)e_i$ setzen, $f_n(x)=f[s_n(x)]$ und daher $|f_n(x)|\leqslant|f|.|s_n(x)|\leqslant|f|.|x|$, da nach (17) $|s_n(x)|\leqslant|x|$ ist. Aus dieser Ungleichung folgt, da sie für jedes x gilt,

$$|f_n|\leqslant|f|\qquad(n=1,2,\ldots)$$

was zusammen mit (18) die Behauptung ergibt.

Definition 3. *Eine Basis $\{e_n\}$ nennen wir eine normierende Basis, wenn es für jede natürliche Zahl* n *eine endliche Folge von Elementen*

$u_{n1}, u_{n2},\ldots, u_{n,m_n}$ *mit* $|u_{ni}|\leqslant K$ $(K>0;\ n=1,2,\ldots;\ i=1,2,\ldots,m_n)$

[9]) Opérations, p. 111.

gibt, so daß für jedes lineare Funktional $f(x)$

(19) $$|f_n| = \max_{i=1,2,\dots,m_n} |f(u_{ni})|$$

gilt.

Hauptsatz. *Es besitze der Raum* E *eine ausgezeichnete normierende Basis. Damit die Gleichung*

(20) $$y_0 = U(x)$$

eine Lösung in E *besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *mit* $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ *gibt, so daß für jedes* $Y(y)$ *die Ungleichung*

(21) $$|Y(y_0)| \leqslant \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n |X_n|$$

besteht, wobei $X(x) = Y[U(x)]$ *gesetzt wurde.*

Beweis. Setzen wir

(22) $$x_n = u_{1,n} \text{ für } n \leqslant m_1$$
$$x_n = u_{k+1,j} \text{ für } n = m_1 + m_2 + \dots + m_k + j \quad (1 \leqslant j \leqslant m_{k+1}),$$

so ist die Folge $\{x_n\}$ beschränkt und nach dem Hilfssatz 3 haben wir für jedes lineare Funktional $f(x)$

$$|f| = \sup_{n=1,2,\dots} |f(x_n)|.$$

Demzufolge besitzt die Gleichung (20) nach Hilfssatz 2 eine Lösung dann und nur dann, wenn es eine Zahlenfolge $\{\bar{\varepsilon}_n\}$ mit $\bar{\varepsilon}_n > 0$, $\bar{\varepsilon}_n \to 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

(23) $$|Y(y_0)| \leqslant \sup_{n=1,2,\dots} \bar{\varepsilon}_n |Y[U(x_n)]|$$

besteht. Dies ist aber mit (21) äquivalent. Denn ist (23) erfüllt, so genügt es

$$\varepsilon_1 = \max_{1 \leq n \leq m_1} \bar{\varepsilon}_n \text{ und allgemein } \varepsilon_i = \max_{\substack{n = m_1 + \dots + m_{i-1} + j \\ 1 \leq j \leq m_i}} \bar{\varepsilon}_n$$

zu setzen und (19), (22) zu berücksichtigen, um (21) zu erhalten. Umgekehrt, wenn (21) erfüllt ist, so setzt man

$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_1 \text{ für } n \leqslant m_1$$
$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_{k+1} \text{ für } n = m_1 + m_2 + \dots + m_k + j \quad (1 \leqslant j \leqslant m_{k+1}),$$

und bekommt (23).

Bemerkung 3. Die in (21) vorkommende Folge $\{\varepsilon_n\}$ ist, wie aus dem Beweise des Hilfssatzes 2 folgt, nur von der

Lösung x_0 und nicht von der Operation $U(x)$ abhängig. Nehmen wir an, wir wissen, daß x_0 eine Lösung von (20) ist und wir wollen die entsprechende Folge $\{\varepsilon_n\}$ direkt bestimmen. Es muß dann für jedes in E lineare Funktional $f(x)$

(24) $$|f(x_0)| \leqslant \sup_{n=1,2,\dots} \varepsilon_n |f_n|$$

sein und das genügt auch, da $Y(y_0) = Y[U(x_0)]$ ist.

Wir wählen zu diesem Zweck nach (16) eine wachsende Folge natürlicher Zahlen $\{N_k\}$, so daß

(25) $$\Big|\sum_{i=N_k+1}^{\infty} g_i(x_0)\, e_i\Big| \leqslant \frac{|x_0|}{2^{2k}} \quad (N_0 = 0,\ k = 0, 1, \dots)$$

sein soll und setzen sodann

(26) $$\varepsilon_n = \frac{|x_0|}{2^{k-1}} \text{ für } N_k < n \leqslant N_{k+1} \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Ist nun $f(x)$ ein beliebiges lineares Funktional, so können wir nach dem Hilfssatz 3 eine natürliche Zahl N mit

(27) $$|f_N| > \frac{1}{2} |f|$$

bestimmen. Es sei

(28) $$N_k < N \leqslant N_{k+1}.$$

Nehmen wir an, daß

(29) $$|f(x_0)| > \varepsilon_n |f_n| \quad (n = 1, 2, \dots N_k)$$

sei. Nach (16) haben wir dann

$$f(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i(x_0) f(e_i) = \sum_{i=1}^{N_1} + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} + \dots + \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} + \sum_{i=N_k+1}^{\infty}$$

$$= f_{N_1}\Big(\sum_{1}^{N_1} g_i(x_0)\, e_i\Big) + f_{N_2}\Big(\sum_{N_1+1}^{N_2} g_i(x_0)\, e_i\Big) + \dots + f_{N_k}\Big(\sum_{N_{k-1}+1}^{N_k} g_i(x_0)\, e_i\Big) + f\Big(\sum_{N_k+1}^{\infty} g_i(x_0)\, e_i\Big).$$

Da aber die Basis $\{e_i\}$ ausgezeichnet ist, so ist weiter nach (25)

$$|f(x_0)| \leqslant |f_{N_1}|\, |x_0| + |f_{N_2}| \left|\frac{x_0}{4}\right| + \dots + |f_{N_k}| \frac{|x_0|}{2^{2k-2}} + |f| \frac{|x_0|}{2^{2k}}.$$

Nach (26), (28) und (29) folgt daraus

$$|f(x_0)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_0)| + \frac{1}{4}|f(x_0)| + \ldots + \frac{1}{2^k}|f(x_0)| + |f|\frac{|x_0|}{2^{2k}}$$

oder $\frac{1}{2^k}|f(x_0)| \leqslant \frac{|f|.|x_0|}{2^{2k}}$. Berücksichtigt man jetzt (27) und (28), so bekommt man

$$|f(x_0)| \leqslant |f_N|\frac{|x_0|}{2^{k-1}} \leqslant |f_N|\varepsilon_N.$$

Die Folge (26) genügt demnach der Ungleichung (24).

§ 3.

Wir werden jetzt den Hauptsatz auf einige Räume anwenden[10]).

1. Der Raum (c_0) der gegen Null konvergierenden Zahlenfolgen.

Die Folge $\{e_n\}$,

$$e_n = \{\xi_k^{(n)}\}, \quad \xi_k^{(n)} = 0 \text{ für } k \neq n, \quad \xi_n^{(n)} = 1 \quad (n=1,2,\ldots)$$

bildet hier ersichtlich eine ausgezeichnete Basis. Ist $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$, $(x = \{\xi_k\})$ ein beliebiges in (c_0) lineares Funktional, so ist $|f_n| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$. Daraus ergibt sich

$$|f_n| = \max|f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n)|,$$

wobei das Maximum sich über alle Systeme $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_k = \pm 1$ $(k=1,2,\ldots,n)$ erstreckt. Die Basis $\{e_n\}$ ist daher eine normierende. Es gilt also der

Satz 3. *Damit die Gleichung*

$$y_0 = U(x)$$

in (c_0) eine Lösung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_k \to 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$|Y(y)| \leqslant \sup_{n=1,2,\ldots} \varepsilon_n \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

besteht, wobei $Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$ gesetzt wurde.

2. Der Raum (c) der konvergenten Zahlenfolgen. Setzen wir $e_0 = \{\xi_k\}$, $\xi_k = 1$ $(k=1,2,\ldots)$, so bildet die Folge $e_0, e_1, \ldots$ eine Basis. Ist

$$f(x) = a_0 \xi + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\xi_k - \xi) \quad (x = \{\xi_k\}, \lim_{k\to\infty} \xi_k = \xi)$$

ein beliebiges in (c) lineares Funktional, so hat man

$$|f_n| = |a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|.$$

Man überzeugt sich demnach, ebenso, wie im Fall des Raumes (c_0), daß die Basis $e_0, e_1, \ldots, e_n, \ldots$ eine ausgezeichnete und normierende ist. Wir haben somit den

Satz 4. *Damit die Gleichung*

$$y_0 = U(x)$$

in (c) eine Lösung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ gibt, so daß für jedes $Y(y)$ die Ungleichung

$$|Y(y_0)| \leqslant \sup_{n=1,2,\ldots} \varepsilon_n \{|a_0 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k| + \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|\}$$

besteht, wobei $Y[U(x)] = a_0 \xi + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\xi_k - \xi)$ gesetzt wurde.

3. Der Raum (L) der in $\langle 0,1 \rangle$ integrierbaren Funktionen.

Hier bildet das Haarsche Orthogonalsystem eine Basis[11]). Man kann leicht zeigen, daß diese Basis eine ausgezeichnete und normierende ist. Wir gehen aber darauf nicht näher ein, da wir direkt einen Hilfssatz beweisen werden, welcher uns einen allgemeineren Satz auszusprechen erlauben wird.

Hilfssatz 4. *Es sei*

$$(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}), \quad 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_{m_n}^{(n)} = 1$$

[10]) Vgl. zu diesem § Opérations, p. 59—68.

[11]) Siehe: J. Schauder, Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, Math. Zeitsch. 26 (1927), p. 50.

eine normale Zerlegungsfolge des Intervalls $\langle 0,1\rangle$, (*d. h. es sei* $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{i=1,2,\dots m_n}(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})=0$); *dann ist für eine beliebige in* $\langle 0,1\rangle$ *beschränkte Funktion* $g(t)$

$$\text{wesentliche obere Grenze}_{0\le t\le 1}\,|g(t)|=\sup_{\substack{n=1,2,\dots\\ i=1,2,\dots,m_n}}\frac{1}{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}\left|\int\limits_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}}g(t)\,dt\right|.$$

Beweis. Wir setzen zur Abkürzung $M=\text{wes. ob. Gr.}_{0\le t\le 1}|g(t)|$. Offenbar ist

$$\frac{1}{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}\left|\int\limits_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}}g(t)\,dt\right|\leqslant M\qquad (n=1,2,\dots;\ i=1,2,\dots,m_n).$$

Anderseits gibt es für ein beliebiges $\varepsilon>0$ mit $\varepsilon<M$ eine meßbare Menge A mit $|A|>0$, so daß $|g(t)|>M-\varepsilon$ für $t\in A$ ist. Bezeichnen wir mit A_1 bzw. A_2 die Menge der Punkte von A, für die $g(t)\geqslant 0$ bzw. $g(t)\leqslant 0$ ist. Eine dieser Mengen, z. B. A_1 hat ein positives Maß. Es sei t ein Punkt von A_1 von der Dichte 1. Es ist dann für genügend große n, wenn $t\in(t_{i-1}^{(n)},t_i^{(n)})=\delta$

$$\frac{1}{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}\left|\int\limits_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}}g(t)\,dt\right|\geqslant\frac{1}{|\delta|}\left(\left|\int\limits_{\delta A_1}\right|-\left|\int\limits_{\delta-A_1}\right|\right)$$
$$\geqslant\frac{|\delta A_1|}{|\delta|}(M-\varepsilon)-\frac{|\delta-A_1|}{|\delta|}M>M-2\varepsilon,$$

woraus die Behauptung folgt.

Satz 5. *Damit die Gleichung*

$$y_0=U(x)$$

in (L) *eine Lösung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *mit* $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n\to 0$ *gibt, so daß für jedes* $Y(y)$ *die Ungleichung*

$$|Y(y_0)|=\sup_{\substack{n=1,2,\dots\\ i=1,2,\dots,m_n}}\varepsilon_n\frac{1}{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}\left|\int\limits_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}}h(t)\,dt\right|$$

besteht, wobei $Y[U(x)]=\int\limits_0^1 x(t)\,h(t)\,dt$, $x=x(t)$ *gesetzt wurde.*

Beweis. Ist $f(x)=\int\limits_0^1 x(t)\,g(t)\,dt$ ein beliebiges, in (L) lineares Funktional, so ist $|f|=\text{wes. ob. Gr.}_{0\le t\le 1}|g(t)|$ und nach Hilfssatz 4 hat man, wenn man für $(n=1,2,\dots;\ i=1,2,\dots,m_n)$

$$u_i^{(n)}(t)=\frac{1}{t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)}}\qquad\left(t_{i-1}^{(n)}\leqslant t\leqslant t_i^{(n)}\right),$$
$$\text{sonst } u_i^{(n)}(t)=0$$

setzt,

$$|f|=\sup_{\substack{n=1,2,\dots\\ i=1,2,\dots,m_n}}|f(u_i^{(n)})|\ \text{ und }\ |u_i^{(n)}|=1\quad(n=1,2,\dots;\ i=1,2,\dots,m_n).$$

Der Satz 5 ist demnach eine Folge des Hilfssatzes 2.

4. Der Raum (C) der in $\langle 0,1\rangle$ stetigen Funktionen.

Hier bildet das Schaudersche System eine Basis[12]). Man kann zeigen, daß es bei entsprechender Anordnung eine ausgezeichnete und normierende Basis ist. Wir verzichten aber wieder auf den Beweis, da wir direkt eine Formel beweisen werden, die einen allgemeineren Satz auszusprechen erlaubt.

Es sei $g(t)$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ eine Funktion von beschränkter Variation. Wir setzen

$$g_0(t)=g(t+0)\quad(0<t<1),\quad g_0(0)=g(0),\quad g_0(1)=g(1).$$

Die Funktion $g_0(t)$ ist, wie leicht einzusehen ebenfalls von beschränkter Variation, unterscheidet sich von $g(t)$ höchstens in einer abzählbaren, im Inneren des Intervalls $\langle 0,1\rangle$ liegenden Menge und ist in jedem Punkt t mit $0<t<1$ rechtsseitig stetig. Ist $0=t_0<t_1<\dots<t_m=1$ irgendeine Zerlegung des Intervalls $\langle 0,1\rangle$, so setzen wir

$$\begin{aligned}(30)\quad v(g;t_0,t_1,\dots,t_m)=&\left|\frac{1}{t_1-t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1}g(t)\,dt-g(0)\right|+\dots+\left|\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}g(t)\,dt\right.\\&\left.-\frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i}g(t)\,dt\right|+\dots+\left|g(1)-\frac{1}{t_m-t_{m-1}}\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}g(t)\,dt\right|.\end{aligned}$$

[12]) Loc. cit. [11]) p. 48.

Hilfssatz 5. *Ist* $(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)})$ *eine normale Zerlegungsfolge des Intervalls* $<0,1>$, *so ist*[13])

$$\lim_{n\to\infty} v(g; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}) = V_0^1(g_0).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß $V_0^1(g_0)$ die obere Grenze der Zahlen $v(g; t_0, t_1, \ldots, t_m)$ ist.

Es ist nämlich zunächst für eine beliebige Zerlegung

$$v(g; t_0, t_1, \ldots, t_m) = v(g_0; t_0, t_1, \ldots, t_m).$$

Setzen wir nun

$$g_0(t) = g_0(0) + P(t) - N(t),$$

wobei $P(t)$ bzw. $N(t)$ die positive bzw. negative Variation der Funktion $g_0(t)$ bezeichnen, so ist

$$v(g; t_0, t_1, \ldots, t_m) \leqslant v(P; t_0, t_1, \ldots, t_m) + v(N; t_0, t_1, \ldots, t_m).$$

Da aber die Funktionen $P(t)$ und $N(t)$ monoton wachsend sind, so haben wir weiter

$$v(P; t_0, t_1, \ldots, t_m) = P(1) - P(0), \quad v(N; t_0, t_1, \ldots, t_m) = N(1) - N(0).$$

Daraus bekommen wir, wegen $V_0^1(g_0) = V_0^1(P) + V_0^1(N)$,

$$v(g_0; t_0, t_1, \ldots, t_m) \leqslant V_0^1(g_0). \tag{31}$$

Anderseits gibt es, für ein beliebiges $\varepsilon > 0$, Punkte

$$0 = \vartheta_0 < \vartheta_1 < \ldots \vartheta_r = 1, \text{ so daß}$$

$$\sum_{i=1}^{r} |g(\vartheta_i) - g(\vartheta_{i-1})| > V_0^1(g_0) - \varepsilon \tag{32}$$

ist. Ferner kann man, da für $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{\beta\to\alpha+0} \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g_0(t)\,dt = g_0(\alpha)$$

gilt, Punkte τ_i mit $\vartheta_i < \tau_i < \vartheta_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$ so wählen, daß

$$s_r = \left|\frac{1}{\tau_1 - \vartheta_1}\int_{\vartheta_1}^{\tau_1} g_0(t)\,dt - g(0)\right| + \ldots \tag{33}$$

$$+\left|\frac{1}{\tau_i - \vartheta_i}\int_{\vartheta_i}^{\tau_i} g_0(t)\,dt - \frac{1}{\tau_{i-1} - \vartheta_{i-1}}\int_{\vartheta_{i-1}}^{\tau_{i-1}} g_0(t)\,dt\right| + \ldots$$

$$+\left|g_0(1) - \frac{1}{\tau_{r-1} - \vartheta_{r-1}}\int_{\vartheta_{r-1}}^{\tau_{r-1}} g_0(t)\,dt\right| > \sum_{i=1}^{r}\left|g_0(\vartheta_i) - g_0(\vartheta_{i-1})\right| - \varepsilon$$

ausfällt. Setzen wir nun $t_{2i-1} = \vartheta_i$, $t_{2i} = \tau_i$, $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, $t_0 = 0$, $t_{2r-1} = 1$, so ist wegen

$$\left|\frac{1}{\tau_i - \vartheta_i}\int_{\vartheta_i}^{\tau_i} - \frac{1}{\tau_{i-1} - \vartheta_{i-1}}\int_{\vartheta_{i-1}}^{\tau_{i-1}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\tau_i - \vartheta_i}\int_{\vartheta_i}^{\tau_i} - \frac{1}{\vartheta_i - \tau_{i-1}}\int_{\tau_{i-1}}^{\vartheta_i}\right|$$

$$+\left|\frac{1}{\vartheta_i - \tau_{i-1}}\int_{\tau_{i-1}}^{\vartheta_i} - \frac{1}{\tau_{i-1} - \vartheta_{i-1}}\int_{\vartheta_{i-1}}^{\tau_{i-1}}\right|$$

$$v(g_0; t_0, t_1, \ldots, t_{2r-1}) > s_r$$

und folglich nach (32) und (33)

$$v(g_0; t_0, t_1, \ldots, t_{2r-1}) > V_0^1(g_0) - 2\varepsilon,$$

was zusammen mit (31) die Behauptung ergibt.

Nun bemerken wir, daß, wenn man von einer Zerlegung $(t_0, t_1, \ldots, t_m)$ zu einer anderen, in welcher die Punkte $t_0, t_1, \ldots, t_m$ ebenfalls Teilpunkte sind, übergeht, die Zahl $v(g_0; t_0, t_1, \ldots, t_m)$ nicht kleiner wird. Um dies nachzuweisen, dürfen wir offenbar annehmen, daß nur ein einziger Teilpunkt hinzugefügt wurde. Es ist dann zu zeigen, daß für $\alpha < \beta < \tau < \gamma < \delta$

$$\left|\frac{1}{\gamma-\beta}\int_\beta^\gamma g_0(t)\,dt - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g_0(t)\,dt\right| + \left|\frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta g_0(t)\,dt\right. \tag{34}$$

$$\left. - \frac{1}{\gamma-\beta}\int_\beta^\gamma g_0(t)\,dt\right| \leqslant \left|\frac{1}{\tau-\beta}\int_\beta^\tau g_0(t)\,dt - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta g_0(t)\,dt\right|$$

$$+\left|\frac{1}{\gamma-\tau}\int_\tau^\gamma g_0(t)\,dt - \frac{1}{\tau-\beta}\int_\beta^\tau g_0(t)\,dt\right|$$

$$+\left|\frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta g_0(t)\,dt - \frac{1}{\gamma-\tau}\int_\tau^\gamma g_0(t)\,dt\right|$$

gilt. Nun ist

[13]) Mit $V_0^1(g_0)$ bezeichnen wir die Variation von $g_0(t)$ in $<0,1>$; die daraus folgende Relation $\lim_{n\to\infty} v(g_0; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}) = V_0^1(g_0)$ gilt allgemein für eine Funktion $g(t)$ mit beschränkter Variation, für die stets die Ungleichung $g(t-0) \leqslant g(t) \leqslant g(t+0)$ bzw. $g(t-0) \geqslant g(t) \geqslant g(t+0)$ besteht.

$$\frac{1}{\gamma-\beta}\int_\beta^\gamma - \frac{1}{\tau-\beta}\int_\beta^\tau = \frac{\gamma-\tau}{\gamma-\beta}\left(\frac{1}{\gamma-\tau}\int_\tau^\gamma - \frac{1}{\tau-\beta}\int_\beta^\tau\right)$$

und daher

$$\left|\frac{1}{\gamma-\beta}\int_\beta^\gamma - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\right| \leqslant \frac{\gamma-\tau}{\gamma-\beta}\left|\frac{1}{\gamma-\tau}\int_\tau^\gamma - \frac{1}{\tau-\beta}\int_\beta^\tau\right| + \left|\frac{1}{\tau-\beta}\int_\beta^\tau - \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta\right|$$

Ähnlich bekommen wir

$$\left|\frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta - \frac{1}{\gamma-\beta}\int_\beta^\gamma\right| \leqslant \left|\frac{1}{\delta-\gamma}\int_\gamma^\delta - \frac{1}{\gamma-\tau}\int_\tau^\gamma\right| + \left|\frac{1}{\gamma-\tau}\int_\tau^\gamma - \frac{1}{\tau-\beta}\int_\beta^\tau\right| \frac{\tau-\beta}{\gamma-\beta}$$

Addiert man die beiden letzten Ungleichungen, so erhält man (34).

Nun können wir zum Beweise des Hilfssatzes übergehen. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Wir wissen schon, daß es eine Zerlegung $(u_0', u_1', \ldots, u_s')$ des Intervalls $\langle 0,1 \rangle$ gibt, so daß $v(g_0; u_0', u_1', \ldots, u_s') > V_0^1(g_0) - \varepsilon$ ist. Da die Funktion $g_0(t)$ höchstens in einer abzählbaren Menge unstetig ist, kann man Punkte $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_s = 1$ genügend nahe den Punkten $u_0', u_1', \ldots, u_s'$ wählen, so daß $g_0(t)$ in $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ stetig ist und daß

$$v(g_0; u_0, u_1, \ldots, u_s) > V_0^1(g_0) - 2\varepsilon \tag{35}$$

gilt. Es gibt dann eine Zahl $\eta > 0$, so daß für $\alpha_i < u_i < \beta_i$, $\beta_i - \alpha_i < \eta$ $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$

$$\sum_{i=1}^{s-1}\left|\frac{1}{\beta_i - u_i}\int_{u_i}^{\beta_i} g_0(t)\,dt - \frac{1}{u_i-\alpha_i}\int_{\alpha_i}^{u_i} g_0(t)\,dt\right| < \varepsilon \tag{36}$$

ist. Wir wählen nun eine natürliche Zahl n_0, so daß für $n > n_0$

$$t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)} < \eta, \qquad 2\left(t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}\right) < u_k - u_{k-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m_n;\ k = 1, 2, \ldots, s) \tag{37}$$

ist. Aus der zweiten Ungleichung folgt, daß für $n > n_0$ höchstens einer der Punkte $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ ins Innere eines Teilintervalls der n-ten Zerlegung fällt und daß in diesem Fall im Inneren der beiden benachbarten Intervalle keiner dieser Punkte sich befindet.

Wir bilden nun für $n > n_0$ eine neue Zerlegung des Intervalls $< 0, 1 >$, indem wir zu den Teilpunkten $t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}$ die Punkte $u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}$ hinzufügen. Die dieser Zerlegung entsprechende Zahl v bezeichnen wir mit v_n'. Zunächst ist, wie wir gesehen haben,

$$v_n' \geqslant v(g_0; u_0, u_1, \ldots, u_s). \tag{38}$$

Ferner ist

$$v_n' - v(g_0; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}) = \sum_r \Delta_r^{(n)}, \tag{39}$$

wobei die rechtsstehende Summe sich auf die Indizes r erstreckt, für welche u_r ins Innere eines Teilintervalls $(t_{i_r}^{(n)}, t_{i_r+1}^{(n)})$ fällt, und es ist für $t_{i_r-1}^{(n)} < t_{i_r}^{(n)} < u_r < t_{i_r+1}^{(n)} < t_{i_r+2}^{(n)}$ (der Einfachheit wegen lassen wir im folgenden die Indizes r und n weg)

$$\Delta_r^{(n)} = \left\{\left|\frac{1}{u_r-t_i}\int_{t_i}^{u_r} - \frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\right| + \left|\frac{1}{t_{i+1}-u_r}\int_{u_r}^{t_{i+1}} - \frac{1}{u_r-t_i}\int_{t_i}^{u_r}\right| + \left|\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} - \frac{1}{t_{i+1}-u_r}\int_{u_r}^{t_{i+1}}\right|\right\}$$
$$- \left\{\left|\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\right| + \left|\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} - \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\right|\right\}.$$

Nun ist aber, ähnlich wie früher,

$$\left|\frac{1}{u_r-t_i}\int_{t_i}^{u_r} - \frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\right| - \left|\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{1}{t_i-t_{i-1}}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\right|$$
$$\leqslant \left|\frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}} - \frac{1}{u_r-t_i}\int_{t_i}^{u_r}\right| \leqslant \frac{t_{i+1}-u_r}{t_{i+1}-t_i}\left|\frac{1}{t_{i+1}-u_r}\int_{u_r}^{t_{i+1}} - \frac{1}{u_r-t_i}\int_{t_i}^{u_r}\right|$$

und ebenso

$$\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} - \frac{1}{t_{i+1}-u_r}\int_{u_r}^{t_{i+1}}\Bigg| - \left|\frac{1}{t_{i+2}-t_{i+1}}\int_{t_{i+1}}^{t_{i+2}} - \frac{1}{t_{i+1}-t_i}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\right|$$
$$\leqslant \frac{u_r-t_i}{t_{i+1}-t_i}\left|\frac{1}{t_{i+1}-u_r}\int_{u_r}^{t_{i+1}} - \frac{1}{u_r-t_i}\int_{t_i}^{u_r}\right|.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt

$$\Delta_r^{(n)} \leqslant 2\left|\frac{1}{t_{i_r+1}^{(n)}-u_r}\int_{u_r}^{t_{i_r+1}^{(n)}} g_0(t)\,dt - \frac{1}{u_r-t_{i_r}^{(n)}}\int_{t_{i_r}^{(n)}}^{u_r} g_0(t)\,dt\right|.$$

Aus (36), (37) und (39) ergibt sich nun für $n > n_0$

$$v'_n - v(g_0; t_0^{(n)}, t_i^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}) < 2\varepsilon$$

Nach (35) und (38) erhält man hieraus für $n > n_0$

$$v(g_0; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}) > V_0^1(g_0) - 4\varepsilon,$$

woraus sich nach (31) der Hilfssatz ergibt.

Satz 6. *Damit die Gleichung*

$$y_0 = U(x)$$

eine Lösung in (C) *besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *mit* $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ *gibt, so daß für jedes* $Y(y)$ *die Ungleichung*

$$|Y(y_0)| \leqslant \sup_{n=1,2,\ldots} \varepsilon_n v(h; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)})$$

besteht, wobei $Y[U(x)] = \int_0^1 x(t)\,dh(t)$, $x = x(t)$ *gesetzt wurde,* $(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)})$ *eine beliebige normale Zerlegungsfolge des Intervalls* $\langle 0,1\rangle$ *ist und* $v(h; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)})$ *durch* (30) *erklärt ist.*

Beweis. Wir setzen

$$x_i^{(n)}(t) = \frac{t - t_{i-1}^{(n)}}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \quad \text{für } t_{i-1}^{(n)} \leqslant t \leqslant t_i^{(n)},$$

$$x_i^{(n)}(t) = \frac{t_{i+1}^{(n)} - t}{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}} \quad \text{für } t_i^{(n)} \leqslant t \leqslant t_{i+1}^{(n)},$$

$$x_i^{(n)}(t) = 0 \text{ für } t < t_i^{(n)} \text{ oder } t > t_{i+1}^{(n)} \quad (i = 0, 1, \ldots, m_n)$$

(für $i=0$ bzw. $i = m_n$ ist das Intervall $(t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)})$ bzw. $(t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)})$ wegzulassen).

Ist nun

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\,dg(t), \quad x = x(t)$$

ein beliebiges, in (C) lineares Funktional, so ist [14] $|f| = V_0^1(g_0)$, wo $g_0(t)$ wie oben erklärt ist. Da aber, wie leicht einzusehen,

$$v(g; t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}) = \sum_{i=0}^{m_n} \Big| \int_0^1 x_i^{(n)}(t)\,dg(t) \Big| = \sum_{i=0}^{m_n} |f(x_i^{(n)})|$$

[14]) Siehe: F. Riesz, Sur les opérations fonctionnelles linéaires, C. R. Acad. Sc. Paris, 149 (1909), p. 974—977.

ist, so haben wir nach Hilfssatz 5

$$|f| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m_n} |f(x_i^{(n)})|.$$

Setzen wir nun

$$z_n(t; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n}) = \sum_{i=0}^{m_n} \alpha_i x_i^{(n)}(t),$$

wobei $\alpha_i = \pm 1$ ist $(i = 0, 1, \ldots, m_n)$, so bekommen wir

$$\sum_{i=0}^{m_n} |f(x_i^{(n)})| = \max |f(z_n; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n})|,$$

wobei das Maximum über alle Systeme $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n})$ mit $\alpha_i = \pm 1$ erstreckt ist. Da ferner stets $|z_n; \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_n}| \leqslant 2$ ist, so ergibt sich Satz 6 in ganz ähnlicher Weise, wie der Hauptsatz; es ist dort nur $|f_n|$ durch $\sum_{i=0}^{m_n} |f(x_i^{(n)})|$ zu ersetzen.

§ 4.

Wir wollen jetzt einige Anwendungen angeben.

1. *Integralgleichungen.* Es sei $K(s,t)$ eine im Quadrat $\langle 0,1; 0,1\rangle$ mit der q-ten Potenz $(q > 1)$ integrierbare Funktion. Setzen wir für $x(t) \in (L^p)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$

$$y(s) = \int_0^1 K(s,t)\,x(t)\,dt, \tag{40}$$

so bekommen wir [15]) eine lineare Operation

$$y = U(x), \quad (x = x(t),\ y = y(s))$$

in (L^p) mit Werten aus (L^q). Ist

$$Y(y) = \int_0^1 y(s) Y(s)\,ds \qquad [Y(s) \in (L^p)]$$

ein lineares Funktional in (L^q), so hat man $Y[U(x)] = \int_0^1 x(t) X(t)\,dt$, wobei $X(t) = \int_0^1 K(s,t) Y(s)\,ds$ ist.

[15]) Opérations, p. 104.

Aus der Bemerkung 1 ergibt sich nun der folgende

Satz 7. *Damit die Gleichung* (40) *eine Lösung* x *in* (L^p) *mit* $\int_0^1 |x(t)|^p dt \leqslant M^p$ ($M>0$ *eine gegebene Zahl*) *besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Funktion* $Y(s) \in (L^{p})$ *die Ungleichung*

$$\left|\int_0^1 Y(s)\, y(s)\, ds\right|^q \leqslant M^q \int_0^1 \left|\int_0^1 K(s,t)\, Y(s)\, ds\right|^q dt$$

besteht.

2. *Lineare Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.* Es sei

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\, \xi_k = \eta_i \qquad (i=1,2,\dots) \tag{41}$$

ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten ξ_k. Wir bestimmen eine Zahlenfolge $\{c_i\}$ mit $c_i>0$ so daß alle Folgen $\{\frac{a_{ik}}{c_k}\}$ $(i=1,2,\dots)$ beschränkt sind. Wir suchen nun eine Lösung $x=\{\xi_n\}$ von (41) mit $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n \xi_n|<\infty$. Der Raum (lc_n) dieser Folgen $\{\xi_n\}$ wird offenbar mit dem Raum (l) äquivalent, wenn wir

$$|x| = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n \xi_n|$$

setzen. Es gilt daher für den Raum (lc_n) ein zu Hilfssatz 1 analoger Satz. Jedes lineare Funktional in (lc_n) ist von der Form $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$, wobei die Folge $\{\frac{a_n}{c_n}\}$ beschränkt und $|f| = \sup_{n=1,2,\dots} \frac{|a_n|}{c_n}$ ist. Setzen wir nun $y=\{\eta_i\}$, so ist durch (41) eine lineare Operation

$$y = U(x)$$

im Raume (lc_n) erklärt, mit Werten aus dem Raume (s). Ist

$$Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m$$

ein beliebiges in (s) lineares Funktional, so ist

$$Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 a_{1k} + \lambda_2 a_{2k} + \dots + \lambda_m a_{mk})\, \xi_k.$$

Wir haben daher den

Satz 8. *Damit das System* (41) *eine Lösung* $\{\xi_n\}$ *mit* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n \xi_n| < \infty$ *besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *mit* $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n \to 0$ *gibt, so daß für beliebige Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (*m beliebig*)

$$|\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \lambda_m \eta_m| \leqslant \sup_{n=1,2,\dots} \frac{\varepsilon_n}{c_n} |\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots \lambda_m a_{mn}|$$

ist.

3. *Summationstheorie.* Es sei A eine normale Summationsmethode, welcher die Matrix $(A)=(a_{ik})$ mit $a_{ik}=0$, $k>i$, $a_{ii} \neq 0$ $(i=1,2,\dots)$ entspricht. Es sei $(A^{-1})=(b_{ik})$ die zur Matrix (A) inverse Matrix. Eine Folge $\{\eta_n\}$ ist offenbar dann und nur dann zu 0 mit der Methode A summierbar, wenn das System der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{i} b_{ik}\, \xi_k = \eta_i \qquad (i=1,2,\dots) \tag{42}$$

eine Lösung in (c_0) besitzt. Setzen wir $x=\{\xi_k\}$, $y=\{\eta_i\}$, so ist durch (42) eine in (c_0) lineare Operation

$$y = U(x)$$

mit Werten aus dem Raum (s) erklärt. Bezeichnet

$$Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m$$

ein beliebiges in (s) lineares Funktional, so ist

$$Y[U(x)] = \sum_{k=1}^{m} (\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \dots + \lambda_m b_{mk})\, \xi_k$$

und mit Rücksicht auf den Satz 3 ergibt sich der

Satz 9. *Damit eine Folge* $\{\eta_n\}$ *mit der Methode* A *zu* 0 *summierbar ist, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *mit* $\varepsilon_n \geqslant \varepsilon_{n+1} > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ *gibt, so daß für beliebige Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ (m *beliebig*)

$$|\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \dots + \lambda_m \eta_m| \leqslant \max_{n=1,2,\dots m} \varepsilon_n \sum_{k=1}^{n} |\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \dots + \lambda_m b_{mk}|$$

gilt[16]).

4. *Das Momentenproblem.* Es sei $\{\varphi_i(t)\}$ eine Folge in $\langle 0,1 \rangle$ integrierbarer Funktionen. Wir betrachten das System der Gleichungen

[16]) Wir benutzen hier die Bemerkung, daß die Folge $\{\varepsilon_n\}$ monoton abnehmend angenommen werden darf. (Vgl. die Fußnote [7])).

$$\int_0^1 x(t)\,\varphi_i(t)\,dt = \eta_i \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{43}$$

wo $\{\eta_i\}$ eine gegebene Zahlenfolge ist und die unbekannte Funktion $x(t)$ stetig sein soll. Die Gleichungen (43) erklären in (C) eine lineare Operation

$$y = U(x), \quad (y = \{\eta_i\},\ x = x(t))$$

mit Werten aus (s). Ist

$$Y(y) = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \ldots + \lambda_m \eta_m$$

ein beliebiges in (s) erklärtes lineares Funktional, so hat man

$$Y[U(x)] = \int_0^1 x(t)\,[\lambda_1 \varphi_1(t) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(t)]\,dt = \int_0^1 x(t)\,dg(t) \tag{44}$$

wobei

$$g(t) = \int_0^t [\lambda_1 \varphi_1(u) + \lambda_2 \varphi_2(u) + \ldots + \lambda_m \varphi_m(u)]\,du \tag{45}$$

ist. Nach Satz 6 erhalten wir hieraus den

Satz 10. *Damit das System* (43) *eine stetige Funktion als Lösung besitzt, ist notwendig und hinreichend, daß es eine Zahlenfolge* $\{\varepsilon_n\}$ *mit* $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ *gibt, so daß für beliebige Zahlen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (m *beliebig*) *die Ungleichung*

$$|\lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \ldots + \lambda_m \eta_m| \leqslant \sup_{n=1,2,\ldots} \varepsilon_n \left\{ \left| \frac{1}{t_1^{(n)} - t_0^{(n)}} \int_{t_0^{(n)}}^{t_1^{(n)}} g(t)dt - g(0) \right| + \ldots \right.$$

$$+ \left| \frac{1}{t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}} \int_{t_i^{(n)}}^{t_{i+1}^{(n)}} g(t)\,dt - \frac{1}{t_i^{(n)} - t_{i-1}^{(n)}} \int_{t_{i-1}^{(n)}}^{t_i^{(n)}} g(t)\,dt \right| + \ldots$$

$$\left. + \left| g(1) - \frac{1}{t_{m_n}^{(n)} - t_{m_n-1}^{(n)}} \int_{t_{m_n-1}^{(n)}}^{t_{m_n}^{(n)}} g(t)\,dt \right| \right\}$$

besteht, wobei $g(t)$ *durch* (45) *erklärt ist und* $(t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \ldots, t_{mn}^{(n)})$ *eine normale Zerlegungsfolge des Intervalls* $< 0, 1 >$ ist.

(Reçu par la Rédaction le 15. 5. 1936).
