Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Räumen

von

M. EIDELHEIT (Lwów).

Bekanntlich gibt es in einem euklidischen Raum für zwei konvexe Körper, die keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen, eine sie trennende Ebene. Herr S. Mazur hat nun die Frage gestellt, ob dieser Satz auch in linearen normierten Räumen richtig bleibt. Dabei nennen wir eine konvexe Menge einen *konvexen Körper*, wenn sie innere Punkte besitzt. Unter einer *Ebene* verstehen wir die Menge der Punkte, die eine Gleichung von der Form

(1) $$f(x)=c$$

erfüllen, in der $f(x)$ ein lineares Funktional, c eine reelle Zahl bedeutet. Wir sagen, daß die Ebene, die durch (1) gegeben ist, zwei konvexe Körper *trennt*, wenn in einem Körper stets $f(x)\leqslant c$, im anderen stets $f(x)\geqslant c$ gilt.

In der vorliegenden Note wird diese Frage positiv beantwortet.

Es sei K ein konvexer Körper, x_0 ein innerer Punkt von K. Ist x ein beliebiger Punkt, so setzen wir $K(x)=$ untere Grenze der positiven Zahlen h, für welche

$$\left(\frac{x}{h}+x_0\right)\in K.$$

$K(x)$ heißt das *Minkowskische Funktional* des Körpers K inbezug auf den Punkt x_0. Das Minkowskische Funktional besitzt folgende Eigenschaften:

1. Es ist $K(x-x_0)<1$, wenn x ein innerer, $K(x-x_0)=1$, wenn x ein Randpunkt, $K(x-x_0)>1$, wenn x ein äußerer Punkt von K ist. 2. $K(x)\geqslant 0$, $K(0)=0$. 3. $K(tx)=tK(x)$ für reelle

positive t und beliebige Elemente x. 4. $K(x+y)\leqslant K(x)+K(y)$ für beliebige Elemente x, y. 5. $K(x)\leqslant M|x|$, wo $M>0$ von x unabhängig ist. 6. Ist K beschränkt, so gibt es ein $m>0$, so daß $K(x)>m\,|x|$ ist (m eine Konstante) [1]).

Satz. *Sind zwei konvexe Körper ohne gemeinsame innere Punkte in einem linearen normierten Raume gegeben, so gibt es immer eine sie trennende Ebene.*

Beweis. Wir behandeln zuerst den Fall, daß K_1 und K_2 zwei konvexe Körper mit gemeinsamen Randpunkten sind. Es seien x_0 ein gemeinsamer Randpunkt, x_1 und x_2 innere Punkte von K_1 bzw. K_2. Wir dürfen annehmen, daß

(2) $$x_2=2x_0\neq 0$$

ist, denn man kann das immer durch eine Translation der beiden Körper um x_2-2x_0 erreichen. Wir bezeichnen das Minkowskische Funktional des Körpers K_2 inbezug auf den Punkt x_2 mit $K_2(x)$. Es ist dann, wegen (2), für die Punkte x des Körpers K_2

(3) $$K_2(x-2x_0)\leqslant 1$$

und es gibt eine positive Zahl M_2, derart daß

(4) $$K_2(x)\leqslant M_2|x|$$

für alle x gilt.

Es sei jetzt H_1 die Menge der Punkte z' von der Form

$$z'=z+\vartheta(x-z),$$

wobei ϑ eine Zahl, x, z Elemente mit

(5) $$0\leqslant\vartheta\leqslant 1,\ x\in K_1,\ |z|<\frac{1}{M_2}$$

sind. H_1 ist ein konvexer Körper, der den Körper K_1 und außerdem den Nullpunkt als inneren Punkt enthält. Wir beweisen zunächst, daß die Mengen H_1, K_2 keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Es genügt zu zeigen, daß stets

$$K_2(z'-2x_0)\geqslant 1$$

ist.

[1]) Vgl. S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen, normierten Räumen, Studia Math. 4 (1933) p. 70—84, insb. p. 71—73.

In der Tat ist

(6) $K_2(z'-2x_0) \geqslant K_2(\vartheta x-2x_0) - K_2(\vartheta x - z')$

und wegen (4), (5)

(7) $K_2(\vartheta x - z') = (1-\vartheta) K_2(-z) \leqslant (1-\vartheta) M_2 |z| \leqslant 1-\vartheta.$

Ferner ist, wenn wir

(8) $$w = 2x_0 + \frac{1}{2-\vartheta}(\vartheta x - 2x_0)$$

setzen,

(9) $$K_2(\vartheta x - 2x_0) = (2-\vartheta) K_2(w-2x_0).$$

Da man (8) auch in der Form

$$w = x_0 + \frac{\vartheta}{2-\vartheta}(x-x_0)$$

schreiben kann, woraus wegen (5) $w \in K_1$ folgt, so ist, da ja K_1 und K_2 ohne gemeinsame innere Punkte vorausgesetzt sind,

$$K_2(w-2x_0) \geqslant 1.$$

Aus (6), (7) und (9) folgt nun

$$K_2(z'-2x_0) \geqslant (2-\vartheta) - (1-\vartheta) = 1.$$

Bezeichnen wir jetzt mit K die Menge der Punkte von der Form

$$x + t(y-x),$$

wobei t eine reelle Zahl bedeutet und wo

(10) $$x \in H_1,\ K_2(-y) \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

so ist K ein konvexer Körper, der den Körper H_1 enthält.

Wir beweisen im folgenden, daß x_0 ein Randpunkt des Körpers K ist. Es genügt zu zeigen, daß K keinen Punkt von der Form ax_0 mit

(11) $$a > 1$$

enthält. Nehmen wir an, daß im Gegenteil

(12) $$ax_0 = x + t(y-x)$$

sei und daß die Relationen (10), (11) erfüllt seien. Wir dürfen dabei in (10) $t > 0$ voraussetzen, da sonst die Körper H_1 und K_2 einen gemeinsamen inneren Punkt besitzen würden. Aus (12) folgt

(13) $$y = ax_0 - \frac{1-t}{t}(x - ax_0).$$

Wir wählen nun eine Zahl λ mit

(14) $$0 < \lambda < \frac{t}{1-t},\ \lambda < 1$$

und setzen

(15) $$y' = x_0 + \lambda(y - x_0).$$

Da x_0 ein Randpunkt des Körpers K_2 und infolgedessen

$$K_2(-x_0) = K_2(x_0 - 2x_0) = 1$$

ist, so haben wir mit Berücksichtigung von (10)

(16) $$K_2(-y') \leqslant 1;$$

anderseits ist nach (13)

(17) $$y' = bx_0 - \lambda\frac{1-t}{t}(x - bx_0) \text{ mit } b = \frac{t-\lambda t + \lambda a}{t - \lambda t + \lambda},$$

wobei, wegen (10), (11) und (14), $b > 1$ ist.

Wir bemerken jetzt, daß

$$K_2[x_0 + \vartheta(x-x_0) - 2x_0] \geqslant 1 \text{ für } 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1,\ x \in H_1$$

ist, da H_1 und K_2, wie gezeigt wurde, keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen. Da $0 \in H_1$, so ist für $x \in H_1$ auch $x/b \in H_1$ und infolgedessen

$$K_2[-x_0 + \vartheta(\frac{x}{b} - x_0)] \geqslant 1 \text{ für } 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1,\ x \in H_1.$$

Nach (14) können wir hier $\vartheta = \lambda\dfrac{1-t}{t}$ setzen und erhalten, wenn wir noch beiderseits mit b multiplizieren,

$$K_2[-bx_0 + \lambda\frac{1-t}{t}(x - bx_0)] \geqslant b > 1,$$

was mit (16) und (17) im Widerspruch steht.

Es sei nun $K(x)$ das Minkowskische Funktional des Körpers K inbezug auf den Nullpunkt. Nach einem bekannten Satz des Herrn Banach[2]) gibt es, da $K(x_0) = 1$ ist, ein additives Funktional $f(x)$ mit

(18) $$f(x_0) = 1,\ f(x) \leqslant K(x) \text{ für jedes } x,$$

und aus dieser Ungleichung ergibt sich, daß $f(x)$ auch linear ist.

---

[2]) S. Banach, Théorie des Opérations linéaires, Warszawa (1932), p. 27, th. 1.

Aus (10) folgt, daß für ein beliebiges x, $y=\frac{x}{K_2(-x)}\in K$ ist und infolgedessen

(19) $$K(x)\leqslant K_2(-x).$$

Ebenso ist, wegen $K\supset H_1, K(x)\leqslant H_1(x)$, wenn wir mit $H_1(x)$ das Minkowskische Funktional des Körpers H_1 inbezug auf den Nullpunkt bezeichnen. Aus (18) ergibt sich ferner

(20) $$f(x)\leqslant K_2(-x) \text{ und } f(x)\leqslant H_1(x).$$

Die erste Ungleichung ist mit $f(x)\geqslant -K_2(x)$ äquivalent. Für $x\in K_2$ folgt hieraus

$$f(x-2x_0)\geqslant -K_2(x-2x_0)\geqslant -1 \text{ und, wegen } f(x_0)=1,$$
$$f(x)\geqslant 1.$$

Nach (20) ist noch für $x\in H_1$

$$f(x)\leqslant 1.$$

Die Ebene $f(x)=1$ trennt also die Körper H_1 und K_2 und umsomehr K_1 und K_2.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß K_1 und K_2 zwei konvexe beschränkte Körper mit einem positiven Abstand d voneinander sind.

Wir wählen beliebig zwei Punkte x_1 und x_2, die innere Punkte von K_1 bzw. K_2 sind und bezeichnen mit $K_1(x)$ bzw. $K_2(x)$ das Minkowskische Funktional des Körpers K_1 bzw. K_2 inbezug auf x_1 bzw. x_2. Wegen der Beschränktheit der Körper K_1, K_2 gibt es positive Zahlen m_1, M_1, m_2, M_2 mit

(21) $m_1|x|\leqslant K_1(x)\leqslant M_1|x|$, $m_2|x|\leqslant K_2(x)\leqslant M_2|x|$ für jedes x.

Wir setzen [3])

$$\alpha=\inf_{x\in K_2} K_1(x-x_1),\quad \beta=\inf_{x\in K_1} K_2(x-x_2)$$

und zeigen zunächst, daß

(22) $$\alpha>1,\ \beta>1$$

ist. In der Tat ist für $x\in K_2$, da ja K_1 und K_2 einen positiven Abstand voneinander haben, $K_1(x-x_1)>1$ und infolgedessen

(23) $$K_1(x-x_1)=1+K_1(x-x_1)\left(1-\frac{1}{K_1(x-x_1)}\right)$$
$$=1+K_1\left(x-x_1-\frac{x-x_1}{K_1(x-x_1)}\right).$$

[3]) Das Zeichen „inf." bedeutet die untere Grenze.

Da aber der Punkt $x_1+\frac{x-x_1}{K_1(x-x_1)}$ dem Rande des Körpers K_1 angehört, so ist für $x\in K_2$

$$\left|x-x_1-\frac{x-x_1}{K_1(x-x_1)}\right|\geqslant d$$

und nach (21) ergibt sich aus (23)

$$K_1(x-x_1)\geqslant 1+m_1 d,$$

also $\alpha>1$. Ebenso bekommen wir $\beta>1$.

Nun ist leicht einzusehen, daß es einen Punkt x_0 gibt, für welchen

(24) $$K_1(x_0-x_1)\leqslant\alpha,\ K_2(x_0-x_2)\leqslant\beta$$

ist. Wäre nämlich für jeden Punkt x, welcher der Ungleichung $K_1(x-x_1)\leqslant\alpha$ genügt, $K_2(x-x_2)>\beta$, so hätten wir für x, welche den Ungleichungen

$$\alpha\leqslant K_1(x-x_1)<\alpha+\frac{(\beta-1)m_1}{M_2}$$

genügen, nach (21)

$$K_2[x-x_2]\geqslant K_2\left[x_1+\alpha\frac{x-x_1}{K_1(x-x_1)}-x_2\right]-K_2\left[x_1+\alpha\frac{x-x_1}{K_1(x-x_1)}-x\right]$$
$$>\beta-M_2\left|x_1+\alpha\frac{x-x_1}{K_1(x_1-x_1)}-x\right|>\beta-\frac{M_2}{m_1}K_1\left[x-x_1-\alpha\frac{x-x_1}{K_1(x-x_1)}\right]$$
$$=\beta-\frac{M_2}{m_1}[K_1(x-x_1)-\alpha]>\beta-\frac{M_2}{m_1}\cdot\frac{(\beta-1)m_1}{M_2}=1.$$

Es wäre dann für $x\in K_2$

$$K_1(x-x_1)\geqslant\alpha+\frac{(\beta-1)m_1}{M_2},$$

entgegen der Definition der Zahl α.

Es seien nun K' bzw. K'' die Mengen der Punkte von der Form

$$x_0+t(x-x_0),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in K_1, \text{ bzw. } x_0+t(x-x_0),\ 0\leqslant t\leqslant 1,\ x\in K_2.$$

K' und K'' sind konvexe Körper, welche die Körper K_1 bzw. K_2 enthalten, und besitzen den gemeinsamen Punkt x_0.

Wir bemerken, daß x_0 der einzige gemeinsame Punkt ist. Denn wäre für gewisse t_1, t_2 $(0<t_1\leqslant 1,\ 0<t_2\leqslant 1)$ $x\in K_1$, $y\in K_2$

$$x_0+t_1(x-x_0)=x_0+t_2(y-x_0),$$
so hätten wir auf Grund von (22) und (24), wenn z. B. $t_1/t_2 \leqslant 1$ ist,
$$K_1(y-x_1)=K_1[(x_0-x_1)(1-\frac{t_1}{t_2})+\frac{t_1}{t_2}(x-x_1)]<\alpha,$$
entgegen der Definition der Zahl α. Ähnlich kommen wir zu einem Widerspruch, wenn wir $t_2/t_1 \leqslant 1$ annehmen.

Die Körper K_1', K'' genügen also den Bedingungen des schon behandelten Falles und wir können auf sie den Satz anwenden. Da $K' \supset K_1$, $K'' \supset K_2$, so gibt es auch für die Körper K_1, K_2 eine sie trennende Ebene.

Nun lassen wir die Voraussetzung des positiven Abstandes der beschränkten Körper K_1 und K_2 voneinander fallen. (Es ist zu beachten, daß auch dann, wenn K_1 und K_2 abgeschlossen sind, sie keine gemeinsamen Punkte zu besitzen brauchen).

Wir behalten die vorigen Bezeichnungen bei. Es sei H_n der konvexe Körper, welcher durch
$$K_1(x-x_1)\leqslant\frac{n}{n+1} \qquad (n=1,2,\ldots)$$
gegeben ist. Die Körper K_2 und H_n $(n=1,2,\ldots)$ haben einen positiven Abstand voneinander, denn es ist für $x \in H_n$, $y \in K_2$
$$K_1(y-x)\geqslant K_1(y-x_1)-K_1(x-x_1)\geqslant 1-\frac{n}{n+1},$$
also nach (21)
$$|y-x|\geqslant\frac{1}{M_1}\cdot\frac{1}{n+1}.$$
Da $H_n \subset K_1$, also H_n beschränkt ist, so gibt es nach dem Vorangehenden für jedes n eine Ebene von der Form
$$f_n(x)=1,$$
welche die Körper K_2, H_n trennt. Es ist dann

(25) $$f_n(x)\leqslant 1 \text{ für } x \in H_n;\ f_n(x)\geqslant 1 \text{ für } x \in K_2 \quad (n=1,2,\ldots).$$

Aus diesen Ungleichungen folgt, da H_n, K_2 innere Punkte besitzen, daß die Folge $\{|f_n|\}$ beschränkt ist. Daraus folgt weiter [4]), daß es ein lineares Funktional $f(x)$ mit

[4]) loc. cit. [3]) p. 118, lemme 1.

(26) $$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\leqslant f(x)\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$

für jedes x gibt. Aus (25), (26) folgt zunächst

(27) $$f(x)\geqslant 1 \text{ für } x \in K_2.$$

Es sei ferner x ein beliebiger innerer Punkt des Körpers K_1. Es ist dann $x \in H_n$ für genügend große n, also nach (25) $f_n(x)\leqslant 1$. Nach (26) folgt hieraus

(28) $$f(x)\leqslant 1.$$

Aus der Stetigkeit des Funktionals $f(x)$ ergibt sich (28) auch auf dem Rande von K_1. Die Ungleichungen (27), (28) zeigen, daß die Ebene $f(x)=1$ die verlangte Eigenschaft besitzt.

Wir erledigen endlich den allgemeinen Fall, wenn man von den konvexen Körpern K_1, K_2 nur weiß, daß sie keine gemeinsamen inneren Punkte besitzen.

Wir bezeichnen mit $H_1^{(n)}$ bzw. $H_2^{(n)}$ denjenigen Teil des Körpers K_1 bzw. K_2, welcher in der Kugel $|x|\leqslant n$ liegt. Die — für genügend große n — konvexen Körper $H_1^{(n)}$, $H_2^{(n)}$ sind beschränkt. Es gibt also — für diese n — nach dem schon Bewiesenen, lineare Funktionale $f_n(x)$ derart, daß
$$f_n(x)\leqslant 1 \text{ für } x \in H_1^{(n)};\ f_n(x)\geqslant 1 \text{ für } x \in H_2^{(n)}$$
ist. Aus diesen Ungleichungen ergibt sich wie oben, daß es ein lineares Funktional $f(x)$ mit
$$\varliminf_{n\to\infty} f_n(x)\leqslant f(x)\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} f_n(x)$$
für jedes x gibt. Ist nun $x \in K_1$, so gilt, von einem gewissen n_0 ab, $x \in H_1^{(n)}$, also $f_n(x)\leqslant 1$. Daraus ergibt sich
$$f(x)\leqslant 1 \text{ für } x \in K_1.$$
Ähnlich bekommt man
$$f(x)\geqslant 1 \text{ für } x \in K_2.$$

Die Ebene
$$f(x)=1$$
trennt also die Körper K_1, K_2 w. z. b. w.

(Reçu par la Rédaction le 20. 4. 1936).