# Einige Gegenbeispiele zur Konvergenztheorie der allgemeinen Orthogonalentwicklungen

von

W. ORLICZ (Lwów).

Herr J. MARCINKIEWICZ hat den folgenden interessanten Satz bewiesen[1]):

Für ein beliebiges Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ existiert eine Indizesfolge $\{n_p\}$ mit der Eigenschaft, daß die Folge

$$\sum_{i=1}^{n_p} a_i \varphi_i(x),$$

wo $a_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx$, $f(x) \in (L^2)$, fast überall konvergiert.

Wir betrachten im folgenden einige Orthogonalentwicklungen, die gewisse Konvergenzdefekte aufweisen; aus dem Satz 1′ folgt insbesondere, daß der vorstehende Satz des Herrn J. MARCINKIEWICZ auf den Fall der Räume $(L^\alpha)$, $1 \leqslant \alpha < 2$, sich nicht verallgemeinern läßt.

Wir bezeichnen mit $M[u]$ eine in $\langle 0, +\infty)$ stetige, konvexe Funktion, die nur für $u=0$ gleich Null ist und außerdem den Bedingungen $\lim\limits_{u\to 0} M[u]u^{-1} = 0$, $\lim\limits_{u\to\infty} M[u]u^{-1} = +\infty$, $M[2u] \leqslant kM[u]$ für $u \geqslant u_0$ genügt. Mit $(L^M)$ bezeichnen wir den Raum vom Typus $(B)$ aller derjenigen meßbaren Funktionen $f(x)$, für welche das Integral $\int_a^b M[|f(x)|]\,dx$ endlich ist.

[1]) J. Marcinkiewicz, Sur la convergence des séries orthogonales, dieser Band, p. 39—45.



Satz 1. *Die Funktion $M[u]$ genüge der Bedingung*

$$\lim_{u\to\infty} M[u]u^{-2} = 0;$$

*dann existiert in $(a, b)$ ein Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ mit der folgenden Eigenschaft:*

*Für jede zeilenfinite* Toeplitz*sche Summationsmethode $T$ gibt es eine Funktion $f(x) \in (L^M)$, so daß, $a_i = \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx$ gesetzt, die Orthogonalentwicklung*

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_i(x)$$

*für fast jedes $x$ mit der Methode $T$ nicht summierbar ist.*

Beweis. Man konstruiert zuerst ganz leicht eine Funktion $f^*(x)$, so daß $f^*(x) > 0$ für $x \in (a, b)$, $f^*(x) \in (L^M)$, $\int_a^b (f^*(x))^2\,dx = +\infty$; wir behaupten das jedes in $(a, b)$ erklärte Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$, welches in $(L^2)$ vollständig ist, für welches aber $\int_a^b f^*(x)\varphi_i(x)\,dx = 0$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$, die obige Eigenschaft aufweist[2]).

Da unserer Voraussetzung gemäß das Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ in $(L^2)$ vollständig ist, so ist es in $(L^M)$ abgeschlossen, d. h. wenn $f(x) \in (L^M)$, $\varepsilon > 0$ vorgegeben sind, so gibt es eine lineare Kombination $w_m(x) = \sum_{i=1}^{N(m)} c_i^{(m)} \varphi_i(x)$ mit

$$\int_a^b M[|f(x) - w_m(x)|]\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Aus einem Satze des Herrn S. SAKS[3]) ergibt sich zuerst die Existenz einer Menge $A \subset (a, b)$ so daß:

[2]) Der Ansatz zu dieser Beweismethode stammt von S. Banach, siehe: S. Banach, Sur la convergence presque partout des fonctionnelles linéaires, Bull. des Sc. Math. 50 (1926) p. 27—32, 36—43.

[3]) S. Saks, Sur les fonctionnelles de M. Banach et leur application aux développements des fonctions, Fund. Math. 10 (1927) p. 186—196; insb. p. 192, théorème 6.

a) wenn $f(x) \in (L^M)$, so ist die Reihe (1) fast überall in $A$ $T$-summierbar;

b) es gibt Funktionen aus $(L^M)$, für welche fast überall in $(a, b) - A$ die Reihe (1) mit der Methode $T$ nicht summierbar ist.

Es ist $|A| = 0$; denn nehmen wir an, es sei $|A| > 0$ und bezeichnen wir mit $S(f; x), f(x) \in (L^M)$ die fast überall in $A$ existierende Grenzfunktion

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{n=1}^{N(n)} a_{in} s_n(f; x) = S(f; x),$$

wobei $(a_{in})$ $(i = 1, 2, 3 \ldots;\ n = 1, 2, 3 \ldots N(n))$ die der Methode $T$ entsprechende Matrix, $s_n(f; x)$ die $n$-te Teilsumme der Entwicklung (1) bedeuten. $S(f; x)$ kann als eine lineare Operation[4]) in $(L^M)$ betrachtet werden, deren Werte dem Raume $(S)$ angehören. Da $S(w_m; x) = w_m(x)$, so folgt aus dem Vorangehenden für jede Funktion aus $(L^M)$ die Identität $S(f; x) = f(x)$ fast überall in $A$. Dies ist aber mit $S(f^*; x) \equiv 0$ unvereinbar.

Wählen wir als $f^*(x)$ eine Funktion welche mit jedem positiven Exponenten $\alpha < 2$, jedoch nicht quadratisch integrierbar ist, so ergibt eine ähnliche Beweisfü rung den

Satz 1'. *Es existiert in $(a, b)$ ein Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ mit der Eigenschaft:*

*Ist $1 \leqslant \alpha < 2$, $T$ eine beliebige zeilenfinite* Toeplitz*sche Summationsmethode, so gibt es eine Funktion $f(x)$ mit*

$$\int_a^b |f(x)|^\alpha dx < +\infty,$$

*deren Orthogonalentwicklung (1) fast überall nicht $T$-summierbar ist.*

Satz 2. *Die Funktion $M[u]$ genüge der Bedingung*

$$\lim_{u \to \infty} M[u]\, u^{-2} = 0;$$

*das im Laufe des Beweises vom Satz 1 benutzte unvollständige Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ besitzt die folgenden Eigenschaften:*

a) *Wenn $T$ eine beliebige zeilenfinite* Toeplitz*sche Summationsmethode bezeichnet, die der Matrix $(a_{in})$ $(i = 1, 2, 3 \ldots;$ $n = 1, 2, 3 \ldots N(n))$, entspricht, so gibt es eine Funktion $f(x) \in (L^M)$, so daß die Folge der Transformierten*

$$(2) \qquad T_i(f; x) = \sum_{n=1}^{N(n)} a_{in} s_n(f; x)$$

*nicht asymptotisch konvergent ist;*

b) *Es gibt Funktionen $f(x) \in (L^M)$, für welche*

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \int_a^b |T_i(f; x)|\, dx = +\infty;$$

c) *Wenn $M'[u]$ die zu $M[u]$ komplementäre Funktion bezeichnet*[5]), *so gibt es stetige Funktionen $g(x)$, so daß*

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \int_a^b M'[|T_i(g; x)|]\, dx = +\infty.$$

Beweis. a) Wenn die Folge $\{T_i(f; x)\}$ für jede Funktion $f(x) \in (L^M)$ asymptotisch gegen $S(f; x)$ konvergiert, so ist $S(f; x)$ eine lineare Operation in $(L^M)$, deren Werte dem Raume $(S)$ angehören; eine ähnliche Überlegung wie früher zeigt, daß $S(f; x) = f(x)$, was mit $S(f^*; x) \equiv 0$ im Widerspruch steht.

b) Nehmen wir an, daß für jedes $f(x) \in (L^M)$

$$\overline{\lim_{i \to \infty}} \int_a^b |T_i(f; x)|\, dx < +\infty.$$

Dies hat die Ungleichung

$$\int_a^b |T_i(f; x)|\, dx \leqslant C \text{ wenn } \int_a^b M[|f(x)|]\, dx \leqslant 1$$

mit einem konstanten $C$ zur Folge, woraus sich weiter, wegen der Abgeschlossenheit des Orthogonalsystems $\{\varphi_i(x)\}$ in $(L^M)$, die Beziehung $\lim_{i \to \infty} \int_a^b |T_i(f; x) - f(x)|\, dx = 0$ ergibt. Es müßte also die Folge $\{T_i(f; x)\}$ für jedes $f(x) \in (L^M)$ asymptotisch konvergieren.

[4]) Siehe die unter [2]) genannte Arbeit des Herrn Banach oder die unter [3]) genannte Arbeit des Herrn Saks.

[5]) Siehe: Z. Birnbaum — W. Orlicz, Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Studia Math. 3 (1931) p. 1—67, insb. p. 8.

c) Wäre für jede stetige Funktion $g(x)$ die Ungleichung

$$\overline{\lim_{i\to\infty}} \int_a^b M'[|T_i(g;x)|]\,dx < +\infty$$

erfüllt, so hätte man für jede Funktion $f(x) \in (L^M)$

$$\left|\int_a^b f(x)T_i(g;x)\,dx\right| = \left|\int_a^b g(x)T_i(f;x)\,dx\right|$$

$$\leqslant K(g) + \int_a^b M[|f(x)|]\,dx = C(g) \qquad (i=1,2,3\ldots)$$

und hieraus weiter

$$\int_a^b |T_i(f;x)|\,dx \leqslant C \text{ für} \int_a^b M[|f(x)|]\,dx \leqslant 1,$$

$$\lim_{i\to\infty}\int_a^b |T_i(f;x) - f(x)|\,dx = 0,$$

was, wie wir schon wissen, unmöglich ist.

Die im Vorangehenden angewandte, sehr allgemeine Beweismethode erlaubt nicht zu entscheiden, ob gleichmäßig beschränkte, oder in $(L^1)$ vollständige Orthogonalsysteme $\{\varphi_i(x)\}$ existieren mit den Eigenschaften von den in den obigen Sätzen die Rede war, und es bleibt eine offene Frage, ob sich unsere Sätze dahin verschärfen lassen. In dieser Richtung liegt der folgende einfache Satz, der aber nicht einmal ein Gegenbeispiel zu dem Satz von Marcinkiewicz (im Falle der Räume $(L^\alpha)$, $1 \leqslant \alpha < 2$) liefert.

Satz 3. *Zu einer vorgegebenen Funktion $M[u]$ mit*

$$\lim_{u\to\infty} M[u]\,u^{-2} = 0$$

*und einer vorgegebenen zeilenfiniten* Toeplitz*schen Summationsmethode $T$ existiert ein gleichmäßig beschränktes, in $(L^1)$ vollständiges, Orthogonalsystem von der Eigenschaft: Es gibt eine Funktion $f(x) \in (L^M)$, für welche die Folge der Transformierten* (2) *in einer Menge von positivem Maße divergiert und asymptotisch nicht konvergent ist. Dieses Orthogonalsystem $\{\varphi_i(x)\}$ besitzt außerdem die Eigenschaften* b), c) *des Satzes 2.*

Beweis. Betrachten wir zuerst irgendein Orthogonalsystem $\{\psi_i(x)\}$, das aus gemeinsam beschränkten Funktionen besteht und in $(L^1)$ vollständig ist. Wir wählen eine Funktion $f(x)$ so daß



$$\int_a^b M[|f(x)|]\,dx < +\infty, \qquad \int_a^b f^2(x)\,dx = +\infty;$$

wenn wir mit $a_i$ die Koeffizienten dieser Funktion bezeichnen, so ist $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = +\infty$. Aus früheren Sätzen des Verfassers [6]) ergibt sich die Existenz einer Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ mit der Eigenschaft, daß die der $T$-Methode entsprechende Transformierten der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varepsilon_i \psi_i(x)$ in einer Menge vom positiven Maße divergent sind und asymptotisch nicht konvergieren. Das Orthogonalsystem $\varphi_i(x) = \varepsilon_i \psi_i(x)$ besitzt die verlangten Eigenschaften.

[6]) W. Orlicz, Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen, Studia Math. 4 (1933) p. 27—32.

*(Reçu par la Rédaction le 11. 4. 1936).*