Sur l'interpolation (I)

par

J. MARCINKIEWICZ (Wilno).

Soit donnée une fonction $f(x)$ continue et de période 2π. D'après les théorèmes classiques, quel que soit n naturel on peut former un polynome trigonométrique d'ordre n au plus, coïncidant avec $f(x)$ en $(2n+1)$ points différents de l'intervalle $(0, 2\pi)$.

On sait que ce polynome est unique[1]). Son expression analytique, en général assez compliquée, devient bien simple si l'on prend pour la base d'interpolation les $2n+1$ points

0.1 $$x_i = i \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \qquad (i=0, 1, \ldots, 2n),$$

c'est-à-dire dans le cas où l'on définit le polynome cherché $U_n(f, x)$ par les $2n+1$ égalités

0.2 $$U_n(f, x_i) = f(x_i), \qquad (i=0, 1, \ldots, 2n).$$

En effet, soit

0.3 $$\varphi_n(t) = i \cdot \frac{2\pi}{2n+1}$$

pour

$$i \cdot \frac{2\pi}{2n+1} \leqslant t < (i+1)\frac{2\pi}{2n+1} \quad (i=0, 1, 2, \ldots 2n);$$

alors[2])

0.4 $$U_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)\, d\varphi_n(t),$$

où $$D_n(t) = \frac{\sin(n+{}^1\!/_2)\,t}{2\sin t/_2}.$$

[1]) Voir p. ex. Jackson [1], p. 109 sqq.

[2]) Jackson [1], p. 116; voir aussi Marcinkiewicz [1].

Si l'on pose

0.5 $$U_n(f,x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{i=1}^{n}(a_i^{(n)}\cos ix+b_i^{(n)}\sin ix),$$

les coëfficients a et b se trouvent définis par les égalités [3])

0.6 $$a_i^{(n)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos it\,d\varphi_n(t),$$
$$b_i^{(n)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin it\,d\varphi_n(t).$$

On remarque une grande analogie formelle entre l'expression (0.4) et la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de la fonction f:

0.7 $$S_n(f,x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,D_n(x-t)\,dt.$$

En partant de cette remarque j'essaye de développer la théorie des polynomes $U_n(f,x)$ parallèlement à celle des séries de Fourier.

Dans cette note je m'occuppe seulement des fonctions continues. En particulier, les paragraphes 1 et 2 contiennent les théorèmes négatifs sur la sommabilité forte et ordinaire de la suite $U_n(f,x)$, les paragraphes 3, 4, 5 les théorèmes positifs relatifs à la convergence, enfin au paragraphe 6 je donne la résolution positive du problème de la convergence „en moyenne".

Le dernier paragraphe est consacré à l'énoncé de quelques questions restant ouvertes.

§ 1.

Théorème 1. *On peut définir une fonction $f(x)$ continue et de période 2π de sorte que l'on ait pour $x \neq 0, 2\pi$*

1.1 $$\sum_{n=1}^{N}|U_n(f,x)-f(x)|\neq O(N).$$

[3]) Jackson [1], p. 115.

La démonstration [4]) résulte immédiatement du

Lemme [5]). *Pour chaque $\nu>\nu_0$ il existe une fonction $f_\nu(x)$ vérifiant les conditions suivantes:*

1.2 $0\leqslant f_\nu(x)\leqslant 1$;

1.3 *la suite $U_n(f_\nu)$ converge uniformément quand $n\to\infty$;*

1.4 *pour chaque $x\,\bar{\in}\,\Delta_\nu=(0,\log^{-1/2}\nu)+(\pi-\log^{-1/2}\nu,\pi+\log^{-1/2}\nu)+(2\pi-\log^{-1/2}\nu,2\pi)$ et pour $x=\pi$ il y a un entier $n(x)<n_\nu$ pour lequel*

$$\sum_{i=1}^{n(x)}|U_i(f_\nu,x)|>A\,n(x)\log^{1/2}\nu,$$

où A ne dépend que de ν_0.

Désignons pour chaque p impair par $R_p(x)$ et $R'_p(x)$ respectivement le système des points $x_i=2\pi i/p$ contenus dans le segment $(x,2\pi)$ et le système des points $x'_i=4\pi i/p$ contenus dans le même segment. Soit $n_1=(2\nu+1)$, $n_i=n_{i-1}^4$, $(i=2,3,\ldots\nu)$. Nous allons définir la fonction $f(x)=f_\nu(x)$ dans les points des systèmes $R_p(0)$ pour $n_i<p\leqslant(4n_i+1)$ $(i=1,2,\ldots\nu)$ et p impair.

Posons

1.5 $f(x)=1$ pour $x\in R'_p(\frac{2\pi}{\nu})$, p impair et $n_1<p\leqslant(4n_1+1)$,

$f(x)=0$ pour les autres $x\in R_p(0)$.

Cette définition est univoque. En effet, l'égalité $x=i/p=j/q$ pour p et q impairs entraîne que i et j sont en même temps pairs ou impairs; cela veut dire que le point $2\pi x$ ou bien appartient à $R'_p(2\pi/\nu)$ et à $R'_q(2\pi/\nu)$, ou bien n'appartient ni à $R'_p(2\pi/\nu)$ ni à $R'_q(2\pi/\nu)$.

Supposons que l'on ait défini déjà $f(x)$ aux points $x\in R_p(0)$ pour $n_i<p\leqslant(4n_i+1)$, $(i=1,2,\ldots,k-1)$ et soit $n_k<p\leqslant(4n_k+1)$, p étant, comme toujours, impair. Posons

1.6 $$f(x)=1 \text{ pour } x\in R'_p\left(\frac{2\pi k}{\nu}\right),$$

$f(x)=0$ pour les points $x\in R_p(0)$ en lesquels la fonc-

[4]) La démonstration est empruntée à M. Kolmogoroff; voir Kolmogoroff [1]. Voir aussi Marcinkiewicz [1].

[5]) Le symbole $x\,\bar{\in}\,E$ signifie que x appartient à l'ensemble E; $x\,\bar{\in}\,E$ signifie que x n'appartient pas à E.

tion f reste encore indéfinie[6]). On prouve facilement que cette définition est univoque.

La fonction $f(x)$ étant ainsi définie aux points $x \in R_p(0)$, $n_i < p \leqslant (4n_i+1)$, $(i=1,2,\dots\nu)$, nous l'admettons linéaire dans les segments contigus à ces points.

La fonction ainsi construite jouit évidemment des propriétés (1.2) et (1.3), et il nous reste à prouver (1.4).

Soit donc $x \bar{\in} \Delta_\nu$, $(i-1)\frac{2\pi}{\nu} < x \leqslant i\frac{2\pi}{\nu}$, $n_i < p \leqslant (4n_i+1)$ et $U_n(x) = U_n(f, x)$.

1.7[7])
$$\left|U_{\frac{p-1}{2}}(x)\right| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_{\frac{p-1}{2}}(x-t)\, d\varphi_{\frac{p-1}{2}}(t)\right|$$
$$= \left|\sin\frac{px}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\frac{\cos\frac{p}{2}t}{2\sin\frac{x-t}{2}}\, d\varphi_{\frac{p-1}{2}}(t)\right|$$
$$\geqslant \left|\sin\frac{px}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\frac{2\pi i}{\nu}}^{2\pi}\right| - \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi i}{\nu}} \left|f(t)\, D_{\frac{p-1}{2}}\, d\varphi_{\frac{p-1}{2}}\right| = A_p(x) + B_p(x).$$

Il est facile d'évaluer $A_p(x)$. On a

1.8
$$A_p(x) \geqslant \left|\sin\frac{px}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{\frac{2i\pi}{\nu}}^{\frac{2i\pi}{\nu}+\lg^{-1/2}\nu} \frac{f(t)}{t-x}\, d\varphi_{\frac{p-1}{2}}(t)\right| \geqslant \bar{A}\left|\sin\frac{p}{2}x\right| \log\nu,$$

où $\bar{A}$ désigne une constante qui ne dépend que de ν_0. D'autre part il y a au plus $(4n_{i-1}+1)^2$ points $t \in R_p(0)$ tels que $t \leqslant 2\pi i/\nu$ et $f(t) \neq 0$, et comme, à l'exception des deux les plus proches, la distance de chaque de ces points au point x surpasse $\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4n_{i-1}+1}\right)^2$, on obtient

$$|B_p(x)| \leqslant (4n_{i-1}+1)^2 \cdot \sin^{-1}\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{4n_{i-1}+1}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{n_i} + 2\cdot 2\pi \leqslant \bar{B},$$

où $\bar{B}$ désigne une constante absolue.

Il s'ensuit

1.9
$$\left|U_{\frac{p-1}{2}}(x)\right| \geqslant \bar{A}\left|\sin\frac{px}{2}\right|\log\nu - \bar{B}$$

et

1.10
$$\sum_{\frac{p-1}{2}=1}^{2n_i}\left|U_{\frac{p-1}{2}}(x)\right| \geqslant \bar{A}\sum_{\substack{p=n_i+1\\ p\ \text{impair}}}^{4n_i+1}\left|\sin\frac{px}{2}\right|\log\nu - 2n_i\bar{B}.$$

On prouve facilement que l'hypothèse (pour $x \bar{\in} \Delta_\nu$)

1.11
$$\left|\sin\frac{px}{2}\right| < {}^1/_8 \log^{-1/2}\nu$$

entraîne

1.12
$$\left|\sin\left(\frac{p}{2}+1\right)x\right| \geqslant {}^1/_8 \log^{-1/2}\nu.$$

En portant cette évaluation dans (1.10) on trouve

1.13
$$\sum_{p=1}^{2n_i}|U_p(x)| > A' \log^{1/2}\nu\,.\,2n_i - \bar{B}\,.\,2n_i.$$

Pour ν assez grand l'inégalité (1.13) équivaut à

1.14
$$\sum_{p=1}^{2n_i}|U_p(x)| \geqslant A \log^{1/2}\nu\,.\,2n_i.$$

On prouve aussi une inégalité analogue à (1.14) pour $x=\pi$, donc l'inégalité (1.4) se trouve entièrement établie.

§ 2.

Dans ce paragraphe nous prouverons le

Théorème 2. *Il existe un point $x = x_0$ et une fonction continue $f(x)$ telle que*

2.1
$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu(f, x_0)\right| = \infty.$$

Nous nous bornerons à démontrer le

Lemme. *Pour tout intervalle (α, β) on peut définir une fonction continue $f(x)$, $|f| \leqslant 1$, satisfaisant pour une valeur particuliere $x = x_0 \in (\alpha, \beta)$ et un certain indice n à l'inégalité*

[6]) Certains $x \in R_p(0)$ peuvent appartenir à plusieurs systèmes $R_q(0)$ avec $q < p$.

[7]) Cette formule subsiste seulement pour $x \bar{\in} R_p(0)$, mais la formule 1.8 est juste aussi pour $x \in R_p(0)$, car on a alors $\sin\frac{p}{2}x = 0$.

2.2 $$\left|\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu(f, x_0)\right| > M,$$

M désignant un nombre quelconque donné d'avance.

Choisissons un nombre premier ν assez grand pour qu'un des segments $(2i\,.\,2\pi/\nu,\ (2i+1)2\pi/\nu)$, soit (α', β'), se trouve dans (α, β). Soit n un entier remplissant l'inégalité $\log n > M\nu$. Nous allons définir la fonction f aux points de $R_p(\alpha')$ pour p impair $\leqslant 2n+1$. Si le nombre impair p n'est pas divisible par ν, nous poserons tout simplement $f(x) = 0$ pour $x \in R_p(\alpha')$. Nous poserons aussi $f(x) = 0$ dans tout point $x \in R_p(\alpha')$ n'appartenant pas à $R'_p(\alpha')$.

Si p est divisible par ν et $x \in R'_p(\alpha')$, alors

$$x = \frac{2i\,.\,\nu^\alpha}{p'\,.\,\nu^\beta} 2\pi$$

où $p'\nu^\beta = p$, et les entiers i, p' sont premiers relativement à ν. Nous poserons $f(x) = 1$ si $\alpha < \beta$ et $f(x) = 0$ dans le cas contraire. Soit encore $f(x) = 0$ dans le segment $(0, \alpha')$ et linéaire dans les segments contigus aux points de $R_p(\alpha')$. On prouve facilement que cette définition de la fonction $f(x)$ est univoque.

Remarquons que pour p premier relativement à ν, et ne surpassant pas $2n+1$, on a identiquement

2.3 $$U_{\frac{p-1}{2}}(x) \equiv 0.$$

Considérons le point $x = x_0 = \alpha' + \dfrac{1}{2n+1}$ et soit $p \leqslant 2n+1$ divisible par ν; alors

2.4 $$U_{\frac{p-1}{2}}(f, x) = \sin\frac{p}{2}\left(2\,i_0 \cdot \frac{2\pi}{\nu} + \frac{1}{2n+1}\right) \int_{\alpha'}^{2\pi} f(t)\ \frac{d\varphi_{\frac{p-1}{2}}(t)}{2\sin\dfrac{x-t}{2}}$$

$$= \sin\left(\frac{p}{2}\,\frac{1}{2n+1}\right) \cdot \int_{\alpha'}^{2\pi} f(t)\ \frac{d\varphi_{\frac{p-1}{2}}(t)}{2\sin\dfrac{x-t}{2}} \qquad \text{avec } \alpha' = 2i_0\frac{2\pi}{\nu}.$$

Il en résulte que pour $1 \leqslant p \leqslant n$ les $U_p(x)$ sont de même signe. En vertu de la formule (2.4) on trouve pour p divisible par ν

2.5 $$\left|U_{\frac{p-1}{2}}(x)\right| \geqslant \bar{A} \cdot \frac{p}{n} \cdot \log p,$$

donc

2.6 $$\left|\sum_{p=1}^{n} U_p(x)\right| > \frac{1}{\nu} A\,.\,n\,.\log n > A\,.\,M\,.\,n,$$

où $\bar{A}$ et A désignent deux constantes absolues. M étant arbitraire donné d'avance, la formule (2.6) équivaut à (2.2).

§ 3.

Théorème 3. *Si la série de Fourier de la fonction $f(x)$ converge absolument, alors la suite $U_n(f, x)$ converge uniformément.*

Démonstration. Soit

3.1 $$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x),$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu \cos\nu x + b_\nu \sin\nu x),$$

$$U_n(f, x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^{(n)} \cos\nu x + b_\nu^{(n)} \sin\nu x).$$

D'après les formules (0.6)[8]) on a

3.2 $$a_\nu^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos\nu t\, d\varphi_n(t) = a_\nu + \sum_{t=1}^{\infty}(a_{t(2n+1)+\nu} + a_{t(2n+1)-\nu}),$$

$$b_\nu^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin\nu t\, d\varphi_n(t) = b_\nu + \sum_{t=1}^{\infty}(b_{t(2n+1)+\nu} - b_{t(2n+1)-\nu}).$$

Les égalités (3.1) et (3.2) donnent

3.3 $$|U_n(f, x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{n} |a_{t(2n+1)\pm\nu}| + |b_{t(2n+1)\pm\nu}|$$

$$= \left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu| + |b_\nu|\right) \to 0.$$

On prouve par la même méthode le

Théorème 4. *Si la fonction $f(x)$ continue et impaire admet les coëfficients de Fourier decroissants et d'ordre $o(n^{-1})$ alors la suite $\{U_n(f, x)\}$ converge uniformément.*

[8]) Ces formules sont connues; voir p. ex. Jackson [1], Tonelli [1], Marcinkiewicz [1].

Démonstration. Remarquons que la série de Fourier d'une fonction remplissant les conditions du théorème converge uniformément. Il en résulte qu'il suffit de prouver la convergence uniforme vers zéro de la suite $\{U_n(f,x)-S_n(f,x)\}$.

Or on a, d'après les formules (3.1) et (3.2)

3.4 $$|U_n(f,x)-S_n(f,x)|\leqslant\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{t=1}^{\infty}|b_{t(2n+1)+\nu}-b_{t(2n+1)-\nu}|\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{2n+1}b_\nu=o(1).$$

§ 4.

Théorème 5[9]). Soit

4.1 $$U_n(f,x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x),$$

$$U_{n,i}(x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{i}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x)\quad(i=0,1,2,\dots,n).$$

La fonction $f(x)$ étant supposée continue, on a uniformément

4.2 $$\sum_{i=0}^{n}|U_{n,i}(x)-f(x)|=o(n).$$

Démonstration. Nous allons prouver la formule (4.2) en tout point x, en laissant au lecteur la démonstration qu'elle subsiste uniformément. Pour simplifier l'écriture, posons $f(x)=0$. On a

4.3 $$U_{n,i}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\frac{\sin(i+{}^1/_2)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos\frac{x-t}{2}\,\frac{\sin i(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t)+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos i(x-t)\,d\varphi_n=A_{n,i}+B_{n,i}.$$

Les formules (0.6), (4.1) et (4.3) donnent

4.4 $$|B_{n,i}|\leqslant|a_i^{(n)}|+|b_i^{(n)}|.$$

[9]) Le théorème est modelé sur un théorème analogue de la théorie des séries de Fourier; voir p. ex. Zygmund [1].

Désignons par $h(t)$ la fonction égale à $\cos\frac{x-t}{2}\cdot f(t)$ dans l'intervalle $(x-{}^1/_n,\ x+{}^1/_n)$ et s'annullant autre part. Posons encore $g(t)=(f(t)\cos\frac{x-t}{2}-h(t))/2\sin\frac{x-t}{2}$. En portant les fonctions ainsi définies dans (4.3) on trouve

4.5 $$A_{n,i}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\sin i(x-t)\,d\varphi_n+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}h(t)\frac{\sin i(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,d\varphi_n(t)=A'_{n,i}+A''_{n,i}.$$

Évidemment

4.6 $$|A''_{n,i}|\leqslant\frac{2}{\pi}\max|f|\cdot\frac{\pi i}{2}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\leqslant\pi\max|f|.$$

D'autre part, en désignant par $\alpha_i^{(n)}$ et $\beta_i^{(n)}$ les coëfficients du polynôme $U_n(g,x)$, on a

$$|A'_{n,i}|\leqslant|\alpha_i^{(n)}|+|\beta_i^{(n)}|.$$

D'après les formules (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) il vient

4.7 $$\sum_{i=0}^{n}|U_{n,i}(x)|\leqslant\left|\frac{a_0^{(n)}}{2}\right|+\sum_{i=1}^{n}|a_i^{(n)}|+|b_i^{(n)}|+\left|\frac{\alpha_0^{(n)}}{2}\right|+\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i^{(n)}|+|\beta_i^{(n)}|+\pi(n+1)\max|f|.$$

Pour chaque fonction $\psi(x)$[10]) on a d'une façon évidente

4.8 $$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\psi^2(x)\,d\varphi_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}U_n^2(\psi)\,dx=\frac{\gamma_0^2}{2}+\sum_{i=1}^{n}(\gamma_i^2+\delta_i^2),$$

où γ_i et δ_i désignent les coëfficients du polynome $U_n(\psi)$. En appliquant la formule (4.8) il est facile de donner une évaluation de la somme

$$\left|\frac{\gamma_0}{2}\right|+\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|+|\delta_i|.$$

[10]) C'est la relation de Parseval pour les polynomes d'interpolation.

En effet, d'après l'inégalité de Schwarz on a

$$4.9 \qquad \left|\frac{\gamma_0}{2}\right| + \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i| + |\delta_i| \leqslant \left(\frac{\gamma_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 + \delta_i^2\right)^{1/2} \sqrt{n+1}$$

$$= \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \psi^2(x)\, d\varphi_n(x)\right)^{1/2}.$$

En portant cette évaluation dans (4.7) on trouve

$$4.10 \qquad \sum_{i=0}^{n} |U_{n,i}(x)| \leqslant \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g^2(t)\, d\varphi_n\right)^{1/2}$$

$$+\sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\, d\varphi_n\right)^{1/2} + \pi(n+1)\ \max|f|$$

$$\leqslant \sqrt{n+1}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g^2(t)\, d\varphi_n\right)^{1/2} + 2\pi(n+1)\ \max|f|$$

et en vertu de

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g^2(t)\, d\varphi_n \leqslant \max f^2 \cdot \frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{2n+1}\cdot 4n^2 \sum \frac{1}{i^2}$$

$$\leqslant 32\, n\ \max f^2$$

on a

$$4.11 \qquad \sum_{i=0}^{n} |U_{n,i}(x)| \leqslant 6(n+1)\ \max|f|$$

$$+ 2\pi \max|f|\,(n+1) \leqslant 13(n+1)\ \max|f|.$$

Il suffit de poser $f = f_1 + f_2$, où $\max|f_1| \leqslant \varepsilon/13$ et la fonction f_2 est un polynome, pour en tirer

$$4.12 \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} |U_{n,i}(x)| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui équivaut à (4.2).

On déduit du théorème démontré le

Théorème 6. *La suite*[11])

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} U_{n,i}(f, x)$$

converge uniformément vers $f(x)$.

[11]) Les polynomes $\sigma_n(x)$ ont été définis dans Marcinkiewicz [1].

On peut aussi établir cette proposition sans faire appel au théorème 5, même d'une façon très simple, si l'on remarque que

$$4.13 \qquad \sigma_n(f, x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\ \frac{\sin^2 (n+1)\frac{x-t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{x-t}{2}}\ d\varphi_n(t).$$

§ 5.

Dans une note[12]) j'ai construit *une fonction* $f(x)$ *continue dont la suite* $\{U_n(f)\}$ *diverge presque partout tout en restant uniformément bornée par rapport à* x *et* n.

Les limites d'indétermination de la suite $\{U_n(f, x)\}$ étant supposées finies dans un ensemble de mesure positive, il s'impose le problème quelle est la relation entre la fonction f et ces limites d'indétermination. On a à cet égard le

Théorème 7[13]). *Si pour chaque* $x \in E$ $(\text{mes}\, E > 0)$

$$5.1 \qquad S^*(x) = \limsup_{n\to\infty} U_n(x) < \infty,$$

alors on a presque partout dans E

$$5.2 \qquad S_*(x) = \liminf_{n\to\infty} U_n(x) > -\infty \quad et$$

$$5.3 \qquad S^*(x) + S_*(x) = 2f(x).$$

La démonstration de ce théorème ne diffère pas de celle de la proposition analogue dans la théorie des séries de Fourier, et l'on n'a qu'appliquer le théorème 5 au lieu des résultats concernant la sommabilité (C, 1). C'est uniquement pour la commodité des lecteurs que je vais réproduire les calculs.

Soient $\mathcal{E}$ un sous-ensemble positif de E et $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$, une suite de nombres positifs définis de manière à satisfaire

$$5.4 \qquad U_n(f, x) < S^*(x) + \varepsilon_n \quad \text{pour } x \in \mathcal{E}.$$

Admettons que la fonction $S^*(x)$ est continue dans $\mathcal{E}$. Le point $x \in \mathcal{E}$ étant un point de densité de l'ensemble $\mathcal{E}$, on peut choisir une suite $\{\lambda_n\}$ telle que $n\lambda_n \to \pi$ et $x \pm \lambda_n \in \mathcal{E}$ pour chaque n. Supposons enfin que $f(x) = 0$; alors

[12]) Marcinkiewicz [1]; voir aussi Grünwald [1].

[13]) Pour les problèmes analogues dans la théorie des séries de Fourier voir Kuttner [1], Marcinkiewicz et Zygmund [1].

$$\frac{S^*(x+\lambda_n)+S^*(x-\lambda_n)}{2}+\varepsilon_n \geqslant \frac{1}{2}\{U_n(x+\lambda_n)+U_n(x-\lambda_n)\} \tag{5.5}$$

$$=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x)\cos\nu\lambda_n$$

$$=2\sin\frac{\lambda_n}{2}\sum_{i=0}^{n-1}U_{n,i}(x)\sin(\nu+{}^1\!/_2)\,\lambda_n+U_n(x)\cos n\lambda_n.$$

D'après le théorème 5,

$$|2\sin\frac{\lambda_n}{2}|\,.\sum_{i=0}^{n}|U_{n,i}(x)|\to 0, \tag{5.6}$$

donc la formule (5.5) donne

$$S^*(x)\geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, U_n(x)\cos n\lambda_n=-S_*(x) \tag{5.7}$$

et

$$S^*(x)+S_*(x)\geqslant 0. \tag{5.8}$$

En supprimant l'hypothèse $f(x)=0$, on obtient

5.9 $S^*(x)+S_*(x)\geqslant 2f(x)$ et par symétrie $S^*(x)+S_*(x)\leqslant 2f(x)$.

La formule (5.9) subsiste presque partout dans $\mathcal{E}$, donc aussi presque partout dans E. Il en résulte (5.3).

On prouve de même le

Théorème 8. *Si pour tout $\varepsilon>0$ il existe un n_ε tel que $U_n(x)>f(x)-\varepsilon$ pour chaque $n>n_\varepsilon$ et $0\leqslant x\leqslant 2\pi$, alors la suite $\{U_n(f)\}$ converge uniformément.*

§ 6.

Dans ce paragraphe nous allons démontrer quelques inégalités auxiliaires.

Théorème 9. *Si S_n désigne un polynome trigonométrique d'ordre n au plus et du reste quelconque et si $1\leqslant p<\infty$, alors*

$$\Big(\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,d\varphi_n(x)\Big)^{1/p}\leqslant C_p\Big(\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}, \tag{6.1}$$

où C_p ne dépend que de p.

Démonstration.

$$\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,d\varphi_n(x)=\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,d(\varphi_n-x)+\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,dx. \tag{6.2}$$

En intégrant par parties le premier terme du second membre on obtient

$$\Big|\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,d(\varphi_n-x)\Big|\leqslant p\int_0^{2\pi}|\varphi_n-x|\,.\,|\frac{d}{dx}S_n(x)|\,.\,|S_n(x)|^{p-1}dx \tag{6.3}$$

$$\leqslant \pi p/n\int_0^{2\pi}|\frac{d}{dx}S_n(x)|\,.\,|S_n(x)|^{p-1}\,dx$$

$$\leqslant \pi p/n\Big(\int_0^{2\pi}|\frac{d}{dx}S_n(x)|^p dx\Big)^{1/p}\Big(\int_0^{2\pi}|S_n|^p\,dx\Big)^{(p-1)/p}.$$

Or, d'aprés un théorème de M. Zygmund [14])

$$\Big(\int_0^{2\pi}|S_n'(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\leqslant n\Big(\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,dx\Big)^{1/p},$$

la formule (6.2) fournit donc

$$\Big|\int_0^{2\pi}|S_n|^p\,d(\varphi_n-x)\Big|\leqslant \pi p\int_0^{2\pi}|S_n|^p\,dx. \tag{6.4}$$

Les formules (6.3) et (6.4) prouvent (6.1) avec $C_p^p\leqslant p\pi+1$.

Il est curieux que l'on a aussi l'inégalité réciproque, à savoir on a le

Théorème 10. *Si $S_n(x)$ désigne un polynome trigonométrique d'ordre n et $1<p<\infty$, alors*

$$\Big(\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\leqslant C_p'\Big(\int_0^{2\pi}|S_n(x)|^p\,d\varphi_n(x)\Big)^{1/p}, \tag{6.5}$$

où C_p' est une fonction de p.

Démonstration. Remarquons que

$$\Big(\int_a^b|f|^p\,dt\Big)^{1/p}=\sup\int_a^b f(t)g(t)\,dt,$$

[14]) Zygmund [2].

où la borne supérieure est prise pour toutes les fonctions $g(t)$ telles que $\int_0^{2\pi} |g(t)|^q\, dt = 1$ et q est défini par l'égalité $1/p + 1/q = 1$.

Il en résulte qu'il suffit de prouver l'inégalité

6.6 $$\int_0^{2\pi} S_n \cdot g(t)\, dt \leqslant C_p' \Big(\int_0^{2\pi} |S_n|^p\, d\varphi_n\Big)^{1/p}$$

pour chaque fonction g telle que $\int_0^{2\pi} |g(t)|^q\, dt = 1$.

En désignant par $S_n(g, x)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de la fonction g et en tenant compte du fait que $S_n(t) S_n(g,t)$ est un polynome d'ordre $\leqslant 2n$, on a

6.7 $$\int_0^{2\pi} S_n(t) g(t)\, dt = \int_0^{2\pi} S_n(t) \cdot S_n(g,t)\, dt = \int_0^{2\pi} S_n(t)\, S_n(g, t)\, d\varphi_n(t)$$

$$\leqslant \Big(\int_0^{2\pi} |S_n(t)|^p\, d\varphi_n\Big)^{1/p} \cdot \Big(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q\, d\varphi_n\Big)^{1/q}.$$

D'après le théorème 9 on a

6.8 $$\Big(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q\, d\varphi_n\Big)^{1/q} \leqslant C_q \Big(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q\, dt\Big)^{1/q}.$$

En vertu d'un théorème classique de M. M. Riesz [15]), $S_n(g, t)$ étant la somme partielle de la série de Fourier de la fonction g, et $g \in L^q$, on a

6.9 $$\Big(\int_0^{2\pi} |S_n(g, t)|^q\, dt\Big)^{1/q} \leqslant A_q \Big(\int_0^{2\pi} |g(t)|^q\, dt\Big)^{1/q} = A_q,$$

où A_q dépend seulement de q.

En appliquant l'inégalité (6.9) à (6.8) et (6.7) on trouve

6.10 $$\int_0^{2\pi} S_n(t) g(t)\, dt \leqslant A_q C_p \Big(\int_0^{2\pi} |S_n(t)|^p\, d\varphi_n(t)\Big)^{1/p}.$$

On en déduit la formule (6.5) avec $C_p' \leqslant A_q \cdot C_p$.

[15]) M. Riesz [1].

En appliquant l'inégalité (6.1) nous prouverons enfin le

Théorème 11 [16]). *Si $f(x)$ désigne une fonction continue, alors on a pour* $1 \leqslant p < \infty$

6.11 $$\int_0^{2\pi} |U_n(f) - f(x)|^p\, dx \to 0.$$

Démonstration. Évaluons l'expression

6.12 $$\Big(\int_0^{2\pi} |U_n(f)|^p\, dx\Big)^{1/p};$$

d'après la remarque faite au cours de la démonstration du théorème 10, il suffit d'évaluer l'expression

6.13 $$\int_0^{2\pi} U_n(f) g(t)\, dt, \text{ où } \int_0^{2\pi} |g(t)|^q\, dt = 1 \text{ et } 1/p + 1/q = 1.$$

D'une façon évidente on a, pour $1 < p < \infty$,

6.14 $$\int_0^{2\pi} U_n(f)\, g(t)\, dt = \int_0^{2\pi} g(t) \Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, D_n(x-t)\, d\varphi_n(x)\Big)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} f(x) \Big(\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\, D_n(x-t)\, dt\Big)\, d\varphi_n(x)$$

$$\leqslant 2\pi \max|f| \Big(\int_0^{2\pi} d\varphi_n(x)\, |S_n(g, x)|^q\Big)^{1/q}.$$

En appliquant l'inégalité (6.1) on en tire

6.15 $$\int_0^{2\pi} U_n(f) g(t)\, dt \leqslant 2\pi\, C_q \Big(\int_0^{2\pi} |S_n(g, x)|^q\, dx\Big)^{1/q} \max|f|.$$

Supposons que $p \geqslant 2$ et évaluons le second membre du (6.15) à l'aide du théorème de M. M. Riesz; alors

6.16 $$\int_0^{2\pi} U_n(f) g(t)\, dt \leqslant 2\pi\, C_q\, A_q \Big(\int_0^{2\pi} |g|^q\, dt\Big)^{1/q} = 2\pi\, C_p\, A_q \max|f|.$$

[16]) Ce théorème est un cas particulier de l'inégalite (6.5), mais nous préferons de donner une démonstration sans faire appel au théorème 10.

Il s'ensuit pour $p \geqslant 2$

6.17 $$\Big(\int_0^{2\pi} |U_n(f)|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant B_p \max |f|,$$

avec $B_p \leqslant 2\pi C_q A_q$; comme pour $1 \leqslant p < 2$

$$\Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |U_n(f)|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |U_n(f)|^2 dx\Big)^{1/2} \leqslant \max |f|,$$

on voit que la formule (6.17) subsiste pour $1 \leqslant p < \infty$.

Pour en tirer notre théorème, on n'a qu'à poser $f = f_1 + f_2$, où $\max |f_1| < \varepsilon$ et f_2 désigne un polynome.

§ 7.

Nous allons poser quelques problèmes à résoudre:

1. *Peut-on construire une fonction $f(x)$ continue avec la suite $\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i(f, x)\}$ divergente presque partout?*

2. *Quelle est le module de continuité d'une fonction $f(x)$ vérifiant la thèse du théorème 1, et quelle est la meilleure évaluation, valable presque partout, de l'expression $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |U_i(f,x) - f(x)|$ pour chaque fonction continue*[17]) ?

[17]) Remarquons que pour la suite $\{U_n(x)\}$ on connait les deux théorèmes suivants: 1° L'évaluation $U_n(x) = o(\log n)$ est en général la meilleure presque partout. 2° Il existe une fonction $f(x)$ telle que $|f(x+t) - f(x)| \leqslant \frac{A}{\log {}^1/_t}$, où A désigne une constante, et dont la suite $\{U_n(f)\}$ diverge presque partout; voir Marcinkiewicz [1].

Bibliographie.

D. Jackson [1]. The Theory of Approximation, New York, 1930.

A. Kolmogoroff [1]. Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout, Fund. Math. 4 (1923) p. 324—328.

B. Kuttner [1]. A theorem on trigonometric series, Journ. Lond. Math. Soc. 10 (1935) p. 131—140.

L. Tonelli [1]. Serie trigonometriche, Bologna, 1928.

G. Grünwald [1]. Über Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome, Acta Szeged 7 (1935) p. 207—221.

J. Marcinkiewicz [1]. Sur les polynomes d'interpolation (en polonais), Wiadomości Matematyczne 39 (1935) p. 85—125.

M. Riesz [1]. Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschr. 27 (1927) p. 218—244.

A. Zygmund et J. Marcinkiewicz [1]. On the differentiability of functions, Fund. Math. 26 (1936) p. 1—42.

A. Zygmund [1]. Trigonometrical series, Warszawa, 1935.

[2]. A remark on conjugate series, Proc. Lond. Math. Soc. (2), 34 (1932) p. 392—400.

(Reçu par la Rédaction le 5. 11. 1935).