STUDIA MATHEMATICA, T. LIX. (1977)

Beschränkte Operatoren: Bemerkungen zu einer Arbeit von P. Uss

von

VOLKER WROBEL (Kiel)

Zusammenfassung. Am Ende seiner Arbeit [6] stellt P. Uss fünf die Theorie beschränkter Operatoren in lokalkonvexen Räumen betreffende Fragen. Die vorliegende Arbeit setzt sich eine Beantwortung dieser Fragen zum Ziel.

In der Terminologie werden wir uns weitgehend an das Buch [2] von Floret/Wloka halten. Mit E und F seien stets separierte lokalkonvexe Räume bezeichnet. Für einen lokalkonvexen Raum E sei U_E eine Basis abgeschlossener, absolutkonvexer Nullumgebungen in E. $L_c(E,F)$ und $L_b(E,F)$ bezeichnen den Raum $L(E,F)$ aller stetigen, linearen Abbildungen (kurz: Operatoren) von E nach F versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf allen präkompakten und beschränkten Teilmengen von E.

Ein Operator $T\in L(E,F)$ heißt *beschränkt*, falls es eine Nullumgebung $U\in U_E$ gibt mit $T(U)$ beschränkt in F. Ist dies der Fall, so gilt die folgende Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T"'] & F \\ \llbracket T(U)\rrbracket \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

wobei für eine beschränkte, absolutkonvexe Menge $A\subset F$ unter $\llbracket A\rrbracket$ die lineare Hülle $[A]$ von A versehen mit der Minkowski-Norm bezüglich A zu verstehen ist. Die Menge aller beschränkten Operatoren von E nach F soll mit $B(E,F)$ bezeichnet werden. Für $L(E,E)$ und $B(E,E)$ schreiben wir kurz $L(E)$ und $B(E)$. Offenbar ist $B(E)$ ein zweiseitiges Ideal in $L(E)$. Für $U\in U_E$ sei E_U der normierte Raum $(E/p_U^{-1}(0))$, wobei p_U das Minkowski-Funktional bezüglich U ist.

1. Invariante Teilräume. Man sagt, ein Operator $T\in L(E)$ besitzt einen *invarianten Teilraum*, falls es einen abgeschlossenen Teilraum E_0

von E mit folgenden Eigenschaften gibt: E_0 ist ein echter Teilraum, d.h. $\{0\} \neq E_0 \neq E$ und es gilt $T(E_0) \subset E_0$. Bekanntlich ist das Problem, ob jeder Operator auf einem Banachraum einen invarianten Teilraum besitzt, selbst für Hilberträume ungelöst. Wir wollen hier das Problem für beschränkte Operatoren auf einem lokalkonvexen Raum auf den normierten Fall reduzieren. Sei nämlich $T \in B(E)$ und $U \in U_E$ mit $T(U)$ beschränkt. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "P"'] & E \arrow[d, "P"] \\ \llbracket T(U)\rrbracket \arrow[r, "\hat{T}"] & \llbracket T(U)\rrbracket \end{tikzcd}$$

wobei $Px := Tx$ für $x \in E$, $\hat{T}y := Ty$ für $y \in [T(U)]$.

In den folgenden Überlegungen können wir zwei triviale Fälle von invarianten Teilräumen ausschließen: Falls nämlich Kern $T \neq \{0\}$ oder $\overline{T(E)} \neq E$, so haben wir einen invarianten Teilraum gefunden. In allen anderen Fällen können wir zeigen

T besitzt genau dann einen invarianten Teilraum, falls $\hat{T}$ einen solchen besitzt.

Beweis. Sei E_0 ein invarianter Teilraum von T. Aufgrund der oben gemachten Voraussetzung ist dann $F_0 := T(E) \cap E_0$ von $\{0\}$ verschieden und ein abgeschlossener Teilraum von $T(E)$ in der von E induzierten Topologie. Wegen der Stetigkeit der Einbettung $\llbracket T(U)\rrbracket \hookrightarrow T(E) \hookrightarrow E$ ist F_0 auch in $\llbracket T(U)\rrbracket$ abgeschlossen. Außerdem ist F_0 aufgrund der gemachten Voraussetzungen ein echter Teilraum von $T(E)$ und invariant unter $\hat{T}$ nach Konstruktion. Sei nun umgekehrt G_0 ein invarianter Teilraum von $\hat{T}$. Dann ist $\{0\} \neq E_0 := P^{-1}(G_0)$ abgeschlossen in E aufgrund der Stetigkeit von P und $E_0 \neq E$, da $G_0 \neq T(E)$. Aufgrund der Kommutativität des Diagramms gilt die Inklusionskette $G_0 \supset \hat{T}(G_0) \supset \hat{T} \circ P(E_0) = P \circ T(E_0)$ und somit $T(E_0) \subset P^{-1}(G_0) = E_0$, so daß E_0 ein invarianter Teilraum von T ist.

2. Zur Dichtheit von $B(E, F)$ in $L_b(E, F)$. Die Klasse der beschränkten Operatoren bildet ein Operatorenideal im Sinne von Pietsch [5]. Der nachfolgende Satz, der nur für den Raum der beschränkten Operatoren formuliert wird, gilt ganz allgemein für die Komponenten eines beliebigen Operatorenideals, wie der Beweis zeigen wird. Anstelle der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf den beschränkten Mengen von E kann auf $L(E, F)$ die Topologie gleichmäßiger Konvergenz auf einer Klasse von Mengen betrachtet werden, die invariant ist unter linearen, stetigen Abbildungen.

SATZ. *Sei E ein lokalkonvexer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *$B(E)$ liegt dicht in $L_b(E)$;*

(2) *Für alle lokalkonvexen Räume F liegt $B(E, F)$ dicht in $L_b(E, F)$;*

(3) *Für alle lokalkonvexen Räume F liegt $B(F, E)$ dicht in $L_b(F, E)$.*

Beweis. Seien $S \in L(E, F)$ und $R \in L(F, E)$ gegeben und betrachten wir die Multiplikationen $T \rightsquigarrow {}_S\Phi(T) := S \circ T$ und $T \rightsquigarrow \Phi_R(T) := T \circ R$. Dann sind ${}_S\Phi$ und Φ_R stetige Abbildungen von $L_b(E)$ nach $L_b(E, F)$ und $L_b(F, E)$. Liegt nun $B(E)$ dicht in $L_b(E)$, so gibt es ein Netz beschränkter Abbildungen $T_i \in B(E)$ mit $T_i \to id_E$ in $L_b(E)$. Folglich konvergiert $S \circ T_i$ gegen S in $L_b(E, F)$ und $T_i \circ R$ gegen R in $L_b(F, E)$. Alle übrigen Implikationen des Satzes sind offensichtlich.

Zur Illustration wollen wir nun einige Beispiele von lokalkonvexen Räumen E angeben, für die $B(E)$ dicht liegt in $L_b(E)$. Obiger Satz liefert dann Beispiele mit $B(E, F)$ und $B(F, E)$ dicht in $L_b(E, F)$ und $L_b(F, E)$. Zuvor jedoch einige Bezeichnungsweisen:

Ein lokalkonvexer Raum E besitzt die *Approximationseigenschaft* (A.E.), falls die endlichdimensionalen Abbildungen von E dicht liegen in $L_c(E)$. Ein lokalkonvexer Raum heißt *Semi-Montelsch*, falls jede beschränkte Menge schon präkompakt ist. So sind nukleare Räume Semi-Montelsch, ebenso jeder lokalkonvexe Raum in seiner stärksten lokalkonvexen Topologie.

BEISPIELE. Für folgende lokalkonvexe Räume E liegt $B(E)$ dicht in $L_b(E)$:

(1) E sei der Raum $C(\boldsymbol{R})$ der auf der reellen Gerade $\boldsymbol{R}$ stetigen Funktionen versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf Kompakta;

(2) E sei Semi-Montelsch und besitze die A.E., also E beispielsweise nuklear oder ein lokalkonvexer Raum ausgestattet mit seiner stärksten lokalkonvexen Topologie;

(3) E sei ein lokalkonvexer Raum ausgestattet mit der schwachen Topologie;

(4) E sei ein Produkt normierter Räume ($E = \prod_{i \in I} E_i$ mit beliebigem Indexbereich I) oder ein komplementierter Teilraum eines solchen Produkts.

Beweis. (1) findet sich bereits bei Uss [6], (2) folgt unmittelbar aus den Voraussetzungen: sogar die endlichdimensionalen Abbildungen liegen dicht in $L_b(E)$. Um (3) zu zeigen sei $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}^0$ eine Nullumgebung von E, $x'_i \in E'$. Da E nach Voraussetzung die schwache Topologie trägt, bilden Nullumgebungen dieser Gestalt eine Nullumgebungsbasis.

Wir können nun nach dem Satz von Hahn–Banach Elemente $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n \in E$ mit $\langle x_i', x_k\rangle = \delta_{ik}$ (Kronecker-Symbol) wählen. Definieren wir nun für $x \in E$ $T_n x := \sum_{i=1}^{n} \langle x_i', Tx\rangle x_i$, so ist $\max_k |\langle x_k', (T-T_n)x\rangle| = 0$ für alle $x \in E$.

Wie der Beweis ergeben hat, liegen sogar die endlichdimensionalen Abbildungen dicht in $L_b(E)$. Um (4) zu zeigen, benutzen wir die Äquivalenz (1) $\Leftrightarrow$ (3). Sei also F irgendein lokalkonvexer Raum und $E = \prod_{i\in I} E_i$ ein Produkt normierter Räume E_i, $U = \prod_{i\in I} U_i$ eine Nullumgebung in E und $i_1, \ldots, i_n$ diejenigen Indizes mit $U_i \neq E_i$. Bezeichnen wir mit π_i die Projektion von E auf die Komponente E_i, so gilt für $x \in F$

$$Tx - \Big(\prod_{k=1}^{n} \pi_{i_k} \circ Tx\Big) \times \prod_{i \neq i_k} \{0_i\} \in U$$

(wobei O_i die Null in E_i ist). Offensichtlich liegt der Operator

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} \pi_{i_k} \circ T\Big) \times \prod_{i \neq i_k} \pi_i \circ \mathrm{O}_{F,E}$$

($O_{F,E}$ ist der Nulloperator von F nach E) in $B(F, E)$. Der zweite Teil von (4) ergibt sich aus der Tatsache, daß für einen komplementierten Teilraum E_0 von E der Raum $L_b(F, E_0)$ ein komplementierter Teilraum von $L_b(F, E)$ ist.

Die Gleichheit von $B(E, F)$ und $L(E, F)$ konstatiert der folgende Satz, dessen Beweis ein einfaches Baire'sches Argument ist.

Lokalisationssatz. *Sei E ein Baire'scher lokalkonvexer Raum und F besitze ein abzählbares Fundamentalsystem beschränkter Mengen (F beispielsweise ein (DF)-und E ein (F)-Raum). Dann gilt $L(E, F) = B(E, F)$.*

3. Zur Vollständigkeit von $B(E, F)$. Da jedes $T \in B(E, F)$ über einen normierten Raum E_U faktorisiert, gilt $B(E, F) = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}_E} L(E_U, F)$ (vgl. Uss [6]). Man kann nun das induktive Netz $\{L_b(E_U, F)\}_{U \in \mathfrak{U}_E}$ und den Grenzraum $B(E, F)_{\mathrm{ind}} := \operatorname{ind}_{\overrightarrow{U}} L_b(E_U, F)$ betrachten. Falls nun E und F vollständig sind, so stellt sich die Frage, ob und wann dasselbe für $B(E, F)_{\mathrm{ind}}$ der Fall ist.

Für vollständige lokalkonvexe Räume E und F ist der Raum $B(E, F)_{\mathrm{ind}}$ im allgemeinen nicht einmal folgenvollständig.

Gegenbeispiel. Sei G ein nichtfolgenvollständiger, ultrabornologischer Raum (nach Köthe [4], § 31 gibt es nichtfolgenvollständige, separierte (LB)-Räume; diese Räume sind per definitionem ultrabornologisch.).

Nach einem Satz von Raikov über ultrabornologische Räume (vgl. Floret [3], § 6) läßt sich G darstellen als induktiver Limes von Banachräumen G_i mit kompakten verbindenden Abbildungen. Da aber nach Figiel ([1], Cor. 3.3) jede kompakte Abbildung über einen reflexiven Banachraum faktorisiert, befinden wir uns in der Situation des folgenden Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
G_i \arrow[rr, "\varrho_{i,i'}"] \arrow[dr] & & G_{i'} \arrow[rr, "\varrho_{i',i''}"] \arrow[dr] & & G_{i''} \\
& H_i \arrow[ur] \arrow[rr] & & H_{i'} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Damit läßt sich G darstellen als Grenzraum des äquivalenten Netzes $\{H_i\}_{i\in I}$ mit reflexiven Banachräumen $H_i = L_b(H_i', \boldsymbol{K})$. Algebraisch ist nun nach Floret ([3], § 15) $\operatorname{ind}_{\overrightarrow{i}} L(H_i', \boldsymbol{K}) = L(\operatorname{proj}_{\overleftarrow{i}} H_i', \boldsymbol{K})$. Insgesamt ist also $B(\operatorname{proj}_{\overleftarrow{i}} H_i', \boldsymbol{K})_{\mathrm{ind}} = \operatorname{ind}_{\overrightarrow{i}} L_b(\operatorname{proj}_{\overleftarrow{i}} H_i', \boldsymbol{K}) = G$ nicht folgenvollständig, während $\boldsymbol{K}$ und $\operatorname{proj}_{\overleftarrow{i}} H_i'$ (als projektiver Limes von Banachräumen) vollständig sind.

Bemerkung. Wenn $E = \operatorname{proj}_{\overleftarrow{n}} E_n$ ein $(F\mathfrak{S})$-Raum und $F = \operatorname{ind}_{\overrightarrow{n}} F_n$ ein (LS)-Raum, dann ist $B(E, F) = L(E, F)$ nach dem Lokalisationssatz und $B(E, F)_{\mathrm{ind}} = \operatorname{ind}_{\overrightarrow{n}} L_b(E_n, F_n)$ ein (LS)-Raum, also vollständig (vgl. Floret [3], § 15).

4. Zur Maximalität von $B(E)$. Im allgemeinen ist $B(E)$ in $L(E)$ kein maximales Ideal. Wir geben ein

Gegenbeispiel. Sei E_1 ein nicht normierbarer Baire'scher Raum und E_2 besitze ein abzählbares Fundamentalsystem beschränkter Mengen. Mit π_i bezeichnen wir die kanonischen Projektionen von $E := E_1 \oplus E_2$ auf die Komponenten E_i. $HB(E)$ sei die Menge derjenigen Operatoren T, für die $T \circ \pi_1$ beschränkt ist. Dann ist die Inklusion $B(E) \subset HB(E)$ strikt, wenn E_2 nicht normierbar ist. Offenbar ist $HB(E)$ ein Linksideal. Daß $HB(E)$ auch ein Rechtsideal ist, sieht man wie folgt ein: sei $T \in HB(E)$ und $S \in L(E)$. Dann besitzt S die *Zerlegung* $S = \pi_1 \circ S \circ \pi_1 + \pi_2 \circ S \circ \pi_1 + \pi_1 \circ S \circ \pi_2 + \pi_2 \circ S \circ \pi_2$. Damit ist $T \circ S \circ \pi_1 = T \circ \pi_1 \circ S \circ \pi_1 + T \circ \pi_2 \circ S \circ \pi_1$. Der erste Summand ist beschränkt, weil $T \circ \pi_1$ dies ist, und der zweite ist nach dem Lokalisationssatz angewendet auf $\pi_2 \circ S \circ \pi_1$ beschränkt.

5. Zur Beschränktheit des Spektrums. Bezeichnen wir für einen Operator $T \in L(E)$ mit $\varrho(T)$ die Menge aller komplexen Zahlen z, so daß $(z \cdot \mathrm{id}_E - T)^{-1} \in L(E)$, so sei $\sigma(T) := \mathbf{C} \setminus \varrho(T)$ das Spektrum von T. Jeder beschränkte Operator besitzt nun ein beschränktes Spektrum. Weiterhin impliziert $L(E) = B(E)$ die Normierbarkeit von E. Uss fragt nun in [6], ob aus der Tatsache, daß $\sigma(T)$ beschränkt ist für alle $T \in L(E)$ schon folgt, daß E Banach ist. Dies ist nicht der Fall.

GEGENBEISPIEL. Sei E ein unendlichdimensionaler Banachraum und E_s dieser Raum ausgestattet mit seiner schwachen Topologie. Da die Normtopologie zugleich die Mackey-Topologie ist, gilt $L(E) = L(E_s)$. Damit besitzt jeder Operator $T \in L(E_s)$ ein kompaktes Spektrum, ohne daß E_s deshalb normierbar wäre.

Literatur

[1] T. Figiel, *Factorization of compact operators and applications to the approximation problem*, Studia Math. 45 (1973), pp. 191–210.

[2] K. Floret, J. Wloka, *Einführung in die Theorie der lokalkonvexen Räume*, Springer Lecture Notes 56, 1968.

[3] K. Floret, *Lokalkonvexe Sequenzen mit kompakten Abbildungen*, J. Reine Angew. Math. 247 (1971), pp. 155–195.

[4] G. Köthe, *Topologische lineare Räume I*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1966.

[5] A. Pietsch, *Theorie der Operatorenideale* (Zusammenfassung), Universität Jena 1972.

[6] P. Uss, *Sur les opérateurs bornés dans les espaces localement convexes*, Studia Math. 37 (1971), pp. 139–158.

MATHEMATISCHES SEMINAR DER UNIVERSITÄT, KIEL, BRD

Received August 8, 1975 (1057)

STUDIA MATHEMATICA, T. LIX. (1977)

On semi-Fredholm operators and the conjugate of a product of operators

by

K.-H. FÖRSTER and E.-O. LIEBETRAU (Oldenburg)

Abstract. The first part of this paper contains necessary and sufficient conditions for a linear operator between Banach spaces to be semi-Fredholm. In the second part it is shown that there is a duality between these conditions corresponding to the duality of Φ^-- and Φ^+-operators. In the third part these results are used to derive a necessary and sufficient condition for the equality $(TS)' = S'T'$.

1. Let X and Y be Banach spaces. For a linear operator $T\colon X \to Y$ with domain $D(T)$, range $R(T)$, and null space $N(T)$, let $\overline{T}$ denote the closure and $T'\colon Y' \to X'$ the conjugate of T, if defined. Let $B(X, Y)$ and $K(X, Y)$ denote the linear spaces of bounded and compact linear operators with domain X and range in Y, U_X the closed unit ball in X, $\Phi^-(X, Y)$ the set of semi-Fredholm operators with closed ranges and finite-dimensional null spaces, and $\Phi^+(X, Y)$ the set of semi-Fredholm operators the ranges of which have finite deficiency in Y.

First the Φ^- and Φ^+-operators will be characterized.

1. THEOREM. *Let $T\colon X \to Y$ be a closable linear operator. The following statements are equivalent*:

(1) $\overline{T} \in \Phi^-(X, Y)$;

(2) *There are a Banach space Z, $C \in K(X, Z)$, and $\alpha > 0$ such that*

$$\|x\| \leqslant \alpha\|Tx\| + \|Cx\| \quad \text{for all } x \in D(T).$$

Proof. It is immediate that (2) is equivalent to

($\overline{2}$) There are a Banach space Z, $C \in K(X, Z)$, and $\alpha > 0$ such that for $x \in D(\overline{T})$, $\|x\| \leqslant \alpha\|\overline{T}x\| + \|Cx\|$.

Therefore T may be assumed to be closed.

Suppose $T \in \Phi^-(X, Y)$, $Z = X$, and let C be a projection from X onto $N(T)$. Since $N(T)$ is finite dimensional, C is compact. If $x \in D(T)$ and $u \in N(T)$, then $\|x\| - \|Cx\| \leqslant \|(I-C)(x-u)\|$. Employing the reduced minimum modulus $\gamma(T)$ ([5], p. 231) we have

$$\|x\| - \|Cx\| \leqslant \|I-C\|\gamma(T)^{-1}\|Tx\| = \alpha\|Tx\|$$

with $\alpha = \|I-C\|\gamma(T)^{-1} > 0$. This implies (2).