STUDIA MATHEMATICA, T. LVIII. (1976)

Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach

par

BERNARD MAUREY et GILLES PISIER (Paris)

Résumé. On étudie les rapports entre certaines propriétés des séries de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace de Banach E, et certaines propriétés géométriques de l'espace, comme par exemple le fait que E contienne ou non des l_n^∞ (ou des l_n^1) uniformément. Ces questions sont également reliées aux propriétés des opérateurs (p, q)-sommants.

Cet article est consacré à l'étude de certaines propriétés des séries de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans un espace de Banach. En fait, en utilisant des techniques de symétrisation (systématiquement exploitées dans [12] et [9]) il suffit souvent d'étudier des séries particulières de la forme $\sum \varepsilon_n(t)x_n$, où (x_n) est une suite d'éléments d'un espace de Banach et où $(\varepsilon_n(t))$ désigne la suite des variables de Rademacher sur $[0, 1]$ (que l'on peut remplacer si on préfère par n'importe quelle autre suite de variables indépendantes centrées ne prenant que les valeurs ± 1). Nous envisagerons deux propriétés pour un espace de Banach:

1° La convergence en probabilité de la série $\sum \varepsilon_n(t)x_n$ implique la convergence de la série $\sum \|x_n\|^q$. Dans ce cas nous dirons que l'espace de Banach est de cotype q.

2° La convergence de la série $\sum \|x_n\|^p$ implique la convergence en probabilité de la série $\sum \varepsilon_n(t)x_n$. Nous dirons alors que l'espace de Banach considéré est de type p-Rademacher.

Notre article est divisé (après un paragraphe 0 préliminaire) en deux paragraphes consacrés l'un au cotype, l'autre au type. Chacun de ces paragraphes contient un résultat principal (théorème 1.1 et théorème 2.1); ces résultats tentent de faire le lien entre les propriétés de type et de cotype, définies en termes de variables aléatoires, et des propriétés purement géométriques des espaces de Banach considérés.

L'origine de ces questions se trouve selon nous dans l'article [25] de H. P. Rosenthal où les équivalents de nos théorèmes 1.1 et 2.1 sont démontrés respectivement pour les quotients des espaces L^∞ et pour les sous-espaces des espaces L^1. Dans [17], chapitre VIII, la technique de Rosenthal a été appliquée à l'étude des rapports entre la structure géométrique d'un espace de Banach quelconque et les propriétés des opérateurs sommants partant de cet espace. Nous retrouverons ici par des méthodes nouvelles une partie des résultats de [17] (de sorte que le présent article est — pour l'essentiel — indépendant de [17]), et nous répondrons à certaines questions laissées ouvertes dans [17].

Les premiers résultats concernant le type et le cotype ont été indiqués dans [19] et [23], et ils seront retrouvés ici comme cas particuliers de nos théorèmes 1.1 et 2.1.

Venons-en au détail des résultats: une partie du théorème 1.1 affirme que si l'opérateur identité d'un espace de Banach E de dimension infinie est $(p, 1)$-sommant, l'espace E est de cotype q pour tout $q > p$. En fait le théorème 1.1 donne — pour chaque p dans $[1, \infty]$ — une caractérisation géométrique des espaces qui sont de cotype q pour au moins un $q < p$. Cette caractérisation est la même que celle de [17] pour les espaces dont l'identité est $(q, 1)$-sommante pour au moins un $q < p$; ce qui explique que nous retrouvions cette partie des résultats de [17] avec nos méthodes. Nous démontrons de surcroît que cette caractérisation est stable par l^2-somme, c'est-à-dire que E a cette propriété si et seulement si $l^2(E)$ l'a aussi (voir corollaire 1.2). Dans le cas $p = \infty$ (cf. [19]), ces résultats s'énoncent simplement: un espace E est de cotype q pour un $q < \infty$ si et seulement si E ne contient pas de l_n^∞ uniformément. On en déduit le corollaire suivant: un espace E ne contient pas de l_n^∞ uniformément si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de E, la convergence presque sûre de la série $\sum \varepsilon_n(\cdot)x_n$ implique celle de la série correspondante $\sum g_n(\cdot)x_n$ où (g_n) est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes gaussiennes normales (corollaire 1.3).

Le deuxième paragraphe commence par la définition des espaces de type p-Rademacher (définition 2.1) et d'infratype p (définition 2.2) pour $1 \leqslant p < \infty$. Comme le théorème 1.1, le théorème 2.1 donne une caractérisation géométrique des espaces de Banach qui sont de type q-Rademacher pour au moins un $q > p$. Nous en déduisons une caractérisation géométrique des espaces de type p-stable (espaces de type p dans [17]) introduits dans la définition 2.3. Il en résulte que — si $1 \leqslant p < 2$ — un espace E est de type p-stable si et seulement si il existe q, $p < q < 2$, tel que E est de type q-stable (proposition 2.2). De plus, E est de type p-stable si et seulement si tout opérateur p-sommant partant d'un quotient arbitraire de E est r-sommant pour tout $r > 0$ (corollaire 2.3). Dans le cas $p > 1$, cela revient à dire que tout opérateur borné de l^∞ dans un quotient arbitraire de E est p'-sommant, $1/p + 1/p' = 1$.

Dans le cas $p = 1$, l'énoncé du théorème 2.1 se simplifie (cf. [23]): un espace E est de type p-Rademacher pour un $p > 1$ si et seulement s'il ne contient pas de l_n^1 uniformément. Dans ce cas particulier, le résultat est très voisin de résultats de [1] et [8] sur la loi forte des grands nombres dans les espaces de Banach. Dans les corollaires 2.4 et 2.5, nous montrons comment le théorème 2.1 permet de généraliser les résultats de [1], [8], et de préciser les estimations intervenant dans la loi forte des grands nombres.

Pendant plusieurs années, le "problème des l_n^1" est resté ouvert. On sait maintenant, d'après un contre-exemple dû à R. C. James [10], qu'il existe un espace de Banach E qui ne contient pas de l_n^1 uniformément (cet espace E est donc de type p pour un $p > 1$) mais qui ne possède aucune norme équivalente uniformément convexe. Les résultats de [24] précisent cette différence: le fait qu'un espace de Banach E possède une norme équivalente uniformément convexe est lié aux propriétés des martingales à valeurs dans E, alors que le problème des l_n^1 est lié aux sommes de variables indépendantes centrées, qui sont un cas très particulier de martingale.

Enfin, nous ne considérons dans la suite que des espaces de Banach sur le corps des réels, mais la plupart des résultats s'étendent aisément au cas complexe.

0. Préliminaires. Nous désignerons par $(\varepsilon_n(t))$ la suite des fonctions de Rademacher sur $([0, 1], dt)$. (Si l'on préfère, il revient au même de penser à une suite de variables de Bernoulli indépendantes et centrées.) Nous utiliserons les inégalités classiques de Khintchine: pour tout nombre réel $p \in]0, +\infty[$, il existe deux constantes A_p et B_p telles que l'on ait pour toute suite (c_n) de nombres réels:

$$(\mathrm{K}_1) \qquad A_p\Big(\sum |c_n|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\int \Big|\sum c_n\varepsilon_n(t)\Big|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant B_p\Big(\sum |c_n|^2\Big)^{1/2}.$$

Nous considèrerons que le cas $p = 0$ est le cas de la convergence en probabilité. Dans ce cas, il existe $a > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que:

$$(\mathrm{K}_1') \qquad P\Big(t;\ \Big|\sum c_n\varepsilon_n(t)\Big| > a\Big) \leqslant \alpha \Rightarrow \sum |c_n|^2 \leqslant 1$$

(où $P(A)$ désigne la mesure de Lebesgue d'une partie mesurable $A \subset [0, 1]$).

On peut traduire les inégalités de Khintchine en disant que les topologies des différents L^p, $0 \leqslant p < \infty$, coïncident sur l'espace engendré par les variables de Rademacher. Sous cette forme, la propriété a été étendue aux espaces de Banach par J. P. Kahane ([12], chapitre 2, théorème 4): pour tout $q \in]0, \infty[$, il existe $b > 0$, $\beta \in]0, 1[$ et une constante K_q tels que l'on ait pour tout espace normé E et pour toute suite d'éléments de E, dont un nombre fini seulement sont non nuls, pour éviter les questions de convergence:

$$(\mathrm{K}_2) \qquad P\Big(t;\ \Big\|\sum x_n\varepsilon_n(t)\Big\| > b\Big) \leqslant \beta \Rightarrow \Big(\int \Big\|\sum x_n\varepsilon_n(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant K_q.$$

On en déduit aussitôt si p est tel que $0 < p \leqslant q < \infty$ l'existence d'une constante $K_{p,q}$ telle que:

$$(\mathrm{K}_2') \qquad \Big(\int \Big\| \sum x_n \varepsilon_n(t) \Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant K_{p,q} \Big(\int \Big\| \sum x_n \varepsilon_n(t) \Big\|^p dt\Big)^{1/p}$$

(pour $p \geqslant q$, l'inégalité est triviale).

Nous utiliserons à plusieurs reprises le fait que la suite $(\varepsilon_n(t))$ est une suite symétrique de variables aléatoires, ce qui s'exprime ainsi: si η_n est une suite de nombres égaux à ± 1, les suites $(\eta_n \varepsilon_n(t))$ et $(\varepsilon_n(t))$ sont isonomes, c'est-à-dire que les images sur $\boldsymbol{R}^N$ de la mesure de Lebesgue de $[0,1]$ par les applications $t \to (\varepsilon_n(t))$ et $t \to (\eta_n \varepsilon_n(t))$ coïncident. Il en résulte immédiatement que si $(\eta_n(s))$ est une suite de variables aléatoires qui ne prennent que les valeurs ± 1, et si cette suite est indépendante de la suite $(\varepsilon_n(t))$, les suites $(\varepsilon_n(t))$ et $(\eta_n(s)\varepsilon_n(t))$ sont isonomes. Si maintenant E est un espace vectoriel et (x_n) une suite d'éléments de E, dont un nombre fini seulement est non nul, les variables aléatoires $\sum x_n \varepsilon_n(t)$ et $\sum x_n \eta_n(s) \varepsilon_n(t)$ ont même loi sur E. On en déduit facilement le "principe de contraction": si E est normé, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, et si $(\alpha_n(s))$ est une suite de variables aléatoires réelles, $|\alpha_n(s)| \leqslant 1$ pour tout n, et si cette suite est indépendante de la suite $(\varepsilon_n(t))$:

$$\int \Big\| \sum x_n \alpha_n(s) \varepsilon_n(t) \Big\|^p ds\, dt \leqslant \int \Big\| \sum x_n \varepsilon_n(t) \Big\|^p dt.$$

(Il suffit de considérer le cas où α_n est une constante. Si $\alpha_n = \pm 1$ pour tout n, on a l'égalité des deux membres ci-dessus, et on en déduit le résultat par un argument de convexité et de points extrémaux, cf. [27], exp. 7, lemme 1).

DÉFINITION 0.1. Soient p, q deux nombres réels tels que $0 < q \leqslant p < \infty$. Un opérateur linéaire u d'un espace de Banach E dans un espace normé F est dit (p, q)-*sommant* s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E:

$$\Big(\sum \|u(x_i)\|^p\Big)^{1/p} \leqslant C \sup \Big\{\Big(\sum |\langle x_i, \xi\rangle|^q\Big)^{1/q};\ \xi \in E',\ \|\xi\| \leqslant 1\Big\}$$
$$= C \sup \Big\{\Big\| \sum \alpha_i x_i \Big\|;\ \alpha_i \in \boldsymbol{R},\ \sum |\alpha_i|^{q'} \leqslant 1,\ 1/q + 1/q' = 1\Big\}.$$

On note $\pi_{p,q}(u)$ la plus petite constante C telle que la propriété ci-dessus soit réalisée. Lorsque $p = q$, on dit simplement que u est p-sommant, et on note $\pi_p(u) = \pi_{p,p}(u)$. Rappelons que $p \to \pi_p(u)$ est une fonction décroissante à valeurs dans $\overline{\boldsymbol{R}}_+$.

Il existe aussi une notion d'opérateur linéaire 0-sommant (cf. [14]); il nous suffira de savoir qu'elle coïncide avec la notion d'opérateur p-sommant pour $p \in]0, 1[$ (cf. [4], théorème 3).

On notera $\pi_{p,q}(E, F)$, $\pi_p(E, F)$, $\pi_0(E, F)$ les espaces vectoriels des opérateurs linéaires (p, q)-sommants, p-sommants, 0-sommants de E dans F.

DÉFINITION 0.2. Soit E un espace de Banach. Nous dirons qu'une suite (x_n) d'éléments de E, finie ou infinie, est *inconditionnelle de constante* $\leqslant C$ si l'on a pour toute suite (α_n) de scalaires dont un nombre fini seulement sont non nuls:

$$\sup_{\varepsilon_n = \pm 1} \Big\| \sum \varepsilon_n \alpha_n x_n \Big\| \leqslant C \Big\| \sum \alpha_n x_n \Big\|.$$

DÉFINITION 0.3. Soient E et F deux espaces normés. Nous dirons que E est *finiment représentable dans* F, ce que nous noterons E f.r. F, si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout sous-espace de dimension finie E_0 de E, il existe un sous-espace de dimension finie F_0 de F tel que $d(E_0, F_0) \leqslant 1 + \varepsilon$ (avec $d(E, F) = \inf\{\|T\| \|T^{-1}\|;\ T$ isomorphisme de E sur $F\}$).

Si E est normé et si $\hat{E}$ est son complété, on voit que $\hat{E}$ f.r. E. Par conséquent, $\hat{E}$ f.r. $\hat{F}$ équivaut à E f.r. F. Par ailleurs, la remarque précédente et le théorème de réflexivité locale [16] montrent que l'on a E'' f.r. E pour tout espace normé E, où E'' désigne le bidual de E. Etant donnée une propriété P des espaces de Banach on dit qu'un espace de Banach E a la propriété super-P si tous les espaces de Banach finiment représentables dans E ont la propriété P. Il est clair que super-$P \Rightarrow P$. Ainsi une propriété P est une super-propriété si et seulement si

$$P \Leftrightarrow \text{super-}P,$$

c'est-à-dire si les espaces finiment représentables dans un espace ayant P ont aussi P.

DÉFINITION 0.4. Soient E un espace normé et p, q tels que $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Nous dirons que l'injection $l^p \to l^q$ est *finiment factorisable* au sens large dans E s'il existe un nombre réel $\delta \in]0, 1[$ tel que pour tout entier n, il existe un n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E tel que:

$$\forall (\alpha_i) \in \boldsymbol{R}^n \qquad (1-\delta)\Big(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \Big\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Si la propriété précédente est en fait satisfaite pour tout $\delta \in]0, 1[$, nous dirons que l'injection $l^p \to l^q$ est finiment factorisable dans E.

Notons deux propriétés évidentes: si r et s sont tels que $1 \leqslant r \leqslant p \leqslant q \leqslant s \leqslant \infty$, et si l'injection $l^p \to l^q$ est finiment factorisable dans E, l'injection $l^r \to l^s$ est a fortiori finiment factorisable dans E. Si F est finiment représentable dans E, et si l'injection $l^p \to l^q$ est finiment factorisable dans F, elle est aussi finiment factorisable dans E.

Remarque 0.1. Le lemme classique de Dvoretzky–Rogers [6] exprime exactement le fait que l'injection $l^2 \to l^\infty$ est finiment factorisable au sens large dans tout espace de Banach de dimension infinie (on voit par transposition qu'il en est de même pour l'injection $l^1 \to l^2$).

Remarque 0.2. Dire que l'injection $l^1 \to l^1$ (resp. $l^\infty \to l^\infty$) est finiment factorisable dans E revient à dire que l^1 est finiment représentable dans E (resp. l^∞, ou si l'on préfère, c_0), ou encore que E contient des l_n^1 (resp. des l_n^∞) $(1+\varepsilon)$-uniformément pour tout $\varepsilon > 0$ (cf. [23] et [19]).

La proposition suivante est connue, nous en donnons une démonstration rapide:

Proposition 0.1. *Soient p dans $[1, \infty]$ et E un espace normé. Si l'injection $l^p \to l^\infty$ (resp. l'injection $l^1 \to l^p$) est finiment factorisable au sens large dans E, elle est en fait finiment factorisable dans E.*

Démonstration. Soit α_n la plus petite constante positive α telle que l'on ait pour tout n-uple $x_1, \ldots, x_n$ dans E:

$$\inf_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\| \leqslant \alpha \sup \Big\{ \Big\| \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \Big\|;\ \sum_{i=1}^n |\gamma_i|^p = 1 \Big\}.$$

On vérifie trivialement que α_n est décroissante, $\alpha_n \leqslant 1$ pour tout entier n et on voit facilement que l'injection $l^p \to l^\infty$ est finiment factorisable dans E si et seulement si $\alpha_n = 1$ pour tout entier n; la propriété essentielle de α_n est la suivante: $\forall n, k \in \boldsymbol{N}$

$$\alpha_{nk} \leqslant \alpha_n \alpha_k. \tag{1}$$

Démontrons-le: soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant nk}$ un nk-uple dans E, on pose $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ $X_i = \sum_{(i-1)k < j \leqslant ik} \bar{\gamma}_j x_j$ de telle manière que $\|X_i\| = \sup \{ \| \sum_{(i-1)k < j \leqslant ik} \gamma_j x_j \|;$ $\sum |\gamma_j|^p = 1\}$. On a

$$\begin{aligned} \inf \|X_i\| &\leqslant \alpha_n \Big\{ \sup \Big\| \sum_{i=1}^n \gamma_i' X_i \Big\|;\ \sum_{i=1}^n |\gamma_i'|^p \leqslant 1 \Big\} \\ &\leqslant \alpha_n \sup \Big\{ \Big\| \sum_{j=1}^{j=nk} \gamma_j x_j \Big\|;\ \sum_{j=1}^{nk} |\gamma_j|^p = 1 \Big\} \end{aligned}$$

et d'autre part, par construction: $\|X_i\| \geqslant \dfrac{1}{\alpha_k} \inf_{(i-1)k < j \leqslant ik} \|x_j\|$ pour tout entier $i = 1, 2, \ldots, n$. On a donc:

$$\inf_{1 \leqslant j \leqslant nk} \|x_j\| \leqslant \alpha_n \alpha_k \Big\{ \sup \Big\| \sum_{j=1}^{nk} \gamma_j x_j \Big\|;\ \sum_{j=1}^{nk} |\gamma_j|^p = 1 \Big\}$$

et par conséquent $\alpha_{nk} \leqslant \alpha_n \alpha_k$.

La première assertion de la proposition est alors immédiate: en effet si l'injection $l^p \to l^\infty$ est finiment factorisable au sens large dans E, on a nécessairement $\liminf_n \alpha_n > 0$. La propriété (1) entraîne alors que $\alpha_n = 1$ pour tout entier n (car s'il existe un entier n_0 pour lequel $\alpha_{n_0} < 1$ alors $\alpha_{n_0^k} \to 0$ quand $k \to \infty$). Dans le cas de l'injection $l^1 \to l^p$ on procède de manière analogue: on définit β_n comme la plus petite constante positive β telle que l'on ait pour tout n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ dans E:

$$\inf \Big\{ \Big\| \sum_{i=1}^n \gamma_i x_i \Big\|;\ \sum |\gamma_i|^p = 1 \Big\} \leqslant \beta \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|.$$

On voit aisément que $\beta_n \leqslant 1$ pour tout entier n et que $l^1 \to l^p$ est finiment factorisable dans E si et seulement si $\beta_n = 1$ pour tout entier n. De manière analogue au cas précédent, on a: $\forall n, k \in \boldsymbol{N}$, $\beta_{nk} \leqslant \beta_n \beta_k$; on conclut alors comme ci-dessus.

Corollaire 0.1. *Soit E un espace normé, l'ensemble des réels p pour lesquels l'injection $l^p \to l^\infty$ (resp. l'injection $l^1 \to l^p$) est finiment factorisable au sens large dans E est un intervalle fermé dans $[1, \infty]$.*

Soient $n \in \boldsymbol{N}$ et $p \in]0, +\infty[$. On définira la "jauge" λ_p sur $\boldsymbol{R}^n$ par:

$$\forall (\alpha_i) \in \boldsymbol{R}^n, \quad \lambda_p\big((\alpha_i)\big) = [\sup_{c > 0} c^p \operatorname{Card}\{i;\ |\alpha_i| > c\}]^{1/p}.$$

On vérifie que cette quantité est équivalente à

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant n} i^{1/p} |\alpha_i|^*,$$

où $|\alpha_i|^*$ désigne la réarrangée décroissante de la suite $(|\alpha_i|)$. On voit que l'on a pour $p < q$:

$$\Big(\sum |\alpha_i|^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big(\frac{q}{q-p}\Big)^{1/q} \lambda_p\big((\alpha_i)\big), \tag{2}$$

et trivialement:

$$\lambda_p\big((\alpha_i)\big) \leqslant \Big(\sum |\alpha_i|^p\Big)^{1/p}.$$

On notera $\mathfrak{S}_n^p$ l'ensemble des éléments (α_i) de $\boldsymbol{R}^n$ tels que:

$$\operatorname{Card}\{i;\ \alpha_i \neq 0\} = k > 0, \quad \text{et} \quad \alpha_i \neq 0 \Rightarrow |\alpha_i| = k^{-1/p}.$$

On notera σ_p la jauge de l'enveloppe convexe de $\mathfrak{S}_n^p$. Du fait que chaque élément $(\alpha_i) \in \mathfrak{S}_n^p$ vérifie $\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^p = 1$, on aura pour $p \geqslant 1$:

$$\forall (\alpha_i) \in \boldsymbol{R}^n, \quad \Big(\sum |\alpha_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \sigma_p\big((\alpha_i)\big).$$

Par ailleurs pour $p \geqslant 1$, on notera σ_p' la jauge du polaire $(\mathfrak{S}_n^p)^0$ de $\mathfrak{S}_n^p$. On vérifie aisément que:

$$(*) \quad \forall (\alpha_i) \in \boldsymbol{R}^n, \quad \lambda_p\big((\alpha_i)\big) \leqslant \sigma_{p'}'\big((\alpha_i)\big) \leqslant p' \lambda_p\big((\alpha_i)\big) \quad (1/p + 1/p' = 1).$$

On en déduit par dualité, à partir de (2): pour $1 < p < q < \infty$

$$\sigma_q\big((a_i)\big) \leqslant \left(\frac{p'}{p'-q'}\right)^{1/p'} \Big(\sum |a_i|^p\Big)^{1/p} \quad (^1). \tag{2'}$$

Notations. Pour clarifier les notations, si a est une suite de nombres réels, nous noterons $a(i)$ la i-ème composante de la suite a. De plus, si $p \in [1, \infty]$, le nombre p' sera le "conjugué" de p, c'est-à-dire vérifiera $1/p + 1/p' = 1$.

Le lemme suivant nous sera très utile. C'est une adaptation d'un théorème de Nikishin [20] (théorème 14).

Lemme 0.1. *Soient n un entier, $K > 0$ une constante, q un réel dans $[1, \infty[$ et E un espace normé; on note $\xi_1, \ldots, \xi_n$ les vecteurs de base de l_n^∞.*

(a) *Si un opérateur u de l_n^∞ dans E vérifie:*

$$\forall (a^k)_{k=1,\ldots,n} \in (l_n^\infty)^n, \quad \Big(\sum_{k=1}^n \|u(a^k)\|^q\Big)^{1/q} \leqslant K \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{k=1}^n |a^k(i)|, \tag{3}$$

alors: pour tout réel c dans $\boldsymbol{R}_+$, il existe une partie A_c de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\operatorname{card}(A_c) \geqslant n(1 - 1/c^q)$ *et*

$$\forall (a_i) \in \boldsymbol{R}^n, \quad \Big\| u\Big(\sum_{i\in A_c} a_i \xi_i\Big)\Big\| \leqslant \frac{Kc}{n^{1/q}} \sigma_q\big((a_i)\big).$$

(b) *Si un opérateur u de E dans l_n^1 vérifie:*

$$\forall (x_k)_{k=1,\ldots,n} \in E^n, \quad \sum_{i=1}^n \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |u(x_k)(i)| \leqslant K\Big(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^q\Big)^{1/q} \tag{4}$$

alors: pour tout réel c dans $\boldsymbol{R}_+$, il existe une partie A_c de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\operatorname{card}(A_c) \geqslant (1 - 1/c^q)n$ *et*

$$\forall x \in E, \quad \lambda_q\Big(\big(u(x)(i)\big)_{i\in A_c}\Big) \leqslant \frac{Kc}{n^{1/q'}} \|x\|.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer (a); en effet (b) en découle par simple transposition en utilisant (*).

Soit c dans $\boldsymbol{R}_+$; nous dirons qu'une partie A de $\{1, \ldots, n\}$ est une N-partie s'il existe $(\varepsilon_i) \in \{1, -1\}^n$ tel que

$$\Big\| u\Big(\sum_{i\in A} \varepsilon_i \xi_i\Big)\Big\| > Kc\left(\frac{\operatorname{card}(A)}{n}\right)^{1/q}.$$

(Donc A est non vide). S'il n'existe aucune N-partie, on pose $A_c = \{1, 2, \ldots, n\}$ et on conclut comme ci-dessous.

(1) Les jauges λ_p et σ_p correspondent respectivement aux normes des espaces de Lorentz de suites $l^{p,\infty}$ et $l^{p,1}$.

Supposons qu'il existe au moins une N-partie; soit alors $(A_j)_{j=1,\ldots,m}$ un système maximal de N-parties de $\{1, \ldots, n\}$ deux-à-deux disjointes. Par définition d'une N-partie, pour tout $j = 1, \ldots, m$ il existe $(\varepsilon_i^j)_{i=1,\ldots,n}$ dans $\{-1, 1\}^n$ tel que

$$\Big\| u\Big(\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i^j \xi_i\Big)\Big\| > Kc\left(\frac{\operatorname{card}(A_j)}{n}\right)^{1/q};$$

puisque trivialement $m \leqslant n$, on peut appliquer (3):

$$\Big(\sum_{j=1}^m \Big\| u\Big(\sum_{i\in A_j} \varepsilon_i^j \xi_i\Big)\Big\|^q\Big)^{1/q} \leqslant K \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{1\leqslant j\leqslant m} 1_{A_j}(i)$$

d'où

$$Kc\Big(\sum_{j=1}^m \frac{\operatorname{card}(A_j)}{n}\Big)^{1/q} \leqslant K \quad \text{donc} \quad \operatorname{card}\Big(\bigcup_{j=1}^m A_j\Big) \leqslant \frac{n}{c^q}.$$

Posons $A_c = \{1, \ldots, n\} - \bigcup_{j=1}^m A_j$ et soit $B \subset A_c$; d'après la maximalité de $(A_j)_{j=1,\ldots,m}$ on a:

$$\forall (\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^n, \quad \Big\| u\Big(\sum_{i\in B} \varepsilon_i \xi_i\Big)\Big\| \leqslant Kc\left(\frac{\operatorname{card} B}{n}\right)^{1/q}$$

soit

$$\Big\| u\Big(\sum_{i\in B} \frac{\varepsilon_i}{(\operatorname{card} B)^{1/q}} \xi_i\Big)\Big\| \leqslant \frac{Kc}{n^{1/q}},$$

donc par convexité:

$$\forall (a_i) \in \boldsymbol{R}^n, \quad \Big\| u\Big(\sum_{i\in A_c} a_i \xi_i\Big)\Big\| \leqslant \frac{Kc}{n^{1/q}} \sigma_q\big((a_i)\big),$$

ce qui est bien le résultat annoncé.

Remarque 0.3. La condition (3) de l'énoncé du lemme 1 équivaut à dire que $\pi_{q,1}(u) \leqslant K$. Plus précisément, remarquons que pour un opérateur linéaire u de l_n^∞ dans un espace normé E les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) $\pi_{q,1}(u) \leqslant K$,

(b) pour toute suite $(a_1, \ldots, a_k)$ d'éléments non nuls de l_n^∞, à supports deux-à-deux disjoints (d'où $k \leqslant n$), tels que $|a_j(i)| = 0$ ou 1, $j = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\Big(\sum_{j=1}^k \|u(a_j)\|^q\Big)^{1/q} \leqslant K.$$

Il suffit de remarquer que les points extrémaux de la boule unité de $\mathscr{L}(l_m^\infty, l_n^\infty)$ correspondent aux opérateurs v de la forme:

$$v(e_j) = \alpha_j \in l_n^\infty,$$

où $(e_1, \dots, e_m)$ désigne la base de l_m^∞ et où les (α_j) ont des supports deux-à-deux disjoints (par conséquent n d'entre eux au plus sont non nuls), et où $|\alpha_j(i)| = 0$ ou 1.

On en déduit que toute suite $(x_1, \dots, x_m)$ d'éléments de l_n^∞ telle que $\sup\{\sum_{j=1}^{m} |\langle x_j, \xi\rangle|;\ \|\xi\| \leqslant 1\} \leqslant 1$, est combinaison convexe de suites $(\alpha_1, \dots \dots, \alpha_m)$ du style précédent, ce qui permet de conclure par convexité. Dans le cas d'un espace $C(K)$ quelconque la remarque précédente possède un analogue, un peu plus compliqué à établir, cf. [28] exp. XXIV–XXV, lemme 4.

1. Le problème du cotype.

DÉFINITION 1.1. Soit q un nombre réel > 0. Nous dirons qu'un espace normé E est de *cotype* q s'il existe une constante C et un nombre réel $\alpha \in]0, +\infty[$ tels que l'on ait pour toute famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\Big)^{1/q} \leqslant C\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^\alpha dt\Big)^{1/\alpha}.$$

Remarque 1.1 D'après les inégalités (K_2) rappelées dans le paragraphe 0, on peut (quitte à changer C) remplacer α par n'importe quel autre nombre réel $\beta \in]0, \infty[$. De plus (d'après (K_2)) si E est de cotype q et si (x_n) est une suite d'éléments de E telle que la série $\sum \varepsilon_n(t) x_n$ converge en probabilité (ou presque sûrement, ce qui est équivalent d'après [12], chapitre 2, p. 15) la série $\sum \|x_n\|^q$ est convergente.

Il est clair que pour un espace de Banach "être de cotype q" est une superpropriété.

Soit E un espace normé. On voit que si E est cotype q, il est de cotype p pour $p \geqslant q$. Nous noterons q^E (resp. q_E) la borne inférieure de l'ensemble des nombres réels q tels que E soit de cotype q (resp. tels que l'identité de E soit $(q, 1)$-sommante). On a trivialement $q_E \leqslant q^E$. Par ailleurs, on a $q^E \geqslant 2$ dès que $\dim E \geqslant 1$. (Il suffit d'appliquer l'inégalité du cotype pour des vecteurs d'un sous-espace de dimension 1, et de comparer aux inégalités (K_1).) On a aussi $q_E \geqslant 2$ lorsque E est de dimension infinie, d'après le lemme de Dvoretzky–Rogers.

Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème suivant:

THÉORÈME 1.1. *Pour tout espace normé E de dimension infinie, l'injection $l^{q^E} \to l^\infty$ est finiment factorisable dans E. Plus précisément $q^E = q_E = q(E)$*

où:

$$q(E) = \sup\{p \geqslant 1;\ l'injection\ l^p \to l^\infty\ est\ f.f.\ dans\ E\}.$$

Soit $q \in]0, +\infty[$. Si E est un espace normé, nous noterons $\varphi_q^E(n)$ la plus petite constante $\varphi \geqslant 0$ telle que l'on ait pour tout n-uple $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\Big)^{1/q} \leqslant \varphi\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t) x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q}.$$

On voit immédiatement que $\varphi_q^E(n)$ croît avec n, et que E est de cotype q si et seulement si la suite $\varphi_q^E(n)$ est bornée.

LEMME 1.1. *Soient E un espace normé, $q \in]0, \infty[$ et (Ω, μ) un espace mesuré (non trivial). On aura (en notant $L^q(\Omega, \mu, E) = L^q(E)$):*

$$\varphi_q^E(n) = \varphi_q^{L^q(E)}(n).$$

En particulier, E est de cotype q si et seulement si $L^q(E)$ est de cotype q. Plus généralement, $L^p(E)$ est de cotype q pour $p \in]0, q]$ si et seulement si E est de cotype q.

Démonstration. L'espace E s'identifie au sous-espace des fonctions constantes dans $L^q(E)$, donc $\varphi_q^E(n) \leqslant \varphi_q^{L^q(E)}(n)$. Pour démontrer l'inégalité inverse, il suffit d'intégrer l'inégalité:

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i(\omega)\|^q \leqslant (\varphi_q^E(n))^q \int \Big\|\sum \varepsilon_i(t) x_i(\omega)\Big\|^q dt.$$

Pour démontrer la deuxième partie de l'énoncé, on écrit l'inégalité du cotype q sous la forme (cf. remarque 1.1)

$$\Big(\sum \|x_n\|^q\Big)^{1/q} \leqslant C\Big(\int \Big\|\sum \varepsilon_i(t) x_i\Big\|^p dt\Big)^{1/p}.$$

On a alors, lorsque $p \leqslant q$:

$$\Big(\sum \|x_n\|_{L^p(E)}^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big(\int \Big(\sum \|x_n(\omega)\|^q\Big)^{p/q} d\mu(\omega)\Big)^{1/p} \leqslant C\ \Big(\int \Big\|\sum \varepsilon_n(t) x_n\Big\|_{L^p(E)}^p dt\Big)^{1/p}.$$

LEMME 1.2. *Soient E un espace normé et $q \in]0, +\infty[$. On a:*

$$\forall n, k \in \mathbf{N}, \quad \varphi_q^E(nk) \leqslant \varphi_q^E(n) \varphi_q^E(k). \tag{5}$$

Démonstration. Soient n et k deux entiers et soit $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant nk}$ un nk-uple d'éléments de E. Posons, pour $i = 1, \dots, n$ et $\theta \in [0, 1]$:

$$X_i(\theta) = \sum_{(i-1)k < j \leqslant ik} \varepsilon_j(\theta) x_j.$$

Nous aurons par définition:

$$\sum_{i=1}^{n} \|X_i(\theta)\|^q \leqslant (\varphi_q^E(n))^q \int \Big\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(t) X_i(\theta)\Big\|^q dt,$$

d'où après intégration:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}\int \|X_i(\theta)\|^q d\theta\Big)^{1/q} \leqslant \varphi_q^E(n)\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(t)X_i(\theta)\Big\|^q dt\,d\theta\Big)^{1/q}$$
$$= \varphi_q^E(n)\Big(\int \Big\|\sum_{j=1}^{nk}\varepsilon_j(\theta)x_j\Big\|^q d\theta\Big)^{1/q},$$

en utilisant la propriété de symétrie des variables de Rademacher. Par ailleurs:

$$\Big(\sum_{(i-1)k<j\leqslant ik}\|x_j\|^q\Big)^{1/q} \leqslant \varphi_q^E(k)\Big(\int \|X_i(\theta)\|^q d\theta\Big)^{1/q},$$

d'où:

$$\Big(\sum_{j=1}^{nk}\|x_j\|^q\Big)^{1/q} \leqslant \varphi_q^E(n)\varphi_q^E(k)\Big(\int \Big\|\sum_{j=1}^{nk}\varepsilon_j(\theta)x_j\Big\|^q d\theta\Big)^{1/q},$$

ce qui démontre le lemme.

LEMME 1.3. *Soient E un espace normé, $q\in]0,+\infty[$ et N un entier >1. Définissons p par l'égalité:*

$$\varphi_q^E(N) = N^{1/q-1/p} \quad (p\geqslant q).$$

L'espace E est de cotype q_1 pour tout $q_1>p$.

Démonstration. D'après le lemme 1.2, on aura pour tout entier $k\geqslant 1$:

$$\varphi_q^E(N^k)\leqslant N^{k\alpha}, \quad \text{où} \quad \alpha = 1/q-1/p.$$

Soit n un entier quelconque, et soit k un entier tel que $N^{k-1}\leqslant n< N^k$. Nous aurons:

$$\varphi_q^E(n)\leqslant \varphi_q^E(N^k)\leqslant N^{k\alpha}\leqslant N^\alpha\cdot n^\alpha.$$

Soit (x_i) un n-uple d'éléments de E. Supposons (ce qui ne restreint pas la généralité) que la suite $(\|x_i\|)$ des normes est décroissante. Nous aurons si $k=1,\dots,n$:

$$\|x_k\| = \inf_{1\leqslant j\leqslant k}\|x_j\| \leqslant \Big(k^{-1}\sum_{j=1}^{k}\|x_j\|^q\Big)^{1/q} \leqslant k^{-1/q}\varphi_q^E(k)\Big(\int\Big\|\sum_{j=1}^{k}\varepsilon_j(t)x_j\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$
$$\leqslant k^{-1/q}\varphi_q^E(k)\Big(\int\Big\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(t)x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q}.$$

Supposons $\int\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i(t)x_i\|^q dt = 1$ pour simplifier l'écriture. Nous aurons:

$\|x_k\|\leqslant N^\alpha k^{-1/p}$, donc si q_1 est tel que $p<q_1$, nous aurons:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\|x_k\|^{q_1}\Big)^{1/q_1}\leqslant N^\alpha\Big(\sum_{k=1}^{\infty}k^{-q_1/p}\Big)^{1/q_1},$$

ce qui démontre le lemme.

Le lemme suivant est élémentaire:

LEMME 1.4. *Soit (a_n) une suite de nombres réels positifs. On a:*

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{\log n}\leqslant \limsup_{n\to\infty} n\Big(\frac{a_n}{a_{n-1}}-1\Big).$$

Le prochain lemme utilise une construction de A. Brunel et L. Sucheston ([3]) et nous a été communiqué par W. B. Johnson. Un résultat voisin est démontré dans [5].

LEMME 1.5. *Soient k_0 un entier >1, δ, ε deux nombres réels >0. Pour tout entier n, il existe un entier $N=N(k_0,\delta,\varepsilon,n)$, tel que: pour tout espace de Banach E, et pour toute suite $(x_1,\dots,x_N)$ de N éléments de la boule unité de E vérifiant:*

$$P_{k_0,\delta}:\ \Big\{\forall A\subset\{1,\dots,N\},\quad \operatorname{Card} A\geqslant k_0,\quad \sup_{(i,j)\in A\times A}\|x_i-x_j\|\geqslant\delta\Big\}$$

on a:

$$Q_{\varepsilon,\delta,n}:\ \left\{\begin{array}{l}\text{Il existe une suite extraite } (x_{i_1},\dots,x_{i_{2n}}),\text{ telle que la suite des}\\ \text{différences } (x_{i_{2j}}-x_{i_{2j-1}}) \text{ soit basique inconditionnelle de cons-}\\ \text{tante} \leqslant (2+\varepsilon), \text{ et vérifie:}\\ \qquad \|x_{i_{2j}}-x_{i_{2j-1}}\|\geqslant \delta/2 \quad \text{pour} \quad j=1,2,\dots,n.\end{array}\right\}$$

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde: soient k_0, δ, $\varepsilon>0$, donnés. Si la propriété du lemme n'est pas vérifiée, il existe un entier n, tel que pour tout entier N, il existe un espace de Banach E_N, et une suite $(x_1^N,\dots,x_N^N)$ d'éléments de la boule unité de E_N, vérifiant $P_{k_0,\delta}$, mais ne vérifiant pas $Q_{\varepsilon,\delta,n}$. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non trivial sur N. On définit une semi-norme $c\to\{c\}$ sur l'espace $\boldsymbol{R}^{(N)}$ des suites dont un nombre fini de termes seulement sont non nuls par la formule:

$$\{(c_i)\} = \lim_{N\to\infty,\ \mathscr{U}}\Big\|\sum c_i x_i^N\Big\|_{E_N}$$

(on pose $x_i^N=0$ pour $i>N$).

Désignons par X l'espace normé obtenu en prenant le quotient de $\boldsymbol{R}^{(N)}$ par le noyau de la semi-norme ci-dessus. Notons $\bar c$ l'image dans X d'un élément c de $\boldsymbol{R}^{(N)}$, et notons encore $\{\bar c\}$ sa norme dans $X(\{\bar c\}=\{c\}$ pour tout $c)$. Désignons par (e_k) la base canonique de $\boldsymbol{R}^{N}$. La suite $(\bar e_k)$ est bornée dans $X(\{\bar e_k\}\leqslant 1$ pour tout $k)$, on peut par conséquent lui appliquer le procédé d'extraction de Brunel–Sucheston ([2], proposition 1): il existe une sous-suite $\bar{e}'_k = \bar{e}_{m_k}$ extraite de la suite $(\bar{e}_k)$ telle que:

$$\forall (c_j) \in \mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, \quad L\big((c_j)\big) = \lim_{\substack{k_1\to\infty \\ k_1<k_2<\ldots<k_j<\ldots}} \Big\{\sum_j c_j \bar{e}'_{k_j}\Big\}$$

existe. Par ailleurs la suite $(\bar{e}'_k)$ ne peut pas être de Cauchy dans X. En effet, puisque chaque suite (x^N) vérifie $P_{k_0,\delta}$, on obtient en prenant la limite suivant l'ultrafiltre:

$$\forall A \subset \mathbf{N}, \quad \operatorname{Card} A \geqslant k_0 \Rightarrow \sup_{(i,j)\in A\times A} \{\bar{e}'_i - \bar{e}'_j\} = \sup_{(i,j)\in A\times A} \{e_i - e_j\} \geqslant \delta.$$

Ceci implique d'après [3] que L est une norme sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, pour laquelle la suite des différences $(e_{2k}-e_{2k-1})$, $k = 1, 2, \ldots$, est inconditionnelle de constante $\leqslant 2$.

Considérons l'espace normé Y engendré par les vecteurs $(e_1, \ldots, e_{2n})$ dans $(\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}, L)$. Pour chaque couple d'entiers (i, N), définissons un opérateur linéaire $u_{i,N}$ de Y dans E_N par:

$$u_{i,N}(e_j) = x^N_{m_{i+j}}, \quad j = 1, \ldots, 2n.$$

D'après les constructions précédentes, on a:

$$\forall y \in Y, \quad \|y\| = \lim_{i\to\infty} \lim_{\substack{N\to\infty \\ \mathcal{U}}} \|u_{i,N}(y)\|_{E_N}.$$

On voit par ailleurs que la famille de fonctions $y \to \|u_{i,N}(y)\|$ est équicontinue sur Y, donc la convergence de $\|u_{i,N}(y)\|$ vers $\|y\|$ est uniforme sur la boule unité de Y. On aura donc pour (i, N) "assez grands":

$$\forall y \in Y, \quad (1+\bar{\varepsilon}/2)^{-1/2}\|y\| \leqslant \|u_{i,N}(y)\| \leqslant (1+\bar{\varepsilon}/2)^{1/2}\|y\|, \qquad \bar{\varepsilon} = \inf(\varepsilon, 1)$$

d'où l'on déduit que la suite $v_j = x^N_{m_{i+2j}} - x^N_{m_{i+2j-1}}$, $j = 1, \ldots, n$, est inconditionnelle de constante $\leqslant (2+\varepsilon)$, et vérifie $\|v_j\| \geqslant \delta/2$ (puisque $L(e_i - e_j) = L(e_1 - e_2) \geqslant \delta$ pour $i \neq j$), d'où une contradiction qui achève la démonstration.

Démonstration du théorème. Si $q^E = 2$, on a $2 \leqslant q_E \leqslant q^E = 2$, donc $q_E = q^E$, et l'injection $l^2 \to l^\infty$ est finiment factorisable dans E d'après le lemme de Dvoretzky–Rogers. Nous supposerons donc $2 < q < q^E$.

Soit $n > 1$ fixé, et posons $\varphi^E_q(n) = n^{1/q-1/s}$. On voit d'après le lemme (1.3) que $q^E \leqslant s$, donc:

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \varphi^E_q(n) \geqslant n^{1/q-1/q^E},$$

soit encore:

$$\log \varphi^E_q(n) \geqslant (1/q - 1/q^E)\log n.$$

D'après le lemme (1.4), on peut trouver un sous-ensemble infini $\mathbf{N}_1 \subset \mathbf{N}$, un nombre réel $b > 0$ et une suite (ε_n) d'éléments de $]0, 1[$ tels que:

$$\forall n \in \mathbf{N}_1, \quad \frac{1}{1+\varepsilon_n}\,\frac{\varphi^E_q(n)}{\varphi^E_q(n-1)} \geqslant 1 + \frac{b}{n} \geqslant \Big(1+\frac{b}{n}\Big)^{1/q}. \tag{6}$$

On peut supposer $b \leqslant 1$, de sorte que $\dfrac{n}{n+b} \geqslant 1/2$ pour tout entier n.

D'après la définition de $\varphi^E_q(n)$, on peut trouver pour tout entier n une suite $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E telle que:

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q = n, \quad \text{et} \quad \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant (1+\varepsilon_n)\big(\varphi^E_q(n)\big)^{-1} n^{1/q}.$$

Posons $\alpha = \inf_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\|$, et soit i_0 un indice tel que $\alpha = \|x_{i_0}\|$. On peut écrire:

$$\Big(\sum_{i\neq i_0} \|x_i\|^q\Big)^{1/q} = (n-\alpha^q)^{1/q} \leqslant \varphi^E_q(n-1)\Big(\int \Big\|\sum_{i\neq i_0} x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant \varphi^E_q(n-1)\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant \varphi^E_q(n-1)\big(\varphi^E_q(n)\big)^{-1}(1+\varepsilon_n)\, n^{1/q}.$$

Si on choisit $n \in \mathbf{N}_1$, on aura d'après (6):

$$1 + \frac{\alpha^q}{n-\alpha^q} \geqslant 1 + b/n, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha^q \geqslant \frac{bn}{n+b} \geqslant b/2.$$

Lorsque $n \in \mathbf{N}_1$, on a donc:

$$\inf_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\| \geqslant (b/2)^{1/q}. \tag{7}$$

Par ailleurs, on a d'après le "principe de contraction" (paragraphe 0) et d'après le choix de $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbf{R}^n, \quad \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant 2n^{1/q}\big(\varphi^E_q(n)\big)^{-1} \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i|.$$

On peut définir un opérateur u_n de l^∞_n dans $L^q(E)$ en posant:

$$\forall \alpha \in l^\infty_n, \quad u_n(\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \varepsilon_i(t).$$

La relation ci-dessus se traduit alors par:

$$\|u_n\| \leqslant 2n^{1/q}\big(\varphi^E_q(n)\big)^{-1}.$$

Soit $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$ un n-uple d'éléments de l_n^∞. On aura: (en utilisant $\varphi_q^{L^q(E)}(n) = \varphi_q^E(n)$, cf. lemme (1.1))

$$\Big(\sum_{k=1}^n \|u_n(\alpha^k)\|^q\Big)^{1/q} \leqslant \varphi_q^E(n)\Big(\int\Big\|\sum_{k=1}^n u_n(\alpha^k)\,\varepsilon_k(\theta)\Big\|^q d\theta\Big)^{1/q}$$
$$\leqslant \varphi_q^E(n)\,\|u_n\|\Big(\int\Big\|\sum_{k=1}^n \alpha^k\varepsilon_k(\theta)\Big\|^q d\theta\Big)^{1/q} \leqslant \varphi_q^E(n)\,\|u_n\|\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{k=1}^n|\alpha^k(i)|.$$

Appliquons le lemme 0.1 (a) à l'opérateur u_n. Il existe une partie $A\subset\{1,\ldots,n\}$, telle que $\operatorname{Card}A\geqslant n/2$, et telle que l'on ait pour toute suite (α_i) à support dans A ($\alpha_i\neq 0\Rightarrow i\in A$):

$$\Big(\int\Big\|\sum \alpha_i x_i\varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant 2^{1/q}\varphi_q^E(n)\,\|u_n\|n^{-1/q}\sigma_q\big((\alpha_i)\big) \leqslant 2^{1+1/q}\sigma_q\big((\alpha_i)\big).$$

Finalement, on peut trouver d'après ce qui précède et d'après la relation (7) un sous-ensemble infini $\boldsymbol{N}_2\subset\boldsymbol{N}$, une constante $d>0$, et pour tout $n\in\boldsymbol{N}_2$ un n-uple $(x_1^n,\ldots,x_n^n)$ d'éléments de E tels que:

$$(8)\qquad \inf_{1\leqslant i\leqslant n}\|x_i^n\|\geqslant d,\quad\text{et}\quad \forall(\alpha_i)\in\boldsymbol{R}^n,\quad \Big(\int\Big\|\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i^n\varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q}\leqslant\sigma_q\big((\alpha_i)\big).$$

Nous allons maintenant appliquer le lemme 1.5. Soit k_0 un entier tel que $d\sqrt{k_0}-k_0^{1/q}>0$, et posons $\delta = k_0^{-1}(d\sqrt{k_0}-k_0^{1/q})$. Montrons que si $n\in\boldsymbol{N}_2$ $n\geqslant k_0$, la suite $(x_1^n,\ldots,x_n^n)$ vérifie la propriété $P_{k_0,\delta}$ du lemme 1.5. Soit en effet $A\subset\{1,\ldots,n\}$, $\operatorname{Card}A = k_0$. On aura, en choisissant $x_{i_0}^n$ tel que $\|x_{i_0}^n\| = \sup_{i\in A}\|x_i^n\|$ $(i_0\in A)$, et en posant $\mathscr{A} = \big(\int\|\sum_{i\in A}x_i^n\varepsilon_i(t)\|^q dt\big)^{1/q}$:

$$\mathscr{A}\geqslant\Big(\int\Big\|x_{i_0}^n\sum_{i\in A}\varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q}-\Big(\int\Big\|\sum_{i\in A}(x_i^n-x_{i_0}^n)\,\varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$
$$\geqslant\sup_{i\in A}\|x_i^n\|\Big(\int\Big|\sum_{i\in A}\varepsilon_i(t)\Big|^q dt\Big)^{1/q}-k_0\sup_{(i,j)\in A}\|x_i^n-x_j^n\|$$
$$\geqslant d\sqrt{k_0}-k_0\sup_{i,j\in A}\|x_i^n-x_j^n\|,$$

d'où d'après (8):

$$\sup_{i,j\in A}\|x_i^n-x_j^n\|\geqslant k_0^{-1}\big(d\sqrt{k_0}-k_0^{1/q}\big) = \delta.$$

Soit m un entier quelconque, et choisissons un entier $n\geqslant N(k_0,\delta,1,m)$, $n\in\boldsymbol{N}_2$. D'après le lemme (1.5), il existe une suite extraite $(x_{i_1}^n,\ldots,x_{i_{2m}}^n)$ telle que la suite des différences $(x_{i_{2j}}^n-x_{i_{2j-1}}^n)_{j=1,\ldots,m}$ soit une suite inconditionnelle de constante $\leqslant 3$, avec:

$$\inf_{1\leqslant j\leqslant m}\|x_{i_{2j}}^n-x_{i_{2j-1}}^n\|\geqslant\delta/2.$$

Posons $y_j = x_{i_{2j}}^n - x_{i_{2j-1}}^n$. On obtient d'après (8):

$$\forall(\alpha_k)\in\boldsymbol{R}^m,\quad \Big\|\sum_{k=1}^m\alpha_k y_k\Big\|\leqslant 3\Big(\int\Big\|\sum_{k=1}^m\alpha_k y_k\varepsilon_k(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$
$$\leqslant 3\Big(\int\Big\|\sum_{k=1}^m\alpha_k x_{i_{2k}}^n\varepsilon_k(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q}+3\Big(\int\Big\|\sum_{k=1}^m\alpha_k x_{i_{2k-1}}^n\varepsilon_k(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$
$$\leqslant 6\sigma_q\big((\alpha_i)\big)$$

d'où l'on déduit finalement, pour $r<q$, d'après (2'):

$$\forall(\alpha_k)\in\boldsymbol{R}^m,\quad \frac{\delta}{6}\sup|\alpha_k|\leqslant\Big\|\sum_{k=1}^m\alpha_k y_k\Big\|\leqslant 6\Big(\frac{r'}{r'-q'}\Big)^{1/r'}\Big(\sum_{k=1}^m|\alpha_k|^r\Big)^{1/r}.$$

Nous avons donc montré que pour tout $r<q^E$, l'injection $l^r\to l^\infty$ est finiment factorisable dans E au sens large. D'après la proposition (0.1) et son corollaire, cela implique que l'injection $l^{q^E}\to l^\infty$ est finiment factorisable dans E.

Nous avons donc montré que $q^E\leqslant q(E)$, et nous savons déjà que $q_E\leqslant q^E$. Pour achever la démonstration, il suffit de montrer que $q(E)\leqslant q_E$. D'après la proposition (0.1), l'injection $l^{q(E)}\to l^\infty$ est finiment factorisable dans E. On peut donc trouver pour tout entier n une suite $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de E telle que:

$$\forall(\alpha_i)\in\boldsymbol{R}^n,\quad \tfrac12\sup|\alpha_i|\leqslant\Big\|\sum_{i=1}^n\alpha_i x_i\Big\|\leqslant\Big(\sum|\alpha_i|^{q(E)}\Big)^{1/q(E)}.$$

On voit donc que $\sup\big\{\|\sum_{i=1}^n\varepsilon_i x_i\|;\ \varepsilon_i = \pm1\big\}\leqslant n^{1/q(E)}$, alors que $\big(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^p\big)^{1/p}\geqslant\frac12 n^{1/p}$, ce qui montre que l'identité de E ne peut pas être $(p,1)$-sommante pour $p<q(E)$, donc $q(E)\leqslant q_E$ et la démonstration du théorème est achevée.

Remarque 1.2. Supposons $q^E<\infty$. On peut voir aussi que pour tout $q>q^E$, l'injection $l^{q^E}\to l^q$ est finiment factorisable au sens large dans E. Soit n un entier, et soit $N\geqslant N(2,\frac12,1,n)$ (cf. lemme 1.5). On peut trouver un N-uple $(x_1,\ldots,x_N)$ de vecteurs de E tel que:

$$\forall(\alpha_i)\in\boldsymbol{R}^N,\quad \tfrac12\sup|\alpha_i|\leqslant\Big\|\sum_{i=1}^N\alpha_i x_i\Big\|\leqslant\Big(\sum_{i=1}^N|\alpha_i|^{q^E}\Big)^{1/q^E}.$$

Il en résulte que:

$$i\neq j\Rightarrow\|x_i-x_j\|\geqslant\tfrac12,$$

donc la suite $(x_1, \ldots, x_N)$ vérifie la propriété $P_{2,1/2}$. D'après le lemme 1.5, il existe une suite extraite $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{2n}})$ telle que la suite des différences $y_k = x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}$ soit inconditionnelle de constante $\leqslant 3$. On aura alors:

$$\forall (a_i) \in \boldsymbol{R}^n, \qquad \Big\|\sum_{k=1}^n a_k y_k\Big\| \leqslant 2^{1/q^E}\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^{q^E}\Big)^{1/q^E}.$$

D'autre part, puisque $q^E = q_E$, l'identité de E est $(q, 1)$-sommante; il existe donc une constante C_q telle que l'on ait:

$$\tfrac{1}{3}\Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big(\sum \|a_k y_k\|^q\Big)^{1/q} \leqslant C_q \sup_{\varepsilon_k=\pm 1}\Big\|\sum_{k=1}^n a_k y_k \varepsilon_k\Big\| \leqslant 3C_q\Big\|\sum_{k=1}^n a_k y_k\Big\|,$$

ce qui montre que l'injection $l^{q^E} \to l^q$ est finiment factorisable au sens large dans E. En fait, si l'identité de E est $(q_E, 1)$-sommante, la démonstration précédente prouve que l'identité de l^{q^E} est finiment factorisable au sens large dans E. Nous ne savons pas si ce résultat est toujours vrai.(2) Ici, nous avons seulement montré que la distance de $l_n^{q^E}$ aux sous-espaces de E croît lentement avec n, c'est-à-dire que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} n} \inf\{\operatorname{Log} d(F, l_n^{q^E});\ F \subset E\} = 0.$$

On peut se poser la question suivante: soient E un espace normé et q tel que $1 < q < \infty$. Si l'identité de l^q est finiment factorisable au sens large dans E (ou plus généralement si la plus courte distance de l_n^q aux sous-espaces de E croît lentement avec n), peut-on en déduire que l^q est finiment représentable dans E?

Corollaire 1.1. *Soient E un espace de Banach de dimension infinie, et $p \in [1, 2]$. On suppose que pour toute suite (x_n) sommable dans E, on a:*

$$\sum_n n^{-1/p}\|x_n\| < \infty.$$

Dans ce cas, on aura aussi $\sum_n n^{-1/p}\|y_n\| < \infty$ pour toute suite (y_n) telle que la série $\sum y_n \varepsilon_n(t)$ converge presque sûrement (c'est-à-dire que $\sum \pm y_n$ converge pour presque tout choix de signes).

Démonstration. Notons d'abord que l'hypothèse du corollaire implique (par le théorème du graphe fermé) l'existence d'une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E:

$$\sum_{j=1}^n j^{-1/p}\|x_j\| \leqslant C\sup\Big\{\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\Big\|;\ \varepsilon_j = \pm 1\Big\}.$$

(2) Voir la remarque 2.8.

Notons ensuite que l'on a nécessairement $p' > q^E$. Sinon, dans le cas $p' \leqslant q^E$, il existe d'après le théorème (1.1) pour tout entier n un n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E tel que:

$$\forall (a_j) \in \boldsymbol{R}^n, \qquad \tfrac{1}{2}\sup|a_j| \leqslant \Big\|\sum_{j=1}^n a_j x_j\Big\| \leqslant \Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^{p'}\Big)^{1/p'}.$$

On en déduirait alors:

$$\forall (a_j) \in \boldsymbol{R}^n, \qquad \sum_{j=1}^n j^{-1/p}|a_j| \leqslant 2C\Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^{p'}\Big)^{1/p'},$$

ce qui est impossible pour n assez grand (prendre $a_j = 1$ si $p = 1$, $a_j = j^{-1/p}$ sinon).

On peut donc choisir un nombre réel q tel que $q^E < q < p'$. L'espace E est alors de cotype q, donc nous aurons $\sum \|y_n\|^q < \infty$ pour toute suite (y_n) telle que $\sum y_n \varepsilon_n(t)$ converge presque sûrement, et donc:

$$\sum_n n^{-1/p}\|y_n\| \leqslant \Big(\sum_n n^{-q'/p}\Big)^{1/q'}\Big(\sum_n \|y_n\|^q\Big)^{1/q} < \infty,$$

ce qui achève la démonstration.

Nous allons voir maintenant comment le théorème 1.1 permet de retrouver (et de compléter) les résultats de [17], chapitre VIII. Nous utiliserons les propriétés des lois stables, et nous commencerons par quelques rappels:

Nous appellerons suite stable d'ordre p, $0 < p \leqslant 2$, une suite $(f_n(t))$ de variables aléatoires réelles (en abrégé v.a.r.) indépendantes, équidistribuées suivant la loi dont l'image de Fourier est $\exp(-|t|^p)$. Pour simplifier nous pouvons toujours supposer que la suite stable $(f_n(t))$ est définie sur l'espace de probabilité $([0, 1], dt)$. Nous considèrerons la fonction d'Orlicz $\varphi_p(t)$ (croissante, mais pas nécessairement convexe) définie par:

$$\varphi_p(t) = t^p\Big(1 + \operatorname{Log}\frac{1}{t}\Big) \quad \text{si} \quad t \in]0, 1],$$

$$\varphi_p(t) = t \quad \text{si} \quad t \geqslant 1.$$

(La définition de $\varphi_p(t)$ pour $t \geqslant 1$ n'a pas grande importance, car elle ne modifie pas l'espace d'Orlicz l^{φ_p} des suites (a_n) de nombres réels telles que $\sum_n \varphi_p(|a_n|) < \infty$.)

Nous définissons une "quasi-norme" sur l^{φ_p} par:

$$\|(a_n)\|_{\varphi_p} = \inf\Big\{c > 0;\ \sum_n \varphi_p(c^{-1}|a_n|) \leqslant 1\Big\}.$$

Si (α_n) est une suite de nombres réels, $p \in]0, 2[$ et $q \in]0, \infty[$, nous adopterons la notation suivante:

$$\|(\alpha_n)\|_{p,q} = \begin{cases} \left(\sum |\alpha_n|^p\right)^{1/p} & \text{si} \quad p < q, \\ \|(\alpha_n)\|_{\varphi_p} & \text{si} \quad p = q, \\ \left(\sum |\alpha_n|^q\right)^{1/q} & \text{si} \quad p > q. \end{cases}$$

Nous admettons le résultat suivant, dont on trouve une démonstration dans [26], proposition (XXVI. 3.3):

PROPOSITION 1.1. *Soient* $p \in]0, 2[$, $q \in]0, +\infty]$ *et* $(f_n(t))$ *une suite stable d'ordre* p.

(a) *Pour tout* $r \in]0, p[$, *il existe une constante* c_p^r *telle que*:

$$\forall (\alpha_n) \in \boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}, \quad \left(\int \left|\sum \alpha_n f_n(t)\right|^r dt\right)^{1/r} = c_p^r \left(\sum |\alpha_n|^p\right)^{1/p}.$$

(b) *Pour tout* $r \in]0, p[$, *il existe deux constantes* $a_{p,q}^r$ *et* $b_{p,q}^r$ *telles que*:

$$\forall (\alpha_n) \in \boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}, \quad a_{p,q}^r \|(\alpha_n)\|_{p,q} \leqslant \left(\int \left(\sum \left|\alpha_n f_n(t)\right|^q\right)^{r/q} dt\right)^{1/r} \leqslant b_{p,q}^r \|(\alpha_n)\|_{p,q}.$$

La proposition précédente permet de démontrer directement le résultat de [18], proposition 3, sur les opérateurs (p, q)-sommants partant d'un espace $C(K)$:

PROPOSITION 1.2. *Soit* $p \in]2, +\infty[$. *On a pour tout entier* n, *et pour tout opérateur linéaire* u *de* l_n^∞ *dans un espace de Banach*:

$$\text{si } q > \sup(p, 2): \quad \pi_q(u) \leqslant C(p, q)\pi_{p,1}(u),$$
$$\text{si } 2 < q < p: \quad \pi_{p,q} \leqslant C(p, q)\pi_{p,1}(u).$$

[Plus précisément on a la majoration $C(p, q) \leqslant (a_{q',\infty}^1)^{-1} \cdot b_{q',p'}^1$.]

Démonstration. Soit u un opérateur linéaire de l_n^∞ dans un espace de Banach. On a, par définition de $\pi_{p,1}(u)$, pour toute suite finie (a^k) d'éléments de l_n^∞:

$$\left(\sum_k \|u(a^k)\|^p\right)^{1/p} \leqslant \pi_{p,1}(u) \sup\left\{\sum |\langle a^k, \beta\rangle|;\ \beta \in l_n^1,\ \|\beta\| \leqslant 1\right\}$$
$$= \pi_{p,1}(u) \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_k |a^k(i)|.$$

On obtient alors par transposition, pour toute suite (ξ_k) d'éléments de E':

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_k |{}^t u(\xi_k)(i)| \leqslant \pi_{p,1}(u) \left(\sum \|\xi_k\|^{p'}\right)^{1/p'}.$$

Soit $(f_k(t))$ une suite stable d'ordre q'; on peut écrire pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_k |{}^t u(\xi_k)(i) f_k(t)| \leqslant \pi_{p,1}(u) \left(\sum_k \|\xi_k\|^{p'} |f_k(t)|^{p'}\right)^{1/p'},$$

ce qui donne par intégration, en utilisant les deux côtés de l'inégalité de la proposition 1.1(b) (noter que $q' \in]1, 2[$)

$$a_{q',\infty}^1 \sum_{i=1}^n \left(\sum_k |{}^t u(\xi_k)(i)|^{q'}\right)^{1/q'} \leqslant \pi_{p,1}(u)\, b_{q',p'}^1 \left\|(\|\xi_k\|)\right\|_{q',p'},$$

d'où l'on déduit aisément le résultat par une nouvelle transposition, en distinguant les cas $p > q$ et $p < q$.

Remarque 1.3. La démonstration ci-dessus prouve aussi que, dans les mêmes conditions, on a:

$$\pi_{\varphi_p, p}(u) \leqslant (a_{p',\infty}^1)^{-1} b_{p',p'}^1 \pi_{p,1}(u),$$

en désignant par $\pi_{\varphi_p,p}$ la plus petite constante ϱ telle que l'on ait pour toute suite finie (α_k) d'éléments de l_n^∞:

$$\sup\left\{\sum \gamma_k \|u(\alpha_k)\|;\ \|(\gamma_k)\|_{\varphi_{p'}} \leqslant 1\right\} \leqslant \varrho \sup\left\{\left(\sum |\langle \alpha_k, \beta\rangle|^p\right)^{1/p}\ \beta \in l_n^1,\ \|\beta\| \leqslant 1\right\}$$

(à une constante près, le premier membre de l'inégalité équivaut à la norme de la suite $(\|u(\alpha_k)\|)$ dans l'espace d'Orlicz de suites associé à la fonction $t^p\left(1 + \mathrm{Log}\frac{1}{t}\right)^{-1}$ $(0 < t \leqslant 1)$).

Par ailleurs la proposition s'étend immédiatement de l_n^∞ aux espaces $\mathscr{L}^\infty$: par exemple si G est un espace $\mathscr{L}_\lambda^\infty$ ([15], définition 3.1) et u un opérateur linéaire de G dans un espace de Banach, on a pour $q > p$, $q > 2$:

$$\pi_q(u) \leqslant \lambda C(p, q)\pi_{p,1}(u).$$

Notons pour finir que dans ([18], proposition 3) le résultat de la proposition 1.2 est démontré sans la restriction $q > 2$: on peut aussi obtenir ce résultat par la méthode ci-dessus, en utilisant une suite de variables aléatoires (g_k) de la forme $(|f_k|^{1/q'})$, où (f_k) est une suite stable d'ordre 1 (variables de Cauchy).

Soit E un espace de Banach. Nous emploierons la notation $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ pour indiquer que tout opérateur linéaire continu d'un espace du type $\mathscr{L}^\infty$ dans E est q-sommant. On voit facilement que cela se produit si et seulement si $\pi_q(c_0, E) = \mathscr{L}(c_0, E)$.

Le résultat suivant est une variante d'un résultat connu (cf. Schwartz [26], Kwapień [14]).

PROPOSITION 1.3. *Soit* $q \in]2, +\infty[$. *Si l'injection* $l^q \to l^\infty$ *est finiment factorisable dans un espace de Banach* E, *on a*:

$$\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) \neq \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E).$$

Démonstration. Soit $(f_i(t))$ une suite stable d'ordre q' définie sur $[0,1]$. On déduit de la proposition 1.1(b) l'existence d'une constante C (qui dépend de q) telle que l'on ait pour tout n:

$$C^{-1}(\operatorname{Log} n)^{1/q'} \leqslant \int \Big(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|^{q'}\Big)^{1/q'} dt.$$

Pour chaque n désignons par π_n l'opérateur linéaire de $C[0,1]$ dans l_n^q défini par:

$$\pi_n(g) = (\langle g, f_i\rangle)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Désignons par j_n l'injection de l_n^q dans l_n^∞ et par u_n le composé $j_n\circ\pi_n$. Pour démontrer la proposition, il suffit de montrer que $\pi_q(u_n)$ tend vers l'infini avec n, alors que $\|\pi_n\|$ reste borné. En effet si l'injection $l^q\to l^\infty$ est finiment factorisable dans E, on peut trouver pour chaque entier n une décomposition $j_n = w_n\circ v_n$, avec $v_n\in\mathscr{L}(l_n^q, E)$, $w_n\in\mathscr{L}(E, l_n^\infty)$, $\|v_n\|, \|w_n\| \leqslant 2$. On aura alors $\lim_n \pi_q(v_n\circ\pi_n) = +\infty$, et $\sup\|v_n\circ\pi_n\| < \infty$, puisque:

$$\pi_q(u_n) \leqslant 2\pi_q(v_n\circ\pi_n), \quad \text{et} \quad \|v_n\circ\pi_n\| \leqslant 2\|\pi_n\|,$$

ce qui contredit $\pi_q(C[0,1], E) = \mathscr{L}(C[0,1], E)$ (compte tenu du théorème du graphe fermé).

Montrons que $\lim_n \pi_q(u_n) = +\infty$:

$$\begin{aligned} C^{-1}(\operatorname{Log} n)^{1/q'} &\leqslant \int \Big(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|^{q'}\Big)^{1/q'} dt \\ &= \sup\Big\{\int \sum_{i=1}^{n} n^{-1/q'} f_i(t) g_i(t)\,dt;\ g_i\in C[0,1],\ \sum |g_i(t)|^q \leqslant 1\Big\} \\ &\leqslant \sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n}|\langle f_i, g_i\rangle|^q\Big)^{1/q};\ \sum\|g_i\|^q\leqslant 1\Big\} \\ &\leqslant \sup\Big\{\Big(\sum_{i=1}^{n}\|u_n(g_i)\|^q\Big)^{1/q};\ \sum\|g_i\|^q\leqslant 1\Big\} \leqslant \pi_q(u_n). \end{aligned}$$

Par ailleurs, le fait que $\|\pi_n\|$ reste borné s'obtient par transposition à partir de la proposition 1.1(a).

Nous allons maintenant retrouver les résultats de [17], chapitre 8, corollaire 86 (a) et (b) (en fait nous énonçons des résultats équivalents, à une dualité d'idéaux d'opérateurs près: dire que $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ équivaut en effet à dire que $\pi_{q'}(E, G) = \pi_1(E, G)$ pour tout espace de Banach G ([21])).

THÉORÈME 1.2. *Soit E un espace de Banach.*

(a) *Il existe un nombre réel $q<\infty$ tel que $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ si et seulement si c_0 n'est pas finiment représentable dans E.*

(b) *Pour tout nombre $q\in]2, +\infty[$, l'injection $l^q\to l^\infty$ est finiment factorisable dans E si et seulement si $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) \neq \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$.*

(c) *Si $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ et si $q>2$, il existe $p<q$ tel que $\pi_p(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$.*

Nous démontrerons le théorème au moyen d'un énoncé auxiliaire:

PROPOSITION 1.4. *Soient E un espace de Banach et $q\in]2, \infty[$. On a $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ si et seulement si $q>q^E$.*

Démontrons tout d'abord la proposition. Si on a $q>q^E$, l'espace E est de cotype p pour $p>q^E$, et en particulier si $q>p>q^E$. A fortiori l'identité de E est $(p, 1)$-sommante, donc $\pi_{p,1}(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$, et on en déduit que $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ par la proposition 1.2. Inversement si $q\leqslant q^E$, l'injection $l^q\to l^\infty$ est finiment factorisable dans E d'après le théorème 1.1, donc $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) \neq \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ d'après la proposition 1.3.

Passons à la démonstration du théorème 1.2.

Pour montrer (a) et (b), il suffit de voir d'après la proposition précédente que l'injection $l^q\to l^\infty$ est finiment factorisable dans E si et seulement si $q\leqslant q^E$, ce qui résulte immédiatement de l'égalité $q^E = q(E)$ du théorème 1.1. (et du corollaire 0.1). Enfin le point (c) est une conséquence immédiate de la proposition 1.4.

Remarque 1.4. La proposition 1.4 implique l'égalité:

$$q^E = q_E = q(E) = \inf\{q;\ \pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)\}.$$

COROLLAIRE 1.2. *Soient p, q deux nombres réels, $\sup(2,p) < q \leqslant \infty$, (Ω, μ) un espace mesuré quelconque et E un espace de Banach.*

(a) *Si E vérifie $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$, on a aussi $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, L^p(\Omega,\mu,E)) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, L^p(\Omega,\mu,E))$.*

(b) *Si l'injection $l^q\to l^\infty$ est finiment factorisable dans $L^p(\Omega,\mu,E)$, elle est aussi finiment factorisable dans E.*

(c) *Si c_0 est finiment représentable dans $L^p(\Omega,\mu,E)$, avec $1\leqslant p<\infty$, il est aussi finiment représentable dans E.*

Démonstration. Les assertions (a) et (b) du corollaire sont équivalentes d'après le théorème 1.2 b), et le point (c) résulte de (a) et du théorème 1.2(a). Il suffit donc de montrer le point (a). D'après le lemme 1.1, on sait que $q^{L^p(E)} \leqslant \sup(q^E, p)$. Les hypothèses $\sup(2,p)<q$ et $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ impliquent $\sup(q^E, p) < q$ d'après la proposition 1.4, donc $q^{L^p(E)} < q$ et on conclut en appliquant à nouveau la proposition 1.4.

COROLLAIRE 1.3. *Soit E un espace de Banach. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *c_0 n'est pas finiment représentable dans E (c'est-à-dire que E ne contient pas de l_n^∞ uniformément au sens de* [19]).

(b) *Il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E:*

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(t) \Big\|^2 dt \leqslant C^2 \int \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i(t) \Big\|^2 dt, \tag{9}$$

où $(g_i(t))$ désigne une suite stable d'ordre 2 sur $([0, 1], dt)$ (c'est-à-dire une suite de gaussiennes indépendantes équidistribuées).

Démonstration. En utilisant le fait que $\sup_n |g_n(t)| = +\infty$ presque sûrement, il est facile de voir que la relation (9) est impossible pour n assez grand si la suite $(x_1, \ldots, x_n)$ est 2-équivalente à la base de l_n^∞:

$$\tfrac{1}{2} \sup |a_i| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\| \leqslant \sup |a_i|,$$

donc:

$$\tfrac{1}{4} \int \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |g_i(t)|^2 dt \leqslant \int \Big\| \sum x_i g_i(t) \Big\|^2 dt,$$

alors que:

$$\int \Big\| \sum_{i=1}^{n} x_i \varepsilon_i(t) \Big\|^2 dt \leqslant 1,$$

ce qui permet de voir que (b) $\Rightarrow$ (a).

Réciproquement si c_0 n'est pas finiment représentable dans E, on déduit du théorème 1.2(a) et du corollaire 1.2 l'existence d'un nombre q, $2 \leqslant q < \infty$, tel que $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, L^2(E)) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, L^2(E))$ (où $L^2(E) = L^2([0, 1], dt, E)$). On en déduit qu'il existe une constante K telle que l'on ait pour tout opérateur linéaire continu u de c_0 dans $L^2(E)$:

$$\pi_q(u) \leqslant K \|u\|.$$

Soit (x_n) une suite de vecteurs de E, dont un nombre fini de termes seulement sont non nuls. Définissons un opérateur linéaire u de c_0 dans $L^2(E)$ par:

$$u((c_n)) = \sum c_n x_n \varepsilon_n(t).$$

D'après le théorème de factorisation de Pietsch ([22], théorème 2) il existe une suite de nombres réels positifs (a_n) telle que $\sum_n a_n = 1$, et:

$$\forall c = (c_n) \in c_0, \quad \|u(c)\| \leqslant \pi_q(u) \Big(\sum_n a_n |c_n|^q \Big)^{1/q} \leqslant K \|u\| \Big(\sum_n a_n |c_n|^q \Big)^{1/q}.$$

Pour $\theta \in [0, 1]$, appliquons l'inégalité précédente à la suite $(c_n) = (g_n(\theta))$ puis intégrons après élévation au carré. On obtient:

$$\Big(\int \Big\| \sum g_n(\theta) x_n \varepsilon_n(t) \Big\|^2 dt\, d\theta \Big)^{1/2} \leqslant K \|u\| \Big[\int \Big(\sum a_n |g_n(\theta)|^q \Big)^{2/q} d\theta \Big]^{1/2}$$
$$\leqslant K \|u\| \Big(\int \sum a_n |g_n(\theta)|^q d\theta \Big)^{1/q}$$
$$\leqslant K \|u\| \, \|g_1\|_{L^q}.$$

Par ailleurs la suite $(g_n(\theta))$ est une suite symétrique de variables aléatoires (cf. paragraphe 0) ce qui implique que les suites $(g_n(\theta))$ et $(g_n(\theta)\varepsilon_n(t))$ sont isonomes. Donc:

$$\Big(\int \Big\| \sum x_n g_n(\theta) \Big\|^2 d\theta \Big)^{1/2} = \Big(\int \Big\| \sum x_n g_n(\theta) \varepsilon_n(t) \Big\|^2 dt\, d\theta \Big)^{1/2} \leqslant K \|g_1\|_q \|u\|.$$

Pour conclure il suffit de remarquer que:

$$\|u\| = \sup \Big\{ \Big(\int \Big\| \sum c_n x_n \varepsilon_n(t) \Big\|^2 dt \Big)^{1/2};\ |c_n| \leqslant 1 \Big\} = \Big(\int \Big\| \sum x_n \varepsilon_n(t) \Big\|^2 dt \Big)^{1/2}$$

d'après le principe de contraction.

Remarque 1.5. Il est clair que les assertions (a) et (b) ci-dessus sont encore équivalentes à:

(c) pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que la série $\sum \varepsilon_n(t) x^n$ converge presque sûrement, la série $\sum g_n(t) x_n$ converge elle aussi presque sûrement.

En effet, on sait que (K_2) et (K_2') restent vraies si l'on substitue à la suite de variables aléatoires (ε_n) la suite (g_n) de gaussiennes indépendantes équidistribuées. De plus, la démonstration du corollaire 1.2 prouve que (a), (b), (c) sont aussi équivalentes à:

(d) pour toute suite symétrique (φ_n) de v.a.r. [ou pour toute suite (φ_n) de v.a.r. indépendantes centrées] telle que:

$$\forall q \in]0, \infty[, \quad \sup_n \|\varphi_n\|_q < \infty,$$

E vérifie la propriété suivante: pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que la série $\sum \varepsilon_n(\cdot) x_n$ converge presque sûrement, la série $\sum \varphi_n(\cdot) x_n$ converge elle aussi presque sûrement.

Le cas "indépendantes centrées" se déduit du cas symétrique par une technique standard de symétrisation.

Dans le cas d'espaces munis d'une structure locale inconditionnelle, on peut démontrer un résultat plus précis que le théorème 1.1, et qui de plus s'applique aux opérateurs.

Théorème 1.3. *Soient E un espace de Banach muni d'une structure locale inconditionnelle, F un espace de Banach quelconque et $p \in]2, +\infty[$. Si un opérateur linéaire u est $(p, 1)$-sommant de E dans F, il est de cotype p, c'est-à-dire:*

Il existe une constante C et a dans $]0, \infty[$ tels que pour toute suite finie (x_n) d'éléments de E, on ait:

$$\Big(\sum \|u(x_n)\|^a\Big)^{1/a} \leqslant C\Big(\int \Big\|\sum x_n \varepsilon_n(t)\Big\|^a dt\Big)^{1/a}.$$

Ce théorème est démontré dans [28] (exp. 24–25, théorème 2 bis).

Remarque 1.6. Même pour un espace muni d'une base inconditionnelle, nous ne savons pas si le résultat subsiste pour $p = 2$. En particulier nous ignorons si un espace de Banach qui vérifie la propriété d'Orlicz (c'est-à-dire que (x_n) sommable $\Rightarrow \sum \|x_n\|^2 < \infty$) est de cotype 2.

Dans le cas d'espaces de Banach quelconques, nous ne savons pas non plus généraliser le théorème 1.1 aux opérateurs.

2. Le problème du type.

Définition 2.1. Soit p un nombre réel $\geqslant 1$. Nous dirons qu'un espace normé E est de *type p-Rademacher* s'il existe une constante C et un nombre réel $a \in]0, +\infty[$ tels que l'on ait pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E;

$$\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^a dt\Big)^{1/a} \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\Big)^{1/p}.$$

Remarque 2.1. Comme dans la remarque 1.1, on voit que l'on peut remplacer a par n'importe quel autre nombre réel $\beta \in]0, +\infty[$, en modifiant convenablement la constante C. De plus, d'après (K_2), pour qu'un espace E soit de type p-Rademacher, il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\sum \|x_n\|^p < \infty$ la série $\sum x_n \varepsilon_n(t)$ converge pour presque tout t. Il est clair que pour un espace de Banach "être de type p-Rademacher" est une super-propriété. On voit aussi qu'un espace E tel que $\dim E \geqslant 1$ ne peut pas être de type p pour $p > 2$. Enfin un espace normé est évidemment de type 1-Rademacher.

Définition 2.2. Soit p un nombre réel $\geqslant 1$. Nous dirons qu'un espace normé E est *d'infratype p* s'il existe une constante C telle que l'on ait pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E:

$$\inf\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\|;\ \varepsilon_i = \pm 1\Big\} \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\Big)^{1/p}.$$

Si un espace normé E est de type q-Rademacher (resp. d'infratype q), il est a fortiori de type p-Rademacher (resp. d'infratype p) pour $p \leqslant q$.

Nous noterons p^E (resp. p_E) la borne supérieure de l'ensemble des nombres réels p tels que E soit de type p-Rademacher (resp. d'infratype p). On voit immédiatement que l'on a $1 \leqslant p^E \leqslant p_E$. Notons aussi que si E est de dimension infinie, on a $p_E \leqslant 2$ d'après le lemme de Dvoretzky–Rogers.

Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème suivant:

Théorème 2.1. *Pour tout espace normé E de dimension infinie l'injection $l^1 \to l^{p^E}$ est finiment factorisable dans E. De plus $p^E = p_E$; plus précisément:*

$$p^E = p_E = p(E), \quad \text{où} \quad p(E) = \inf\{p;\ l'injection\ l^1 \to l^p\ est\ f.f.\ dans\ E\}.$$

Nous allons développer une étude analogue à celle du paragraphe 1. Soit $p \in]0, +\infty[$. Si E est un espace normé, nous noterons $\psi_p^E(n)$ la plus petite constante $\psi \geqslant 0$ telle que l'on ait pour tout n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ dans E:

$$\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^p dt\Big)^{1/p} \leqslant \psi\Big(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\Big)^{1/p}.$$

On voit immédiatement que $\psi_p^E(n)$ croît avec n, et que E est de type p-Rademacher si et seulement si la suite $\psi_p^E(n)$ est bornée.

Lemme 2.1. *Soient E un espace normé, $p \in]0, +\infty[$ et (Ω, μ) un espace mesuré (non trivial). On aura, en notant $L^p(E) = L^p(\Omega, \mu, E)$:*

$$\psi_p^E(n) = \psi_p^{L^p(E)}(n).$$

Plus généralement, lorsque $q \in [p, +\infty[$, l'espace $L^q(\Omega, \mu, E)$ est de type p-Rademacher si et seulement si E est de type p-Rademacher.

La démonstration est identique à celle du lemme 1.1. On démontre aussi l'analogue du lemme 1.2:

Lemme 2.2. *Soient E un espace normé et $q \in]0, +\infty[$. On a:*

$$\forall n, k \in \mathbf{N}, \quad \psi_q^E(nk) \leqslant \psi_q^E(n)\psi_q^E(k).$$

Lemme 2.3. *Soient E un espace normé, $q \in]0, +\infty[$ et N un entier > 1. Définissons p par l'égalité:*

$$\psi_q^E(N) = N^{1/p - 1/q} \quad (p \leqslant q).$$

L'espace E est alors de type p_1-Rademacher pour tout $p_1 < p$.

Démonstration. D'après le lemme 2.2, on a pour tout entier k: $\psi_q^E(N^k) \leqslant N^{k(1/p-1/q)}$. Posons $C = N^{(1/p-1/q)}$. Soit n un entier, supposons que $N^k \leqslant n < N^{k+1}$, on a:

$$\psi_q^E(n) \leqslant \psi_q^E(N^{k+1}) \leqslant N^{(k+1)(1/p-1/q)} \leqslant C n^{1/p-1/q}.$$

Par conséquent, pour toute partie finie A de $\mathbf{N}$, on a — en notant $|A|$ le cardinal de A —

$$\Big(\int \Big\|\sum_{n\in A} x_n \varepsilon_n(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant C|A|^{1/p}\left(\frac{\sum_{n\in A}\|x_n\|^q}{|A|}\right)^{1/q} \leqslant C|A|^{1/p}\sup_{n\in A}\|x_n\|.$$

Si l'on se reporte à la définition de σ_p, on en déduit aisément que pour toute suite finie (x_n) dans E on a:

$$\Big(\int \Big\|\sum x_n \varepsilon_n(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant C\sigma_p\big((\|x_n\|)_n\big);$$

donc si $p_1 < p$, on a d'après (2′):

$$\Big(\int \Big\|\sum x_n \varepsilon_n(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant C\Big(\frac{p_1'}{p_1'-p'}\Big)^{1/p_1'}\Big(\sum \|x_n\|^{p_1}\Big)^{1/p_1},$$

ce qui démontre le lemme.

Démonstration du théorème 2.1.

(a) Si $p^E = 2$, on a $2 = p^E \leqslant p_E \leqslant 2$, donc $p^E = p_E$ et l'injection $l^1 \to l^2$ est finiment factorisable dans E d'après le lemme de Dvoretzky–Rogers.

(b) Supposons maintenant $p^E < 2$, et soit q tel que:

$$p^E < q < 2.$$

On déduit du lemme 2.3 que:

$$\forall n \in \boldsymbol{N}, \quad \psi_q^E(n) \geqslant n^{1/p^E - 1/q}.$$

Posons en effet, pour n fixé: $\psi_q^E(n) = n^{1/p-1/q}$. Le lemme 2.3 implique que $p \leqslant p^E$, d'où le résultat.

D'après le lemme 1.4, on peut trouver un sous-ensemble infini $\boldsymbol{N}_1 \subset \boldsymbol{N}$ et une suite de réels $\varepsilon_n \in]0, 1[$ tels que:

$$\forall n \in \boldsymbol{N}_1, \quad n\Big((1-\varepsilon_n)\frac{\psi_q^E(n)}{\psi_q^E(n-1)} - 1\Big) \geqslant \tfrac{1}{2}(1/p^E - 1/q)$$

ce qui implique (puisque $\psi_q^E(n) \leqslant \psi_q^E(2)\psi_q^E(n-1)$ pour $n > 1$):

$$(11) \qquad \frac{1}{n}\psi_q^E(n)\,[(1-\varepsilon_n)\psi_q^E(n) - \psi_q^E(n-1)]^{-1} \leqslant \frac{2qp^E\psi_q^E(2)}{q-p^E} = C.$$

Soit n dans $\boldsymbol{N}_1$, d'après la définition de $\psi_q^E(n)$ il existe $(x_1, \ldots, x_n)$ dans E tels que:

$$\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q = n$$

et

$$\Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t)x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \geqslant (1-\varepsilon_n)\psi_q^E(n)\,n^{1/q}.$$

Soit (a_i) dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$, on a

$$(1-\varepsilon_n)\psi_q^E(n)\,n^{1/q} \leqslant \Big(\int\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t)x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant \Big(\int\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t)|a_i|x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q} + \Big(\int\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t)(1-|a_i|)x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant \Big(\int\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i(t)\,a_i x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q} + \sup_{\substack{(t_i)\in \boldsymbol{R}_+^n\\ \Sigma t_i = 1}} \Big(\int\Big\|\sum (1-t_i)\,\varepsilon_i(t)\,x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$

mais la fonction $(t_i) \to \big(\int\|\sum(1-t_i)\varepsilon_i(t)x_i\|^q dt\big)^{1/q}$ est une fonction convexe continue sur l'ensemble convexe $\{(t_i)\in \boldsymbol{R}_+^n \mid \sum t_i = 1\}$, par conséquent elle atteint son maximum sur un point extrémal de cet ensemble, c'est-à-dire un point dont toutes les composantes sont égales à 0 sauf une égale à 1. On a donc

$$(1-\varepsilon_n)\psi_q^E(n)\,n^{1/q} \leqslant \Big(\int\Big\|\sum a_i\varepsilon_i(t)x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q} + \sup_{1\leqslant j\leqslant n}\Big(\int\Big\|\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n \varepsilon_i(t)x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q}$$

$$\leqslant \Big(\int\Big\|\sum a_i\varepsilon_i(t)x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q} + \psi_q^E(n-1)\,n^{1/q};$$

donc par homogénéité, $\forall (a_i) \in \boldsymbol{R}^n$:

$$(12) \quad \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|\Big)[\psi_q^E(n) - \psi_q^E(n-1) - \varepsilon_n\psi_q^E(n)]\,n^{1/q} \leqslant \Big(\int\Big\|\sum_{i=1}^n a_i\varepsilon_i(t)x_i\Big\|^q dt\Big)^{1/q}.$$

Désignons par $\mathscr{R}_n$ le sous-espace de $L^q(E)$ engendré par les éléments $x_i\varepsilon_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$. On peut définir un opérateur linéaire u_n de $\mathscr{R}_n$ dans l_n^1 par:

$$u_n\Big(\sum_{i=1}^n a_i x_i \varepsilon_i(t)\Big) = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}.$$

Soit $(y_1, \ldots, y_n)$ un n-uple dans $\mathscr{R}_n$. On a:

$$\sum_{i=1}^n \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |u_n(y_k)(i)|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n \int\Big|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k(\theta)\,u_n(y_k)(i)\Big|\,d\theta$$

$$\leqslant \Big(\int\Big\|\sum_{k=1}^n \varepsilon_k(\theta)\,u_n(y_k)\Big\|_{l^1}^q d\theta\Big)^{1/q} \leqslant \|u_n\|\Big(\int\Big\|\sum_{k=1}^n y_k\varepsilon_k(\theta)\Big\|_{\mathscr{R}_n}^q d\theta\Big)^{1/q}.$$

On en déduit puisque $\psi_q^{L^q(E)}(n) = \psi_q^E(n)$ (lemme 2.1):

$$\sum_{i=1}^n \sup_{1\leqslant k\leqslant n} |u_n(y_k)(i)| \leqslant \psi_q^E(n)\,\|u_n\| \Big(\sum_{k=1}^n \|y_k\|^q\Big)^{1/q}.$$

On peut donc appliquer le lemme 0.1: il existe une partie $A_n \subset \{1, \ldots, n\}$, telle que Card $A_n \geqslant n/2$, et que l'on ait pour toute suite (a_i) à support dans A_n (c'est-à-dire que $a_i = 0$ si $i \notin A_n$):

$$\lambda_q\big((a_i)\big) \leqslant 2^{1/q} n^{-1/q'} \psi_q^E(n)\,\|u_n\| \Big(\int \Big\|\sum a_i x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q}.$$

Si l'on pose d'autre part $B_n = \{i;\ \|x_i\| \leqslant 4^{1/q}\}$, on aura (puisque $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q = n$) Card $B_n \geqslant 3n/4$ et Card$(A_n \cap B_n) \geqslant n/4$. La relation (12) peut encore se traduire lorsque $n \in \boldsymbol{N}_1$ par:

$$\|u_n\| \leqslant n^{-1/q}[(1-\varepsilon_n)\psi_q^E(n) - \psi_q^E(n-1)]^{-1}.$$

En conjuguant la relation (11) aux inégalités précédentes, on obtient pour tout $n \in \boldsymbol{N}_1$, et pour toute suite $(a_i)_{i=1,\ldots,n}$ à support dans $A_n \cap B_n$:

$$\lambda_q\big((a_i)\big) \leqslant 2^{1/q} C \Big(\int \Big\|\sum_{i\in A_n\cap B_n} a_i x_i \varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q},$$

et

$$\mathrm{Card}(A_n \cap B_n) \geqslant n/4; \qquad i \in A_n \cap B_n \Rightarrow \|x_i\| \leqslant 4^{1/q}.$$

On peut en fait trouver un sous-ensemble infini $\boldsymbol{N}_2 \subset \boldsymbol{N}$ et une constante $\delta > 0$, tels que pour tout $n \in \boldsymbol{N}_2$, il existe un n-uple $(x_1^n, \ldots, x_n^n)$ dans E vérifiant:

$$\forall (a_i) \in \boldsymbol{R}^n, \qquad \delta \cdot \lambda_q\big((a_i)\big) \leqslant \Big(\int \Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i^n \varepsilon_i(t)\Big\|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\boldsymbol{N}_2$. Nous définirons une semi-norme sur $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$ par la formule:

$$\Big\{\sum a_i e_i\Big\} = \lim_{\mathfrak{U}} \Big\|\sum_{i=1}^n a_i x_i^n\Big\|$$

(où l'on a noté (e_i) la base canonique de $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$).

On vérifie facilement que:

$$(13) \qquad \forall (a_i) \in \boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}, \qquad \delta \cdot \lambda_q\big((a_i)\big) \leqslant \Big(\int \Big\{\sum a_i e_i \varepsilon_i(t)\Big\}^q dt\Big)^{1/q} \leqslant \sum |a_i|.$$

Remplaçons $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$ par l'espace normé X obtenu en passant au quotient par le noyau de la semi-norme. Notons $\bar{e}_i$ l'image de e_i dans X, et notons encore $\{\sum a_i \bar{e}_i\}$ la norme d'un élément de X. On a évidemment: $\{\sum a_i \bar{e}\}_i = \{\sum a_i e_i\}$, ce qui montre que la relation (13) est valable dans X. Nous allons appliquer le procédé d'extraction de Brunel–Sucheston à la suite bornée $\bar{e}_i$ dans X. D'après [2], il existe une suite $(\bar{e}_n')$ extraite de $(\bar{e}_n)$ telle que:

$$\Big|\sum_{i=1}^n a_i e_i\Big| = \lim_{\substack{i_1<i_2<\ldots<i_n\\ i_1\to\infty}} \Big\{\sum_{k=1}^n a_k \bar{e}_{i_k}'\Big\}$$

existe, et définit une semi-norme sur $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$. Toujours d'après [2], cette semi-norme est une norme si et seulement si la suite $(\bar{e}_n')$ n'a pas de sous-suite de Cauchy, ce qui est le cas ici. Soit en effet A une partie de $\boldsymbol{N}$ formée de k_0 éléments, avec $k_0 > 1$, $\delta k_0^{1/q} - k_0^{1/2} \geqslant 1$. On a:

$$\begin{aligned}\delta k_0^{1/q} &\leqslant \Big(\int \Big\{\sum_{n\in A} \bar{e}_n \varepsilon_n(t)\Big\}^q dt\Big)^{1/q}\\ &\leqslant \Big(\int \Big\{\bar{e}_{n_0} \sum_{n\in A} \varepsilon_n(t)\Big\}^q dt\Big)^{1/q} + \Big(\int \Big\{\sum_{n\in A} (\bar{e}_n - \bar{e}_{n_0})\varepsilon_n(t)\Big\}^q dt\Big)^{1/q}\\ &\leqslant k_0^{1/2} + k_0 \sup_{i,j\in A} \{\bar{e}_i - \bar{e}_j\},\end{aligned}$$

ce qui montre que $\sup_{i,j\in A} \{\bar{e}_i - \bar{e}_j\} \geqslant 1/k_0$, et par conséquent la suite $(\bar{e}_n)$ ne peut pas avoir de sous-suite de Cauchy.

On a donc obtenu un nouvel espace normé Y (à savoir $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$ muni de $|\sum a_i e_i|$), finiment représentable dans X d'après [2]. On peut voir aussi que X est finiment représentable dans E, donc Y est finiment représentable dans E.

La norme sur Y possède la propriété importante suivante:

$$\text{IS:} \left\{\begin{array}{l}\text{Pour toute suite croissante d'entiers } k_1 < k_2 < \ldots, \text{ on a}\\ \forall (a_n) \in \boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}, \qquad \big|\sum a_n e_n\big| = \big|\sum a_n e_{k_n}\big|.\end{array}\right\}.$$

On déduit aisément de (13) que:

$$(14) \qquad \forall (a_n) \in \boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}, \qquad \delta \cdot \lambda_q\big((a_n)\big) \leqslant \Big(\int \Big|\sum a_n e_n \varepsilon_n(t)\Big|^q dt\Big)^{1/q} \leqslant \sum |a_n|.$$

Nous admettons momentanément le lemme suivant, qui nous permettra de conclure:

LEMME 2.4. *Soient $\delta > 0$, $q \in [1, 2[$ et Y l'espace $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$ muni d'une norme* IS$(a_i) \to |\sum a_i e_i|$ *telle que l'on ait:*

$$(15) \qquad \forall n \in \boldsymbol{N}, \qquad \Big(\int \Big|\sum_{i=1}^n e_i \varepsilon_i(t)\Big|^q dt\Big)^{1/q} \geqslant \delta n^{1/q}.$$

Dans ce cas l'injection $l^1 \to l^q$ est finiment factorisable dans Y.

Achevons la démonstration du théorème 2.1: puisque Y est finiment représentable dans E et vérifie (15), on déduit du lemme 2.4 que l'injection $l^1 \to l^q$ est finiment factorisable dans E. Mais nous pouvons faire cela pour tout $q > p^E$, ce qui prouve que l'injection $l^1 \to l^{p^E}$ elle-même est finiment factorisable dans E, d'après le corollaire 0.1. On en déduit trivialement que $p^E \geqslant p(E)$, ce qui achève la démonstration, compte-tenu des inégalités évidentes $p^E \leqslant p_E \leqslant p(E)$.

Démonstration du lemme 2.4. Soit (f_n) une suite de variables aléatoires équidistribuées suivant la loi gaussienne normale sur $\boldsymbol{R}$.

(a) Nous allons montrer dans une première étape que:

$$\limsup_{n\to\infty} n^{-1/q} \int \Big| \sum_{k=1}^{n} (e_{2k}-e_{2k-1}) f_k(t) \Big| \, dt > 0. \tag{16}$$

Notons tout d'abord que l'on a par convexité de la norme:

$$\Big(\int \Big| \sum_{i=1}^{n} e_i \varepsilon_i(s) \int |f_i(t)|\, dt \Big|^q ds \Big)^{1/q} \leqslant \Big(\int \Big| \sum_{i=1}^{n} e_i \varepsilon_i(s) |f_i(t)| \Big|^q ds\, dt \Big)^{1/q}.$$

On constate par ailleurs que la suite $(\varepsilon_i(s)|f_i(t)|)$ a la même loi que la suite $(f_i(t))$ (cf. par exemple, [28] exp. III, lemme 1) et on obtient finalement, compte-tenu de (15):

$$\delta n^{1/q} \leqslant \Big(\int \Big| \sum_{i=1}^{n} e_i \varepsilon_i(t) \Big|^q dt \Big)^{1/q} \leqslant \Big(\int |f_1(t)|\, dt \Big)^{-1} \Big(\int \Big| \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(t) \Big|^q dt \Big)^{1/q}. \tag{17}$$

Posons:

$$a_n = \Big(\int \Big| \sum_{i=1}^{n} e_i f_i(t) \Big|^q dt \Big)^{1/q}, \qquad u_k = e_{2k} - e_{2k-1},$$

et

$$b_n = \Big(\int \Big| \sum_{k=1}^{n} u_k f_k(t) \Big|^q dt \Big)^{1/q}.$$

Nous aurons:

$$b_n = \Big(\int \Big| \sum_{k=1}^{n} u_k f_{2k-1}(t) \Big|^q dt \Big)^{1/q}$$

$$\geqslant \Big(\int \Big| \sum_{k=1}^{2n} e_k f_k(t) \Big|^q dt \Big)^{1/q} - \Big(\int \Big| \sum_{k=1}^{n} e_{2k} \big(f_{2k}(t) + f_{2k-1}(t)\big) \Big|^q dt \Big)^{1/q}.$$

La suite $(f_{2k} + f_{2k-1})$ est une suite de gaussiennes indépendantes, de paramètre $\sqrt{2}$. On obtient alors en utilisant la propriété "IS":

$$b_n \geqslant a_{2n} - \sqrt{2} \Big(\int \Big| \sum_{k=1}^{n} e_{2k} f_k(t) \Big|^q dt \Big)^{1/q} = a_{2n} - \sqrt{2}\, a_n.$$

Nous devons montrer que $\limsup\limits_{n\to\infty} n^{-1/q} b_n > 0$. Il suffit pour cela que $\limsup\limits_{n\to\infty} n^{-1/q}(a_{2n} - \sqrt{2}\, a_n) > 0$, soit encore en posant $a_n = n^{1/q} \alpha_n$:

$$\limsup_{n\to\infty} (2^{1/q} \alpha_{2n} - \sqrt{2}\, \alpha_n) > 0.$$

On remarque que $\sqrt{2} < 2^{1/q}$, et que $\liminf \alpha_n > 0$ d'après (17). Il suffit pour conclure d'utiliser le lemme élémentaire suivant:

Soient b, c, tels que: $0 \leqslant b \leqslant c$, et (v_n) une suite de nombres réels. On a alors $\limsup\limits_{n\to\infty} (c v_{2n} - b v_n) \geqslant (c-b) \liminf\limits_{n\to\infty} v_n$.

Dans une deuxième étape, nous allons montrer que la relation (16) implique que l'injection $l^1 \to l^q$ est finiment factorisable dans Y.

(b) On sait d'après [3] que la suite $u_k = e_{2k} - e_{2k-1}$ est inconditionnelle de constante $\leqslant 2$. Désignons par F le sous-espace vectoriel de Y engendré par la suite (u_k), et par F^* le dual de F. Considérons dans F^* la suite (u_k^*) définie par:

$$u_k^*\Big(\sum a_i u_i \Big) = a_k.$$

On a pour chaque k: $\|u_k^*\| \leqslant 2$, et on vérifie facilement que (u_k^*) est encore une suite inconditionnelle de constante $\leqslant 2$.

Montrons que l'injection $l^{q'} \to l^\infty$ est finiment factorisable dans F^*. Si ce n'est pas le cas, il existe d'après le théorème (1.1) un nombre réel $r > q$ tel que F^* soit de cotype r'. Il existera une constante K, telle que:

$$\forall (a_n) \in \boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}, \qquad \Big(\sum |a_n|^{r'} \Big)^{1/r'} \leqslant K \int \Big\| \sum a_n u_n^* \varepsilon_n(t) \Big\| \, dt \leqslant 2K \Big\| \sum a_n u_n^* \Big\|.$$

On en déduit facilement par transposition:

$$\forall (a_n) \in \boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}, \qquad \Big| \sum a_n u_n \Big| \leqslant 2K \Big(\sum |a_n|^r \Big)^{1/r}.$$

(On utilise le fait que la suite (u_k) est basique monotone, cf. [3].)

On aura donc:

$$\Big(\int \Big| \sum_{k=1}^{n} u_k f_k(t) \Big|^q dt \Big)^{1/q} \leqslant 2K \Big(\int \Big(\sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^r \Big)^{q/r} dt \Big)^{1/q}$$

$$\leqslant 2K \Big(\int \sum_{k=1}^{n} |f_k(t)|^r dt \Big)^{1/r} \leqslant 2K \Big(\int |f_1(t)|^r dt \Big)^{1/r} n^{1/r},$$

ce qui contredit la relation (16).

Il existe donc pour chaque entier n et pour tout $\varepsilon > 0$ un n-uple $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ d'éléments de F^* tel que:

$$\forall (a_i) \in \boldsymbol{R}^n, \qquad (1-\varepsilon) \sup |a_i| \leqslant \Big\| \sum a_i \xi_i \Big\| \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^{q'} \Big)^{1/q'}.$$

Le sous-espace de dimension finie de F^* engendré par $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est le dual d'un quotient G de dimension finie de F. Par transposition, il existe un n-uple $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ d'éléments de G, tels que:

$$\forall (a_i) \in \mathbf{R}^n, \quad \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big\| \sum a_i \bar{x}_i \Big\|_G \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Choisissons pour chaque i un relèvement x_i de $\bar{x}_i$, tel que $|x_i| \leqslant (1+\varepsilon) \times \times \|\bar{x}_i\|_G$. On constate alors facilement que:

$$\forall (a_i) \in \mathbf{R}^n, \quad \Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big| \sum a_i x_i \Big| \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \sum_{i=1}^n |a_i|,$$

ce qui montre que l'injection $l^1 \to l^q$ est finiment factorisable dans F, donc dans Y, et achève la démonstration du lemme (2.4).

Remarque 2.2. En fait, un examen de la 1-ère partie de la démonstration du théorème 2.1 montre que l'étape finale (b) aurait pu être remplacée par le résultat suivant:

THÉORÈME 2.2. *Soit E un espace de Banach ayant une base inconditionnelle (ξ_n). Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall \delta \in]0, 1[$, *il existe n blocs disjoints $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sur la base (ξ_n) tels que*:

$$\forall (a_i) \in \mathbf{R}^n, \quad (1-\delta)\Big(\sum |a_i|^q\Big)^{1/q} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n a_i b_i \Big\| \leqslant \sum |a_i|.$$

(ii) *Il n'existe pas de $\varepsilon > 0$ tel que, pour une constante C on ait $\|\sum b_n\| \leqslant C(\sum \|b_n\|^{q+\varepsilon})^{1/q+\varepsilon}$ pour toute suite finie (b_n) de blocs disjoints sur la base (ξ_n).*

(i) signifie en quelque sorte que l'injection $l^1 \to l^q$ est "f.f. diagonalement" dans E. Ce résultat se démontre d'une manière tout à fait analogue à ce qui précède. Nous donnons le schéma de la démonstration: soit $r > q$, on note α_n la plus petite constante $\alpha \geqslant 0$ telle que l'on ait

$$\Big\| \sum_{i=1}^n b_i \Big\| \leqslant \alpha \Big(\sum \|b_i\|^r\Big)^{1/r}$$

pour tout système $(b_1, \ldots, b_n)$ de n-blocs disjoints sur la base (ξ_n). On vérifie aisément que: $\forall n, k \in \mathbf{N}$, $\alpha_{nk} \leqslant \alpha_n \alpha_k$ et que s'il existe $N > 1$ tel que $\alpha_N < N^{1/q-1/r}$ alors (ii) est faux. Donc (ii) entraîne $\alpha_n \geqslant n^{1/q-1/r}$ pour tout n. Une construction analogue à ce qui précède permet alors d'obtenir: $\exists \delta \in]0, 1[$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exists b_1, \ldots, b_n$ tels que:

$$\forall (a_i) \in \mathbf{R}^n, \quad (1-\delta)\Big(\sum_{i=1}^n |a_i|^r\Big)^{1/r} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n a_i b_i \Big\| \leqslant \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

Un argument analogue à celui de la proposition 0.1 montre alors que (i) est vérifié.

L'implication réciproque (i) $\Rightarrow$ (ii) est évidente.

Nous allons développer quelques conséquences du théorème 2.1.

DÉFINITION 2.3. Soit $p \in]0, 2]$. Un espace normé E est dit de *type p-stable* s'il existe un nombre réel $r \in]0, p[$ et une constante C tels que l'on ait pour toute suite finie $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E:

$$\Big(\int \Big\| \sum f_j(t) x_j \Big\|^r dt\Big)^{1/r} \leqslant C\Big(\sum \|x_j\|^p\Big)^{1/p},$$

où $(f_j(t))$ est une suite stable d'ordre p (paragraphe 1). Comme dans le cas du type de Rademacher, la propriété ne dépend pas de la valeur de r choisie dans $]0, p[$ (ou dans $]0, \infty[$ si $p = 2$): cela résulte du théorème de Shepp–Landau pour $p = 2$, et d'un théorème de Hoffmann-Jørgensen [9] pour $p < 2$. En fait, pour qu'un espace soit de type p-stable il faut et il suffit que pour toute suite (x_n) telle que $\sum \|x_n\|^p < \infty$, la série $\sum x_n f_n(t)$ converge pour presque tout t. Enfin il est clair qu'"être de type p-stable" est une super-propriété.

Les liens entre type p-stable et type p-Rademacher sont assez étroits, comme l'indique la proposition suivante, que nous admettrons (cf. [28], exposé III, corollaire 1 et proposition 3):

PROPOSITION 2.1. *Soient p, q tels que $0 < p < q \leqslant 2$.*

(i) *Un espace normé de type q-stable est aussi de type q-Rademacher.*

(ii) *Un espace normé de type q-Rademacher est de type p-stable.*

Remarque 2.3. Pour $q = 2$, on peut préciser que les notions de type 2-stable ou 2-Rademacher sont équivalentes: en effet si E est de type 2-Rademacher, c_0 n'est pas finiment représentable dans E, et il suffit d'appliquer le corollaire 1.3.

Nous ferons une étude analogue à celle du paragraphe 1, la propriété de type p-stable étant d'une certaine façon la propriété duale de la propriété $\pi_q(\mathscr{L}^\infty, E) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E)$ (cette dualité est précisée par le corollaire 2.3). Nous avons tout d'abord:

PROPOSITION 2.2. *Soit $p \in]0, 2[$. Un espace normé E est de type p-stable si et seulement si $p < p^E$.*

Démonstration. Il résulte de la proposition précédente que E est de type p-stable dès que $p < p^E$. Inversement, si $p \geqslant p^E$, nous allons voir que E n'est pas de type p-stable. D'après le théorème 2.1, l'injection $l^1 \to l^p$ est finiment factorisable dans E. On peut donc trouver pour tout entier n une suite d'éléments $(x_1, \ldots, x_n)$ dans E telle que:

$$\forall (a_i) \in \mathbf{R}^n, \quad \Big(\sum |a_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\| \sum a_i x_i \Big\| \leqslant 2 \sum |a_i|.$$

Soit $(f_i(t))$ une suite stable d'ordre p. D'après la proposition 1.1.b, il existe une constante C (qui dépend de p, mais est indépendante de l'entier n) telle que

$$C^{-1}(\operatorname{Log} n)^{1/p} \leqslant \int \Big(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|^p\Big)^{1/p} dt \leqslant \int \Big\| n^{-1/p}\sum_{i=1}^{n} f_i(t)x_i\Big\| dt$$

alors que $\big(\sum_{i=1}^{n}\|n^{-1/p}x_i\|^p\big)^{1/p} \leqslant 2$, ce qui montre que E ne peut être de type p-stable.

COROLLAIRE 2.1. *Soit $p \in]0, 2[$.*

(a) *Un espace de Banach E est de type p-stable si et seulement si l'injection $l^1 \to l^p$ n'est pas finiment factorisable dans E.*

(b) *Si un espace de Banach E est de type p-stable, il existe $q > p$ tel que E soit aussi de type q-stable.*

Démonstration. Le point (b) résulte immédiatement de la proposition 2.2. En utilisant cette même proposition, on voit que (a) revient à dire que l'injection $l^1 \to l^p$ est finiment factorisable dans E si et seulement si $p \geqslant p^E$, ce qui résulte du théorème 2.1 et du corollaire 0.1.

Remarque 2.4. Le corollaire 2.1 est évidemment faux pour $p = 2$, puisque l'injection $l^1 \to l^2$ est finiment factorisable dans tout espace de Banach(³). Le corollaire 2.1(b) généralise d'une certaine manière les résultats de Rosenthal ([25], théorème 8) sur les sous-espaces de L^p, $1 \leqslant p < 2$, dans la mesure où un sous-espace R de L^p est de type p-stable si et seulement si il ne contient pas l^p (cela résulte de Kadec–Pełczyński [11], voir aussi [27]), et où R est de type q-stable pour un $q > p$ si et seulement si il peut se plonger dans L^r pour un $r > p$, d'après le théorème 8 de [25].

COROLLAIRE 2.2. *Soient p, q deux nombres réels tels que $1 \leqslant p < 2$, $p < q < \infty$, (Ω, μ) un espace mesuré quelconque et E un espace de Banach. Si l'injection $l^1 \to l^p$ est finiment factorisable dans $L^q(\Omega, \mu, E)$, elle est aussi finiment factorisable dans E.*

Démonstration. D'après le corollaire 2.1(a), il suffit de montrer que si E est de type p-stable, il en est de même de $L^q(\Omega, \mu, E)$. Cela résulte immédiatement de la proposition 2.2 et du fait que

$$p^E = p^{L^q(E)} \quad \text{si} \quad q \in [p, \infty[\quad (\text{lemme } 2.1).$$

Le corollaire suivant répond à une question posée dans [17] (no 121):

COROLLAIRE 2.3. *Soit $p \in [1, 2[$. Un espace de Banach E est de type p-stable si et seulement si il existe une constante C telle que l'on ait pour tout quotient E'/N de E', et pour tout opérateur linéaire u de E'/N dans un espace de Banach:*

$$\pi_{1/2}(u) \leqslant C\pi_p(u).$$

(Le choix de 1/2 est arbitraire. On pourrait aussi bien écrire $\pi_r(u) \leqslant C(r)\pi_p(u)$ pour tout $r \in]0, 1[$, d'après les résultats de [4] ou [27], exposé X–XI.)

La démonstration utilisera le lemme suivant (ce lemme est connu, cf. L. Schwartz [26] ou S. Kwapień [14]):

LEMME 2.5. *Soit $p \in [1, 2[$, et $r < p$. Désignons par w_n l'opérateur de $l_n^{p'}$ dans l_n^p défini par $w_n((\alpha_i)) = (n^{-1/p}\alpha_i)$. On a $\pi_r(w_n) \geqslant K^{-1}(\operatorname{Log} n)^{1/p}$, où K dépend de p et de r, mais est indépendante de n.*

Démonstration. D'après le théorème de Pietsch, il existe une probabilité μ sur la boule unité de l_n^p, telle que:

$$\forall \alpha = (\alpha_i) \in l_n^{p'}, \quad \Big(n^{-1}\sum|\alpha_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \pi_r(w_n)\Big(\int |\langle\alpha, \beta\rangle|^r d\mu(\beta)\Big)^{1/r}.$$

Soit $(f_i(t))$ une suite stable d'ordre p. En appliquant cette inégalité à $\alpha_i = f_i(t)$ et en intégrant, on obtient:

$$\Big(\int \Big(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}|f_i(t)|^p\Big)^{r/p} dt\Big)^{1/r} \leqslant \pi_r(w_n)\Big(\int\Big|\sum \beta_i f_i(t)\Big|^r dt\, d\mu(\beta)\Big)^{1/r}.$$

En utilisant la proposition 1.1 (a) et (b), on trouve

$$\begin{aligned} C^{-1}(\operatorname{Log} n)^{1/p} &\leqslant \pi_r(w_n)\Big(\int\Big|\sum \beta_i f_i(t)\Big|^r dt\, d\mu(\beta)\Big)^{1/r} \\ &= c_p^r \pi_r(w_n)\Big(\int\Big(\sum|\beta_i|^p\Big)^{r/p} d\mu(\beta)\Big)^{1/r} \leqslant c_p^r \pi_r(w_n), \end{aligned}$$

ce qui démontre le lemme.

Démontrons maintenant le corollaire 2.2. Si E n'est pas de type p-stable, on a $p \geqslant p^E$ d'après la proposition 2.2. Il existe donc pour tout entier n un n-uple $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E tel que:

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbf{R}^n, \quad \Big(\sum|\alpha_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\Big\| \leqslant 2\sum|\alpha_i|.$$

Posons $N = \{\xi \in E';\ \langle x_i, \xi\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n\}$. Dans l'espace $F = E'/N$ (F est le dual de $[x_1, \ldots, x_n]$) on peut trouver un n-uple $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ tel que:

$$\forall (\alpha_i) \in \mathbf{R}^n, \quad \tfrac{1}{2}\sup|\alpha_i| \leqslant \Big\|\sum \alpha_i\xi_i\Big\| \leqslant \Big(\sum|\alpha_i|^{p'}\Big)^{1/p'}.$$

Cela revient à dire que l'on peut trouver deux opérateurs u_n et v_n, de $l_n^{p'}$ dans F et de F dans l_n^∞, tels que $\|u_n\| \leqslant 1$, $\|v_n\| \leqslant 2$, et que $v_n \circ u_n$ soit l'injection de $l_n^{p'}$ dans l_n^∞. Soit par ailleurs $\tilde{w}_n$ l'opérateur de l_n^∞ dans l_n^p

(³) de dimension infinie.

défini par $\tilde{w}_n((a_i)) = (n^{-1/p} a_i)$. On a, avec la notation du lemme 2.5:

$$w_n = \tilde{w}_n \circ v_n \circ u_n; \qquad \pi_p(\tilde{w}_n) \leqslant 1.$$

Considérons l'opérateur $v = \tilde{w}_n \circ v_n$ de F dans l_n^p. On a d'après le lemme 2.5:

$$K^{-1}(\operatorname{Log} n)^{1/p} \leqslant \pi_{1/2}(w_n) \leqslant \pi_{1/2}(v)\,\|u_n\| \leqslant \pi_{1/2}(v),$$

alors que $\pi_p(v) \leqslant \|v_n\| \leqslant 2$. On ne peut donc avoir, lorsque n est assez grand, l'inégalité $\pi_{1/2}(u) \leqslant C\pi_p(u)$ pour tout opérateur linéaire u partant d'un quotient de E'.

La partie inverse du raisonnement utilise les résultats de [17]: Si le dual F' d'un espace de Banach est de type p-stable, on a $\pi_{1/2}(u) \leqslant C\pi_p(u)$ pour tout opérateur linéaire u partant de F, où la constante C ne dépend que de la "constante de type" de F'. Si E est de type p-stable, il en est de même pour E'' (car E'' f.r. E, cf. paragraphe 0), donc tous les sous-espace de E'' sont de type p-stable avec des constantes de type majorées. Il suffit pour conclure de se rappeler qu'un quotient E'/N admet pour dual un sous-espace de E''.

Remarque 2.5. Si on suppose que pour tout quotient E'/N de E', tout opérateur linéaire u p-sommant de E'/N dans un espace normé quelconque est en fait $\frac{1}{2}$-sommant, il existe une constante C telle que l'on ait $\pi_{1/2}(u) \leqslant C\pi_p(u)$ pour tout u et tout quotient E'/N. Plus précisément, cela implique directement que E est de type p-stable. Indiquons l'idée, pour $p = 1$ pour simplifier. On utilise le lemme suivant (indiqué par A. Pełczyński): si E est un espace de Banach, X un sous-espace de dimension finie de E et $\varepsilon > 0$, on peut trouver un sous-espace Y de codimension finie de E, contenant X et tel que X soit $(1+\varepsilon)$-complémenté dans Y. Si E n'est pas de type 1-stable, l^1 est finiment représentable dans E. On peut alors construire par récurrence une suite croissante (F_n) de sous-espaces de dimension finie de E et une suite décroissante (Y_n) de sous-espaces de codimension finie de E telles que:

(a) $F_n \subset Y_n$, et F_n est 2-complémenté dans Y_n,

(b) F_n contient un sous-espace 2-isomorphe à l_n^1 et 3-complémenté dans F_n.

Le sous-espace $Y = \bigcap_n Y_n$ de E contient alors des l_n^1 6-complémentés, donc son dual $Y' = E'/Y^0$ contient des l_n^∞ uniformément, ce qui implique que l'on ne peut pas avoir $\pi_1(Y', G) = \pi_{1/2}(Y', G)$ pour tout espace de Banach G.

Dans le cas $p > 1$, on peut encore dire que E est de type p-stable si et seulement si tout quotient E'/N de E' vérifie $\pi_{p'}(\mathscr{L}^\infty, E'/N) = \mathscr{L}(\mathscr{L}^\infty, E'/N)$.

Corollaire 2.4. *Soient E un espace de Banach et $p \in [1, 2[$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(i) *E est de type p-stable.*

(ii) *Pour toute suite bornée (x_n) dans E, la série $\sum n^{-1/p} x_n \varepsilon_n(t)$ converge presque sûrement.*

(iii) *Pour toute suite bornée (x_n) dans E, il existe un choix de signes $(\varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^{\boldsymbol{N}}$ tel que la série $\sum n^{-1/p} \varepsilon_n x_n$ soit convergente.*

(iv) *Pour toute suite bornée (x_n) dans E, la suite $n^{-1/p} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k(t) x_k$ tend vers zéro presque sûrement quand n tend vers l'infini.*

(v) *Pour toute suite bornée (x_n) dans E, il existe un choix de signes $(\varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^{\boldsymbol{N}}$ tel que:*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/p} \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k = 0.$$

Démonstration. Les implications (ii) $\Rightarrow$ (iii) et (iv) $\Rightarrow$ (v) sont évidentes, tandis que (ii) $\Rightarrow$ (iv) et (iii) $\Rightarrow$ (v) résultent du lemme de Kronecker, dont nous rappelons l'énoncé: soient (x_n) une suite d'éléments d'un espace de Banach, et (α_n) une suite décroissante de nombres réels tendant vers zéro. Si la série $\sum \alpha_n x_n$ est convergente, la suite $\alpha_n\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Si E est de type p-stable, il est de type q-Rademacher pour au moins un $q > p$ d'après la proposition 2.2. Si (x_n) est une suite bornée, la série $\sum \|n^{-1/p} x_n\|^q$ est convergente, donc $\sum n^{-1/p} \varepsilon_n(t) x_n$ converge presque sûrement. Ce qui prouve que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Il reste pour conclure à démontrer l'implication (v) $\Rightarrow$ (i). Supposons que (i) ne soit pas vérifiée. D'après le corollaire 2.1(a), l'injection $l^1 \to l^p$ est finiment factorisable dans E. Nous allons montrer que l'on peut construire une suite (x_n) d'éléments de E et une suite d'entiers (N_ν) croissant vers l'infini tels que:

$$\sup \|x_n\| \leqslant 1,$$

et

$$\forall (\varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^{\boldsymbol{N}}, \qquad \forall \nu \in \boldsymbol{N}, \qquad N_\nu^{-1/p} \Big\| \sum_{k=1}^{N_\nu} \varepsilon_k x_k \Big\| > \tfrac{1}{2}.$$

On pose $N_1 = 1$, et on prend pour x_1 un vecteur quelconque de norme 1 dans E. Supposons que $N_1, \ldots, N_\nu$, $x_1, \ldots, x_{N_\nu}$ aient été déterminés, de façon que:

$$\sup_{1 \leqslant i \leqslant N_\nu} \|x_i\| \leqslant 1, \qquad \text{et} \qquad \forall (\varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^{\boldsymbol{N}}, \qquad N_\nu^{-1/p} \Big\| \sum_{k=1}^{N_\nu} \varepsilon_k x_k \Big\| > \tfrac{1}{2}.$$

Choisissons un entier $N_{\nu+1}$ suffisamment grand pour que:

$$N_{\nu+1}^{-1/p}\left[\tfrac{2}{3}(N_{\nu+1}-N_\nu)^{1/p}-N_\nu\right] > \tfrac{1}{2}.$$

Puisque l'injection $l^1 \to l^p$ est finiment factorisable dans E, on peut trouver des vecteurs $(x_{N_\nu+1}, \ldots, x_{N_{\nu+1}})$ tels que:

$$\forall (a_k), \quad \tfrac{2}{3}\Big(\sum_{N_\nu<k\leqslant N_{\nu+1}} |a_k|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\| \sum_{N_\nu<k\leqslant N_{\nu+1}} a_k x_k \Big\| \leqslant \sum |a_k|.$$

On aura donc pour toute suite $(\varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^N$:

$$\begin{aligned} N_{\nu+1}^{-1/p}\Big\|\sum_{k=1}^{N_{\nu+1}} \varepsilon_k x_k\Big\| &\geqslant N_{\nu+1}^{-1/p}\Big[\Big\|\sum_{N_\nu<k\leqslant N_{\nu+1}} \varepsilon_k x_k\Big\| - \Big\|\sum_{k=1}^{N_\nu} \varepsilon_k x_k\Big\|\Big] \\ &\geqslant N_{\nu+1}^{-1/p}\left[\tfrac{2}{3}(N_{\nu+1}-N_\nu)^{1/p}-N_\nu\right] > \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

La suite (x_n) construite de proche en proche contredit la propriété (v), ce qui achève la démonstration du corollaire.

Remarque 2.6. Le corollaire précédent montre que les espaces de type p-stable sont ceux dans lesquels une certaine forme de la loi des grands nombres est vérifiée. Le dernier point de la démonstration du corollaire 2.4 est d'ailleurs inspiré de [1].

Dans le corollaire suivant nous adoptons la terminologie des espaces B-convexes, telle qu'elle est développée dans un article de Giesy ([8]), pour donner un élément de réponse à une question de cet article (p. 145, dernière question).

COROLLAIRE 2.5. *Soit $p \in [1, 2[$. Si un espace de Banach E est $B-(k, \varepsilon)$-convexe avec $k(1-\varepsilon) < k^{1/p}$, on a pour tout $q > p$ et pour toute suite (X_n) de variables aléatoires indépendantes centrées à valeurs dans E, bornée dans $L^q(E)$:*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/p}\Big\|\sum_{k=1}^{n} X_k\Big\|_{L^q(E)} = 0.$$

Démonstration. L'hypothèse signifie que pour tout k-uple $(x_1, \ldots, x_k)$ formé d'éléments de la boule unité de E, on a:

$$\inf\Big\{\Big\|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i x_i\Big\|;\ \varepsilon_i = \pm 1\Big\} \leqslant k(1-\varepsilon) < k^{1/p},$$

ce qui implique immédiatement que l'injection $l^1 \to l^p$ n'est pas finiment factorisable dans E. D'après les corollaires 2.1 et 2.2, l'espace $L_q(\Omega, \mathfrak{A}, P, E)$ est de type p-stable pour tout espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ et pour tout $q > p$.

Soit $(\tilde{X}_n)$ une suite symétrique (cf. paragraphe 0) de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ et à valeurs dans E. Si on suppose la suite $(\tilde{X}_n)$ bornée dans $L_q(\Omega, \mathfrak{A}, P, E)$, le corollaire 2.4 implique:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/p}\Big\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \tilde{X}_k\Big\|_{L^q(E)} = 0$$

pour au moins un choix de signes $(\varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^N$. Puisque la suite $(\tilde{X}_n)$ est une suite symétrique, on a aussi en fait:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1/p}\Big\|\sum_{k=1}^{n} \tilde{X}_k\Big\|_{L^q(E)} = 0.$$

Le corollaire est donc démontré dans le cas de variables symétriques. Dans le cas d'une suite (X_n) de variables indépendantes centrées on se ramène facilement au cas précédent, en introduisant une suite symétrisée $(\tilde{X}_n)$ définie sur $(\Omega \times \Omega, P \otimes P)$ par:

$$\tilde{X}_n(\omega, \omega') = X_n(\omega) - X_n(\omega').$$

Remarque 2.7. Une variante facile de la démonstration ci-dessus permet de conclure que — sous les mêmes hypothèses —

$$n^{-1/p}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k\Big) \quad \text{tend vers 0 presque sûrement.}$$

Remarque 2.8. Après avoir terminé la rédaction de cet article, nous avons eu connaissance de résultats nouveaux de J. L. Krivine [13], qui permettent d'améliorer notablement les conclusions des théorèmes 1.1 et 2.1. En lisant le lemme II.2 et la démonstration du théorème II.2 de [13], on dégage immédiatement l'énoncé suivant:

THÉORÈME. *Soit E un espace de Banach muni d'une base inconditionnelle et I.S. (e_n). Si l'on pose:*

$$b = \inf\Big\{\lambda \geqslant 0;\ \lim_{n\to\infty} \lambda^n \Big\|\sum_{j=1}^{2^n} e_j\Big\| = +\infty\Big\},$$

et si on définit q par $b = 2^{-1/q}$, l'espace l^q est finiment représentable dans E.

De cet énoncé on déduit le suivant:

THÉORÈME 2.3. *Soit E un espace de Banach de dimension infinie. Les espaces $l^{p(E)}$ et $l^{q(E)}$ sont finiment représentables dans E.*

Démonstration. Posons $p = p(E)$ et $q = q(E)$ pour simplifier. D'après les théorèmes 1.1 et 2.1 on peut trouver pour tout N deux N-uples $(x_1^N, \ldots, x_N^N)$ et $(y_1^N, \ldots, y_N^N)$ tels que:

$$\begin{aligned} &\Big(\sum |a_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\|\sum a_i x_i^N\Big\| \leqslant 2\sum |a_i|, \\ \forall (a_i) \in \mathbf{R}^N, \quad &\tfrac{1}{2}\cdot\sup|a_i| \leqslant \Big\|\sum a_i y_i^N\Big\| \leqslant \Big(\sum |a_i|^q\Big)^{1/q}. \end{aligned}$$

Soit $\mathfrak{U}$ un ultrafiltre non trivial sur $\boldsymbol{N}$. Les formules

$$\lim_{N\in\mathfrak{U}}\Big\|\sum a_i x_i^N\Big\|;\quad \lim_{N\in\mathfrak{U}}\Big\|\sum a_i y_i^N\Big\|$$

définissent deux normes sur $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$, $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ telles qu'en désignant par (e_i) la base canonique de $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$, on a:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\forall (a_i)\in\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})},\quad \Big(\sum|a_i|^p\Big)^{1/p}\leqslant\Big\|\sum a_ie_i\Big\|_1\leqslant 2\cdot\sum|a_i|,\\ &\tfrac{1}{2}\cdot\sup|a_i|\leqslant\Big\|\sum a_ie_i\Big\|_2\leqslant\Big(\sum|a_i|^q\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

D'après ces formules, la suite (e_n) ne peut pas avoir de sous-suite de Cauchy, que ce soit pour l'une ou l'autre de ces deux normes. D'après le procédé d'extraction de Brunel–Sucheston [2], on peut trouver une sous-suite (e_n') de (e_n) telle que les formules:

$$\Big|\sum a_ie_i\Big|_j=\lim_{\substack{i_1<i_2<\dots\\ i_1\to\infty}}\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}a_ke'_{i_k}\Big\|_j,\qquad j=1,2,$$

définissent deux nouvelles normes sur $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$, qui vérifient encore (18), mais sont de plus I.S., et telles que $u_n=e_{2n}-e_{2n-1}$, $n=1,2,\dots$, soit une suite I.S. et inconditionnelle de constante $\leqslant 2$. On a de plus d'après (18):

$$(19)\qquad \forall (a_i),\quad \begin{aligned} &2^{1/p}\cdot\Big(\sum|a_i|^p\Big)^{1/p}\leqslant\Big|\sum a_iu_i\Big|_1\leqslant 4\sum|a_i|,\\ &\tfrac{1}{2}\cdot\max|a_i|\leqslant\Big|\sum a_iu_i\Big|_2\leqslant 2^{1/q}\cdot\Big(\sum|a_i|^q\Big)^{1/q}.\end{aligned}$$

Désignons par F_j, $j=1,2$, l'espace de Banach obtenu en complétant pour la norme $|\ |_j$ l'espace vectoriel engendré dans $\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})}$ par la suite (u_n). L'espace F_j admet alors (u_n) pour base inconditionnelle. On voit facilement que F_j est finiment représentable dans E.

Par conséquent pour tout $\varepsilon>0$ $(\varepsilon<p)$, F_1 est de type $p-\varepsilon$ et F_2 de cotype $q+\varepsilon$. Il existe donc une constante C_ε telle que:

$$\begin{aligned}\forall (a_i)\in\boldsymbol{R}^{(\boldsymbol{N})},\quad &\Big|\sum a_iu_i\Big|_1\leqslant C_\varepsilon\Big(\sum|a_i|^{p-\varepsilon}\Big)^{1/p-\varepsilon},\\ &\Big|\sum a_iu_i\Big|_2\geqslant\frac{1}{C_\varepsilon}\Big(\sum|a_i|^{q+\varepsilon}\Big)^{1/q+\varepsilon}.\end{aligned}$$

De (19) et de la propriété précédente, on déduit que pour tout n:

$$2^{1/p}\cdot 2^{n/p}\leqslant\Big|\sum_{i=1}^{2^n}u_i\Big|_1\leqslant C_\varepsilon 2^{n/p-\varepsilon},$$

$$\frac{1}{C_\varepsilon}\cdot 2^{n/q+\varepsilon}\leqslant\Big|\sum_{i=1}^{2^n}u_i\Big|_2\leqslant 2^{1/q}\cdot 2^{n/q}.$$

Si l'on pose:

$$b_j=\inf\Big\{\lambda>0;\ \lim_{n\to\infty}\lambda^n\Big|\sum_{i=1}^{2^n}u_i\Big|_j=+\infty\Big\},\qquad j=1,2,$$

il est clair que $b_1=2^{-1/p}$, $b_2=2^{-1/q}$.

D'après le théorème de Krivine rappelé ci-dessus, l^p et l^q sont finiment représentables respectivement dans F_1 et F_2, donc l^p et l^q sont finiment représentables dans E.

Remarques 2.9. Supposons que E est d'infratype p_E et supposons de plus que $1/p_E+1/q_{E'}=1$.

Posons simplement $p_E=p$ et $q_{E'}=q$. Dans ce cas particulier, on peut voir que E contient des sous-espaces uniformément complémentés et uniformément isomorphes à l_n^p.

Soit n donné, choisissons $N\geqslant N(2,1/2,1,n)$. D'après la remarque précédente on peut trouver dans E' une suite $(y_1,\dots,y_N)$ telle que:

$$(20)\qquad \forall(\beta_i)\in\boldsymbol{R}^N,\quad \sup|\beta_i|\leqslant\Big(\sum|\beta_i|^q\Big)^{1/q}\leqslant\Big\|\sum\beta_iy_i\Big\|\leqslant 2\Big(\sum|\beta_i|^q\Big)^{1/q}.$$

Par transposition, on en déduit l'existence d'éléments $x_1,\dots,x_N$ dans E tels que:

$$\langle x_k,y_j\rangle=\delta_{k,j},$$

et

$$\forall(a_i)\in\boldsymbol{R}^N,\quad \tfrac{1}{2}\Big(\sum|a_i|^p\Big)^{1/p}\leqslant\Big\|\sum_{i=1}^N a_ix_i\Big\|\leqslant\sum|a_i|.$$

D'après le lemme 1.5 on peut trouver une sous-suite $x_{i_1},\dots,x_{i_{2n}}$ telle que la suite $u_j=x_{i_{2j}}-x_{i_{2j-1}}$ soit inconditionnelle de constante $\leqslant 3$. Puisque E est d'infratype p, il existe une constante K telle que:

$$\forall(z_i)\in E^N,\quad \inf_{\varepsilon_i=\pm1}\Big\|\sum\varepsilon_iz_i\Big\|\leqslant K\Big(\sum\|z_i\|^p\Big)^{1/p},$$

on aura alors:

$$(21)\qquad \forall(a_i)\in\boldsymbol{R}^n,\quad \begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Big(\sum|a_i|^p\Big)^{1/p}\leqslant\Big\|\sum a_iu_i\Big\|&\leqslant 3K\Big(\sum\|a_iu_i\|^p\Big)^{1/p}\\ &\leqslant 6K\Big(\sum|a_i|^p\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Posons $v_j=y_{i_{2j}}$ et: $\forall x\in E$, $Px=\sum_{j=1}^n\langle x,v_j\rangle u_j$. On vérifie aisément que P est une projection de E sur le sous-espace E_n engendré par $u_1,\dots,u_n$.

D'après (21) on a:

$$\forall x \in E \quad \|Px\| \leqslant 6K\Big(\sum |\langle x, v_j\rangle|^p\Big)^{1/p}.$$

Mais

$$\Big(\sum |\langle x, v_j\rangle|^p\Big)^{1/p} \leqslant \sup\Big\{\Big|\Big\langle x, \sum \beta_j v_j\Big\rangle\Big|, \sum |\beta_j|^q = 1\Big\}$$
$$\leqslant 2\|x\| \quad \text{(d'après (20))}$$

soit finalement: $\forall x \in E$, $\|Px\| \leqslant 12K\|x\|$.

On a donc trouvé pour tout n un sous-espace E_n de E de dimension n qui est $12K$-isomorphe à l_n^p et $12K$-complémenté dans E.

Remarque 2.10. On voit facilement que l'on n'a pas toujours $1/p_E + 1/q_{E'} = 1$ (par exemple si $E = c_0$, $p_E = 1$ et $q_{E'} = 2$). Cependant nous conjecturons que si $p_E > 1$ (autrement dit si E est B-convexe) on a $1/p_E + 1/q_{E'} = 1$. Plus précisément, nous conjecturons que si E est B-convexe, E est de type p-Rademacher si et seulement si E' est de cotype q avec $1/p + 1/q = 1$. Ce résultat est vrai si E est un treillis normé (cf. [28], exposé XXIV–XXV, corollaire 3). On peut poser une question encore plus précise: désignons par $\mathrm{Rad}(E)$ le sous-espace fermé de $L^2(E)$ engendré par les variables aléatoires de la forme $\sum_n x_n \varepsilon_n(t)$ où (x_n) est une suite d'éléments de E dont un nombre fini seulement sont non nuls; nous dirons que E est K-convexe si $\mathrm{Rad}(E)$ est complémenté dans $L^2(E)$. On constate facilement que s'il existe une projection continue de $L^2(E)$ sur $\mathrm{Rad}(E)$, la projection orthogonale $X \to \sum_n \big[\int \varepsilon_n(t) X(t)\, dt\big] \varepsilon_n$ est déjà continue. On en déduit que la K-convexité est une super-propriété. Si E est K-convexe, il en est de même de ses sous-espaces, de ses quotients, de son dual E', et de $L^p(E)$ si $1 < p < \infty$. Par ailleurs, si E est K-convexe et de cotype q, son dual est de type p-Rademacher avec $1/p + 1/q = 1$. Si E est K-convexe il est B-convexe; en effet l^1 n'est pas K-convexe puisque l^1 est de cotype 2 alors que son dual l^∞ n'est pas de type 2-Rademacher.

On peut montrer facilement que tout espace de type 2-Rademacher est K-convexe.

Si E est un treillis normé, on peut montrer que E est K-convexe si et seulement si E est B-convexe. Nous ignorons si cela reste vrai pour un espace de Banach général.

Remarque 2.11. Soient p, q tels que $0 < p < q \leqslant 2$ et supposons que Y est un sous-espace fermé d'un espace de Banach X.

Dans [7], le résultat suivant est démontré: si Y et X/Y sont de type q-Rademacher, alors X est de type p-Rademacher.

Le corollaire 2.1, joint à la proposition 2.1, permet d'en déduire que: si Y et X/Y sont de type p-stable, alors X est aussi de type p-stable.

Bibliographie

[1] A. Beck, *A convexity condition in Banach spaces and the strong law of large numbers*, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), pp. 329–334.

[2] A. Brunel and L. Sucheston, *On B-convex Banach spaces*, Math. Systems Theory 7 (1973), pp. 294–299.

[3] — — *On J-convexity and some ergodic super properties of Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 204 (1975), pp. 79–90.

[4] S. Chevet, *Une propriété caractéristique des processus linéaires continus et applications aux opérateurs p-radonifiants*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 273 (1971), pp. 1261–1264.

[5] W. J. Davis and W. B. Johnson, *Compact non nuclear operators*, Studia Math. 51 (1974), pp. 81–85.

[6] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.) 36 (1950), pp. 192–197.

[7] P. Enflo, J. Lindenstrauss and G. Pisier, *On the "three space problem"*, Math. Scand. 36 (1975) pp. 199–210.

[8] D. P. Giesy, *On a convexsity condition in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 125 (1966), pp. 114–146.

[9] J. Hoffmann-Jørgensen, *Sums of independent Banach space valued random variables*, Aarhus Universitet, Preprint series No 15, 1972/1973.

[10] R. C. James, *A non-reflexive Banach space which is uniformly non octahedral*, Israel J. Math. 18 (1974), pp. 145–155.

[11] M. I. Kadec and A. Pełczyński, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p*, Studia Math. 21 (1962), pp. 161–176.

[12] J. P. Kahane, *Some random series of functions*, Heath Mathematical Monographs 1968.

[13] J. L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés* (à paraître dans Annals of Math).

[14] S. Kwapień, *On a theorem of Laurent Schwartz and its application to absolutely summing operators*, Studia Math. 38 (1970), pp. 193–201.

[15] J. Lindenstrauss and A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$ spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), pp. 275–326.

[16] J. Lindenstrauss et H. P. Rosenthal, *The $\mathscr{L}_p$ spaces*, Israel J. Math. 7 (1969), pp. 325–349.

[17] B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans un espace L^p*, Astérisque, Soc. Math. France 11 (1974).

[18] — *Sur certaines propriétés des opérateurs sommants*, C.R. Acad. Sci. Paris, Série A, 277 (1973), pp. 1053–1055.

[19] — et G. Pisier, *Caractérisation d'une classe d'espaces de Banach par des propriétés de séries aléatoires vectorielles*, ibidem 277 (1973), pp. 687–690.

[20] E. M. Nikishin, *Resonance theorems and superlinear operators*, Transl. of Contents Uspehi Mat. Nauk. 25 (1970), pp. 125–187.

[21] A. Persson und A. Pietsch, *p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachraümen*, Studia Math. 33 (1969), pp. 19–62.

[22] A. Pietsch, *Absolute p-summierende Abbildungen in normierten Raümen*, ibidem 28 (1967), pp. 333–353.

[23] G. Pisier, *Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas uniformément de l_n^1*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 277 (1973), pp. 991–994.

[24] — *Martingales with values in uniformly convex spaces*, Israel J. Math. 20 (1975), pp. 326–350.

[25] H. P. Rosenthal, *On subspaces of L^p*, Ann. of Math. 97 (1973), pp. 343–373.
[26] Séminaire L. Schwartz 1969–1970, *Applications radonifiantes*, École Polytechnique, Paris.
[27] Séminaire Maurey–Schwartz 1972–1973, *Espaces L_p et applications radonifiantes*, École Polytechnique, Paris.
[28] Séminaire Maurey–Schwartz 1973–1974, *Espaces L_p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach*, École Polytechnique, Paris.

CENTRE DE MATHÉMATIQUES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE PARIS, FRANCE
"LABORATOIRE DE RECHERCHE ASSOCIÉ AU C. N. R. S."

Received February 4, 1975 (947)

STUDIA MATHEMATICA, T. LVIII. (1976)

Complementably universal Banach spaces

by

W. B. JOHNSON (Ohio) and A. SZANKOWSKI (Copenhagen)

Abstract. There is no separable Banach space which is complementably universal for the class of separable Banach spaces.

I. Introduction. A Banach space X is said to be *complementably universal* for a class $\mathscr{A}$ of Banach spaces provided every space in $\mathscr{A}$ is isomorphic to a complemented subspace of X. A. Pełczyński proved in [11] that there exists a separable Banach space which is complementably univeral for the class of all Banach spaces with Schauder basis. This result was extended by Kadec [8], who constructed a separable space which is complementably universal for the class of all separable Banach spaces which possess the bounded approximation property (b.a.p.). Actually, the spaces constructed by Kadec and Pełczyński are isomorphic (cf. [7], [12]).

In Section II we prove

A. Basic result. *There is no separable Banach space which is complementably universal for the class of all separable Banach spaces.*

This result is a simple consequence of Enflo's counterexamples to the approximation problem [3].

Section III and Section IV contain extensions of our basic result. In Section III it is shown that, in contrast to Kadec's theorem,

B. *There is no separable Banach space which is complementably universal for the class of separable Banach spaces which possess the approximation property.*

In Section IV it is shown that Davie's construction in [2] yields

C. *For each $2 < p < \infty$, there is no separable Banach space which is complementably universal for the class of all subspaces of l_p.*

Of course, results B and C both contain the basic result A. We have included a separate proof of A because it is short and the proof is accessible to anyone who is willing to accept the "axiom" that there are subspaces of some special spaces which fail a certain approximation condition mentioned at the beginning of Section II. The proof in Section III is also not