STUDIA MATHEMATICA, T. LVII. (1976)

Opérateurs sommants et factorisations à travers les espaces L^p

par

JEAN-THIERRY LAPRESTE (Clermont-Ferrand)

Résumé. On développe les propriétés de certains idéaux d'opérateurs au sens de A. Pietsch en faisant le lien avec certains produits tensoriels topologiques et des problèmes de factorisation d'opérateurs à travers des espaces L^p. On généralise ainsi des résultats de Kwapień [6], Saphar [20] et on répond à diverses questions de Pietsch [17] et Gordon Lewis et Retherford [23].

On développe dans cet article les propriétés de certains idéaux d'opérateurs au sens de A. Pietsch [17].

Dans le chapitre I, on étend les résultats de Saphar [20] concernant les opérateurs p-nucléaires.

Le chapitre II caractérise le dual du produit tensoriel β-normé $E \underset{p,r,s}{\otimes} F$ et montre qu'il s'identifie à un espace normé complet d'opérateurs linéaires continus entre E et F': $\Pi_{p',r,s}(E, F')$. La classe $\Pi_{p',r,s}$ est un idéal d'opérateurs que l'on caractérise partiellement dans les espaces de Hilbert. On montre également, répondant à une question de A. Pietsch que l'idéal $\Pi_{m,2,2}$ est propre pour $1 < m < 2$.

Le chapitre III met en évidence, dans les cas où le p-triplet (p, r, s) vérifie $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$ des propriétés de „factorisation" des opérateurs de $\Pi_{p,r,s}$; on fait le lien avec les opérateurs p-sommant [13]. Dans ce cas, l'idéal est totalement caractérisé dans les espaces de Hilbert.

Le chapitre IV étudie $\Pi_{p,r,s}$ du point de vue de l'adjonction des idéaux d'opérateurs, on introduit une nouvelle classe d'opérateurs $\Gamma_{r,s}$ (opérateurs $r-s$ factorisables) qui généralise la classe Γ_p de Kwapień [6] et on démontre que ce n'est autre que l'adjoint de $\Pi_{p,s,r}$.

Pour cela, on utilise la notion de maximalité d'un idéal et on répond par là même à une question de Lewis Gordon et Retherford [23].

Le chapitre V relie les considérations précédentes aux propriétés de factorisation par les espaces L^p. On introduit quelques idéaux associés.

Je remercie ici le Professeur A. Pietsch qui m'a engagé dans ce travail, les Professeurs L. Schwartz, A. Badrikian et B. Maurey qui m'ont aidé dans la conception comme dans la rédaction de cet article.

CHAPITRE 0

NOTATIONS ET RAPPELS

0.1. Les espaces de Banach considérés ici, sont tous complexes mais tout l'article reste valable pour des Banach réels. L'application identique d'un espace de Banach E est notée id_E; l'injection canonique de E dans son bidual E'' est notée B_E.

De manière générale, les minuscules „bâtons" indiqueront des vecteurs d'un espace de Banach, et les gras minuscules „italiques" des familles de ces vecteurs.

Si $\boldsymbol{x} = (x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de E, on notera conformément à [21]:

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \|(x_i)_{i\in I}\|_p = \Big(\sum_{i\in I}\|x_i\|^p\Big)^{1/p},$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_p^* = \sup\{\|(\langle x_i, \eta\rangle)_{i\in I}\|_p;\ \eta\in E,\ \|\eta\|\leqslant 1\},$$

quand $0<p<+\infty$;

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty^* = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_{i\in I}\|x_i\|.$$

Les lettres p, r, s désigneront des éléments de $]0, +\infty]$. L'espace vectoriel des opérateurs T d'un espace de Hilbert H dans lui-même qui admettent une représentation de la forme:

$$T: H\to H: x\to \sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n(e_n, x)f_n,$$

où $\boldsymbol{e} = (e_n)_{n\in N}$ et $\boldsymbol{f} = (f_n)_{n\in N}$ sont deux systèmes orthonormés de H et $\lambda = (\lambda_n)_{n\in N}\in l_p\cap c_0$ sera désigné par $\mathscr{S}_p(H, H)$.

Le signe $\triangle$ indiquera le début d'une démonstration, ∇ sa fin.

0.2. Suivant A. Pietsch [13], nous appellerons *idéal d'opérateurs* une sous-classe $\mathscr{A}$ de la classe $\mathscr{L}$ des applications linéaires continues entre espaces de Banach, qui contient la classe $\mathscr{F}$ des opérateurs de rang fini et telle que chacun des ensembles $\mathscr{A}(E, F) = \mathscr{L}(E, F)\cap\mathscr{A}$ satisfasse les conditions suivantes:

1) $\mathscr{A}(E, F)$ est un espace vectoriel.

2) Si $S\in\mathscr{A}(E, F)$, $R\in\mathscr{L}(G, E)$, $T\in\mathscr{L}(F, K)$ (où E, F, G, K sont des espaces de Banach), alors $T\circ S\circ R\in\mathscr{A}(G, K)$.

0.3. Si de plus, on a défini sur $\mathscr{A}$ une fonctionnelle α à valeurs dans $\boldsymbol{R}^+$ vérifiant les conditions suivantes:

N.1. Si $\eta\in E'$ et $y\in F$, alors $\alpha(\eta\otimes y) = \|\eta\|\cdot\|y\|$, (où $\eta\otimes y$ est l'opérateur $E\to F: x\to\langle x, \eta\rangle y$).

N.2. α est une p-norme [1] sur $\mathscr{A}(E, F)$ pour chaque couple (E, F) d'espaces de Banach.

[1] Pour la définition d'une p-norme (cf. [3], p. 160).

N.3. Si $S\in\mathscr{A}(E, F)$, $R\in\mathscr{L}(G, E)$, $T\in\mathscr{L}(F, K)$ alors $\alpha(T\circ S\circ R)\leqslant \|T\|\alpha(S)\|R\|$.

On dit que $(\mathscr{A}, \alpha)$ est un idéal normé. Si chacun des espaces p-normés $\mathscr{A}(E, F)$ est alors complet pour cette p-norme, l'idéal sera dit complet.

0.4. (Π_r, π_r), $0<r<+\infty$ désignera l'idéal des opérateurs r-sommant (cf. Pietsch [13]).

0.5. Rappelons enfin qu'une p-norme tensorielle n'est autre qu'une fonctionnelle α, telle que $(\mathscr{F}, \alpha)$ soit un idéal p-normé (on confondra par abus de langage $E\otimes F$ et $\mathscr{F}(E', F)$), α vérifiant de plus la condition suivante:

$$\text{si}\ \begin{cases} A\in\mathscr{L}(E, F) & \text{avec } \|A\|\leqslant 1,\\ B\in\mathscr{L}(G, H) & \text{avec } \|B\|>1.\end{cases}$$

Alors l'opérateur $A\otimes B\in\mathscr{L}(E\otimes G, F\otimes H)$ est également de norme inférieure ou égale à 1.

CHAPITRE I

LE PRODUIT TENSORIEL (p, r, s) LES OPÉRATEURS (p, r, s)-NUCLÉAIRES

§ 1. Le produit tensoriel (p, r, s). Soient E et F deux espaces de Banach, u un élément de $E\otimes F$. On pose alors:

$$\mu_{p,r,s}(u) = \inf\{\|\lambda\|_p\|\boldsymbol{x}\|_r^*\|\boldsymbol{y}\|_s^*\};$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des représentations de u de la forme $u = \sum_i \lambda_i x_i\otimes y_i$.

On a alors le résultat suivant:

1.1. Théorème. *Pour tout triplet (p, r, s) tel que l'on ait $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s} = \frac{1}{\beta}\geqslant 1$, $\mu_{p,r,s}$ est une β-norme tensorielle [20] sur $E\otimes F$.*

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}<1$, $\mu_{p,r,s}$ est identiquement nulle.

$\triangle$ La démonstration de la première assertion est analogue à celle de Saphar ([20], théorème 3.1); effectuons-là cependant.

Soient donc u_1 et u_2 deux éléments de $E\otimes F$. On peut écrire:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{i,j}x_{i,j}\otimes y_{i,j},\qquad j = 1, 2.$$

Par homogénéité, on peut choisir des représentations de u_1 et u_2 telles que, pour ε donné réel positif, on ait:

$$\|(x_{i,j})_{i<n}\|_r^* \leqslant \big(\mu_{p,r,s}^\beta(u_j)+\varepsilon\big)^{1/r},$$
$$\|(y_{i,j})_{i<n}\|_s^* \leqslant \big(\mu_{p,r,s}^\beta(u_j)+\varepsilon\big)^{1/s},$$
$$\|(\lambda_{i,j})_{i<n}\|_p \leqslant \big(\mu_{p,r,s}^\beta(u_j)+\varepsilon\big)^{1/p},$$

$j=1, 2.$

Et par conséquent:

$$\|(x_{i,j})_{i,j}\|_r^* \leqslant \big(\mu_{p,r,s}^\beta(u_1)+\mu_{p,r,s}^\beta(u_2)+2\varepsilon\big)^{1/r},$$
$$\|(y_{i,j})_{i,j}\|_s^* \leqslant \big(\mu_{p,r,s}^\beta(u_1)+\mu_{p,r,s}^\beta(u_2)+2\varepsilon\big)^{1/s},$$
$$\|(\lambda_{i,j})_{i,j}\|_p \leqslant \big(\mu_{p,r,s}^\beta(u_1)+\mu_{p,r,s}^\beta(u_2)+2\varepsilon\big)^{1/p}.$$

Puis:

$$\|(x_{i,j})_{i,j}\|_r^*\,\|(y_{i,j})_{i,j}\|_s^*\,\|(\lambda_{i,j})_{i,j}\|_p \leqslant \big(\mu_{p,r,s}^\beta(u_1)+\mu_{p,r,s}^\beta(u_2)+2\varepsilon\big)^{1/\beta}.$$

Donc:

$$\mu_{p,r,s}(u_1+u_2) \leqslant \big(\mu_{p,r,s}^\beta(u_1)+\mu_{p,r,s}^\beta(u_2)\big)^{1/\beta}.$$

Il est facile de constater, d'autre part, que $\mu_{p,r,s}$ est positivement homogène. Reste donc à montrer que si $0<\beta\leqslant 1$, $\mu_{p,r,s}$ sépare les points et, est raisonnable (c'est-à-dire que pour tout couple (x, y) de $E\times F$, on a $\mu_{p,r,s}(x\otimes y) = \|x\|\cdot\|y\|$).

Notons ici (cela ne servira plus par la suite), pour $u'\in E'\otimes F'$:

$$\theta_{p,r,s}(u') = \inf\{\|\lambda'\|_p\,\|x'\|_r\,\|y'\|_s\},$$

la borne inférieure étant encore une fois prise sur l'ensemble des représentations de u de la forme $\sum_j \lambda_j' x_j'\otimes y_j'$.

On sait que $E\otimes F$ et $E'\otimes F'$ sont en dualité séparante. Soient $u\in E\otimes F$, $u'\in E'\otimes F'$.

On a alors puisque $0<\beta\leqslant 1$:

$$|\langle u, u'\rangle| = \Big|\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j'\langle x_i, x_j'\rangle\,\langle y_i, y_j'\rangle\Big|$$
$$\leqslant \Big|\sum_{i,j}|\lambda_i|^\beta|\lambda_j'|^\beta|\langle x_i, x_j'\rangle|^\beta|\langle y_i, y_j'\rangle|^\beta\Big|^{1/\beta};$$

et, par conséquent, d'après l'inégalité de Hölder généralisée:

$$|\langle u, u'\rangle| \leqslant \|(\lambda_i\lambda_j')_{i,j}\|_p\cdot\|(\langle x_i, x_j'\rangle)_{i,j}\|_r\,\|(\langle y_i, y_j'\rangle)_{i,j}\|_s;$$

Alors, en revenant à la définition de $\|\ \|_k$, l'on a aisément:

$$(1)\qquad |\langle u, u'\rangle| \leqslant \mu_{p,r,s}(u)\cdot\theta_{p,r,s}(u').$$

Donc $\mu_{p,r,s}(u)=0$ entraîne $u=0$.

Le dernier point à démontrer est que $\mu_{p,r,s}$ est raisonnable, des vérifications faciles permettant alors de voir que $\mu_{p,r,s}$ est tensorielle. Il est clair, d'après la définition que l'on a:

$$\mu_{p,r,s}(x\otimes y) \leqslant \|x\|\cdot\|y\|.$$

D'autre part, tout ce qui précède permet de plonger canoniquement $E'\otimes F'$ dans $(E \underset{p,r,s}{\otimes} F)'$, dual topologique de $E\otimes F$ muni de la β-norme $\mu_{p,r,s}$.

Soit $\|\ \|_{p,r,s}$ la norme induite par $(E \underset{p,r,s}{\otimes} F)'$ sur $E'\otimes F'$. Si $(x', y')\in E'\times F'$, on a:

$$\langle x\otimes y, x'\otimes y'\rangle = \langle x, x'\rangle\cdot\langle y, y'\rangle;$$

et l'on a:

$$|\langle x\otimes y, x'\otimes y'\rangle| \leqslant \|x'\otimes y'\|_{p,r,s}\cdot\mu_{p,r,s}(x\otimes y).$$

Mais le théorème de Hahn–Banach assure alors l'existence de x_0' et y_0' de norme 1, avec:

$$|\langle x\otimes y, x_0'\otimes y_0'\rangle| = \|x\|\cdot\|y\|;$$

on en déduit

$$\|x_0'\otimes y_0'\|_{p,r,s}\leqslant 1;$$

en effet, d'après (1),

$$\|x_0'\otimes y_0'\|_{p,r,s} \leqslant \theta(x_0'\otimes y_0') \leqslant \|x_0'\|\,\|y_0'\| \leqslant 1.$$

Et donc

$$\|x\|\cdot\|y\| \leqslant \mu_{p,r,s}(x\otimes y).$$

Démontrons à présent la seconde assertion. Nous avons vu, dans la première partie, que quelque soit $\beta>0$, tel que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}=\dfrac{1}{\beta}$, $\mu_{p,r,s}$ est une β-norme et donc si $\beta>1$ $\mu_{p,r,s}$ est identiquement nulle. ∇

Par la suite, on supposera toujours que $0<\beta\leqslant 1$, c'est-à-dire $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}\geqslant 1$.

1.2. Lemme. *Soient $x=(x_i)_{i\in N}$, $y=(y_i)_{i\in N}$, $\lambda=(\lambda_i)_{i\in N}$ des suites d'éléments de E, F, C, respectivement, telles que:*

$$\|x\|_r^*<+\infty,\qquad \|y\|_s^*<+\infty,\qquad \|\lambda\|_p<+\infty \quad \textit{et} \quad \lambda\in c_0.$$

Alors la famille $\lambda_i x_i\otimes y_i$ est sommable dans le complété $E \underset{p,r,s}{\hat{\otimes}} F$ de $E\otimes F$.

Δ C'est trivial si $\|y\|_s^*$ ou $\|x\|_r^*=0$, sinon:

soit $\varepsilon>0$. Il existe alors une partie B_ε de l'ensemble N des entiers naturels telle que pour toute partie finie J de N vérifiant $J\cap B=\emptyset$, on ait

$$\|(\lambda_i)_{i\in J}\|_p \leqslant \frac{\varepsilon}{\|\boldsymbol{x}\|_r^* \, \|\boldsymbol{y}\|_s^*}.$$

Donc

$$\|(\lambda_i)_{i\in J}\|_p \cdot \|(x_i)_{i\in J}\|_r^* \, \|(y_i)_{i\in J}\|_s^* \leqslant \varepsilon. \ \nabla$$

1.3. Proposition. *Soient E et F deux espaces de Banach, u un élément de $E \underset{p,r,s}{\hat{\otimes}} F$.*

α) *Alors il existe des suites $(x_i)_i$, $(y_i)_i$, $(\lambda_i)_i$ d'éléments respectivement dans E, F, C vérifiant:*

1. $\|\boldsymbol{x}\|_r^* < +\infty$, $\|\boldsymbol{y}\|_s^* < +\infty$, $\|\lambda\|_p < +\infty$, $\lambda \in c_0$.
2. $u = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i$, *la série convergeant dans* $E \underset{p,r,s}{\hat{\otimes}} F$.

β) *De plus, on a:*

$$\mu_{p,r,s}(u) = \inf\{\|\lambda\|_p \cdot \|\boldsymbol{x}\|_r^* \cdot \|\boldsymbol{y}\|_s^*\},$$

la borne inférieure étant cette fois prise sur l'ensemble des représentations de u de la forme $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} \lambda_i x_i \otimes y_i$, λ, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ ayant les propriétés indiquées ci-dessus.

△ α) Soit $u \in E \underset{p,r,s}{\hat{\otimes}} F$. Il existe par définition une suite $(u_n)_{n\in N}$ d'éléments de $E \otimes F$, avec:

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_{p,r,s}(u_n - u) = 0;$$

et l'on a $u = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n-1}) + u_0$.

En remplaçant, s'il le faut, $(u_n)_{n\in N}$ par une suite extraite, on peut supposer que

$$\mu_{p,r,s}(u_n - u_{n+1}) < \frac{1}{2^{3n+1}}.$$

Alors

$$u_n - u_{n-1} = \sum_{i=1}^{K(n)} \lambda_n^i x_n^i \otimes y_n^i$$

et l'on peut choisir ces décompositions de sorte que:

$$\|(\lambda_n^i)_{i\leqslant K(n)}\|_p \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad \|(x_n^i)_{i\leqslant K(n)}\|_r^* \leqslant \frac{1}{2^n}, \qquad \|(y_n^i)_{i\leqslant K(n)}\|_s^* \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

On a donc:

$$\|(\lambda_n^i)_{i,n}\|_p < +\infty, \qquad \|(x_n^i)_{i,n}\|_r^* < +\infty, \qquad \|(y_n^i)_{i,n}\|_s^* < +\infty,$$

et $(\lambda_n^i)_{i,n} \in c_0$.

La conclusion est immédiate à partir du lemme I.1.2, en prenant pour $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et λ les suites obtenues en plaçant bout à bout les (x_n^i), (y_n^i), (λ_n^i).

β) Calculons à présent la norme de u. D'après ce qui précède, on peut écrire, si $u \in E \underset{p,r,s}{\hat{\otimes}} F$;

$$u = \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j x_j \otimes y_j,$$

et on peut même supposer que pour tout ε positif, il existe un m_0 tel que $m > m_0$ entraîne:

$$(1) \qquad \|(\lambda_j)_{j>m}\|_p \leqslant \varepsilon, \qquad \|(x_j)_{j>m}\|_r^* \leqslant \varepsilon, \qquad \|(y_j)_{j>m}\|_s^* \leqslant \varepsilon.$$

Posons

$$u_m = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \otimes y_j.$$

On a:

$$\mu_{p,r,s}(u_m) \leqslant \|(\lambda_j)_{j\leqslant m}\|_p \cdot \|(x_j)_{j\leqslant m}\|_r^* \cdot \|(y_j)_{j\leqslant m}\|_s^*.$$

Donc à la limite:

$$\mu_{p,r,s}(u) \leqslant \|\lambda\|_p \, \|\boldsymbol{x}\|_r^* \, \|\boldsymbol{y}\|_s^*.$$

Il existe un m, tel que $\mu_{p,r,s}(u_m - u) \leqslant \varepsilon$ et les inégalités (1) soient vérifiées.

D'un autre côté, pour $j \leqslant m$, on peut choisir λ_j, x_j, y_j de sorte que:

$$\begin{aligned}\|(\lambda_j)_{j\leqslant m}\|_p \cdot \|(x_j)_{j\leqslant m}\|_r^* \cdot \|(y_j)_{j\leqslant m}\|_s^* &\leqslant \mu_{p,r,s}(u_m) + \varepsilon \\ &\leqslant \mu_{p,r,s}(u) + (1 + 1/2^{1/(\beta-1)})\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Donc il existe une constante ϱ ne dépendant que de u telle que, pour $j \leqslant m$, on puisse choisir λ_j, x_j, y_j avec:

$$\|(\lambda_j)_{j\leqslant m}\|_p \leqslant \varrho, \qquad \|(x_j)_{j\leqslant m}\|_r^* \leqslant \varrho, \qquad \|(y_j)_{j\leqslant m}\|_s^* \leqslant \varrho.$$

Alors puisque $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{r} \leqslant \frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{\beta}$, on obtient successivement:

$$\begin{aligned}&(\|\lambda\|_p \cdot \|\boldsymbol{x}\|_r^* \cdot \|\boldsymbol{y}\|_s^*)^\beta \\ &\quad\leqslant [\|(\lambda_j)_{j\leqslant m}\|_p^\beta + \|(\lambda_j)_{j>m}\|_p^\beta] \cdot \big[(\|(x_j)_{j\leqslant m}\|_r^*)^\beta + (y_j)_{j>m}\|_p^*)^\beta\big] \\ &\quad\leqslant [\mu_{p,r,s}(u) + (1 + 2^{1/(\beta-1)})\,\varepsilon]^\beta + 3\,(K^2\varepsilon)^\beta + 3\,(K\varepsilon^2)^\beta + 2^{3\beta} \\ &\quad\leqslant \mu_{p,r,s}^a(u) + \varepsilon'.\end{aligned}$$

L'inégalité en sens contraire étant triviale, ceci achève la démonstration. ▽

1.4. Remarque. Il est facile de constater que $\mu_{1,\infty,\infty}$ n'est autre que la norme Π de Grothendieck [2] et que, plus généralement, si p est supérieur ou égal à 1, $\mu_{p,\infty,p'}$ et $\mu_{p,p',\infty}$ sont respectivement les normes g_p et d_p de Saphar [20].

§ 2. Opérateurs (p, r, s)**-nucléaires.** La norme tensorielle $\mu_{p,r,s}$ permet de définir de manière naturelle un idéal quasi-normé d'opérateurs.

2.1. PROPOSITION. *Soient E et F deux espaces de Banach. L'injection canonique de $E' \underset{p,r,s}{\otimes} F$ dans $\mathscr{L}(E, F)$ est continue, et se prolonge en une application linéaire continue de norme inférieure ou égale à 1 de $E' \underset{p,r,s}{\hat{\otimes}} F$ dans $\mathscr{L}(E, F)$ notée $u \to \hat{u}$.*

△ Soit $u \in E' \otimes F$, $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \eta_i \otimes y_i$; on a pour tout $x \in E$:

(*)
$$\hat{u}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \eta_i, x \rangle y_i.$$

Donc

$$\|\hat{u}(x)\| = \sup \Big\{ \Big| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \eta_i, x \rangle \langle y_i, \xi \rangle \Big| ;\ \|\xi\| \leqslant 1,\ \xi \in F' \Big\}$$
$$\leqslant \sup \Big\{ \Big| \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{\beta} |\langle \eta_i, x \rangle|^{\beta} |\langle y_i, \xi \rangle|^{\beta} \Big|^{1/\beta} \Big\},$$

puisque $\beta \leqslant 1$,

$$\leqslant \|\lambda\|_p \|\boldsymbol{y}\|_s^* \|\eta\|_r^* \|x\|,$$

en utilisant l'inégalité de Hölder. De plus, ce calcul étant valable pour toutes les représentations de $\hat{u}$ sous la forme (*), on en déduit:

$$\|\hat{u}(x)\| \leqslant \nu_{p,r,s}(u) \|x\|. \ \triangledown$$

On dira qu'un opérateur T continu de E dans F est (p, r, s)-nucléaire s'il appartient à l'image de $E' \underset{p,r,s}{\hat{\otimes}} F$ par l'application définie ci-dessus. L'ensemble des tels opérateurs est noté $\mathscr{N}_{p,r,s}(E, F)$.

On a le résultat suivant:

2.2. PROPOSITION. *Si, pour $T \in \mathscr{N}_{p,r,s}(T)$, $\nu_{p,r,s}(T)$ désigne la borne inférieure des quantités $\|\lambda\|_p \|\eta\|_r^* \|\boldsymbol{y}\|_s^*$ telles que l'on ait:*

$$\forall x \in E,\ T(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i \langle \eta_i, x \rangle y_i.$$

Alors le couple $(\mathscr{N}_{p,r,s}, \nu_{p,r,s})$ est un idéal β-normé complet $\left(\frac{1}{\beta} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s}\right)$.

△ C'est une vérification tatillonne des conditions de 0.3. ▽

2.3. Remarque. 1. Si E' et F possèdent la propriété d'approximation métrique, on sait que l'application de $E' \underset{p,r,s}{\hat{\otimes}} F$ dans $\mathscr{L}(E, F)$ est injective ([20] 4 — proposition 1.2).

2. La définition de $\mathscr{N}_{p,r,s}$ est identique à celle de Pietsch [17].

2.4. PROPOSITION. *Tout opérateur (p, r, s) nucléaire est compact.*

△ Si T est (p, r, s)-nucléaire, il est limite en norme $\nu_{p,r,s}$ d'opérateurs de rang fini, et donc cette propriété est à fortiori réalisée pour la norme usuelle des opérateurs. ▽

D'un autre côté, cette classe d'opérateurs peut s'exprimer en termes de factorisation à travers les espaces l_q, de la manière suivante:

2.5. THÉORÈME. 1. *Si l'on a $s \geqslant 1$, il est équivalent de dire que T est un opérateur (p, r, s)-nucléaire, ou qu'il admet la factorisation suivante:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & F \\ l_r \arrow[r, "M_\lambda"'] & l_{s'} \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}, \qquad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1,$$

où A et B sont des opérateurs linéaires continus, et M_λ est un opérateur de multiplication par une suite $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ de l_p (c_0 si $p = +\infty$). De plus, on a:

$$\nu_{p,r,s}(T) = \inf\{\|A\|\, \|\lambda\|_p \|{}^tB\|;\ BM_\lambda A = T\}.$$

2. *Si on a $s < 1$ l'assertion reste valable en prenant soin de remplacer s' par $+\infty$, et en supposant que B est non seulement un opérateur continu mais encore un morphisme de l'espace à dual quasi-normé $\sigma(l_\infty, l_s)$,* [22].

△ Si $T \in \mathscr{N}_{p,r,s}(E, F)$, il peut s'écrire $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \eta_n \otimes y_n$, avec:

(*)
$$\|\lambda\|_p \|\eta\|_r^* \|\boldsymbol{y}\|_s^* \leqslant \nu_{p,r,s}(T) + \varepsilon.$$

Considérons alors les opérateurs:

$A: E \to l_r: x \to (\langle x, \eta_n \rangle)_{n \in \boldsymbol{N}}$,

$M_\lambda: l_r \to l_{s'}: (\xi_n)_{n \in \boldsymbol{N}} \to (\lambda_n \xi_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$,

${}^tB: F' \to l_s: \zeta \to (\langle y_n, \zeta \rangle)_{n \in \boldsymbol{N}}$ (B est l'application $\lambda_n \to \sum_n \lambda_n y_n$ de $l_{s'}$, dans F).

Il est alors facile de voir que l'on a $T = BM_\lambda A$ et que

$$\|{}^tB\| = \|\boldsymbol{y}\|_s^*, \qquad \|A\| = \|\eta\|_r^*;$$

c'est-à-dire

(**)
$$\|A\|\, \|\lambda\|_p \|{}^tB\| \leqslant \nu_{p,r,s}(T) + \varepsilon.$$

Réciproquement, si $T = BM_\lambda A$ et si (**) est vérifiée, on pose:

$$\eta = \big({}^tA(e_n)\big)_{n \in \boldsymbol{N}}, \qquad \boldsymbol{y} = \big(B(e_n)\big)_{n \in \boldsymbol{N}}, \qquad (e_n = (\delta_{i,n})_i);$$

et l'on voit que λ, η, $\boldsymbol{y}$ vérifient les conditions de 2.1 et l'inégalité (*). ▽

Dans le cas où $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, on peut préciser le résultat de la manière suivante:

2.6. Proposition. *Si* $\frac{1}{p}+\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$, *et* M_λ *est un opérateur diagonal de* l_r *dans* $l_{s'}$, *on a* $\|M_\lambda\| = \nu_{p,r,s}(M_\lambda)$.

$\triangle$ Il est aisé de voir dans ce cas que $\|M_\lambda\| = \|\lambda\|_p$; le résultat s'en suit car:

$$\|M_\lambda\| \leqslant \nu_{p,r,s}(M_\lambda) \leqslant \|\lambda\|_p = \|M_\lambda\|. \ \triangledown$$

CHAPITRE II

LE DUAL TOPOLOGIQUE DE $E \underset{p,r,s}{\otimes} F$

LES OPÉRATEURS (p, r, s)-SOMMANTS

§ 1. Le dual de $E \underset{p,r,s}{\otimes} F$.

1.1. Nous allons déterminer le dual topologique de $E \underset{p,r,s}{\otimes} F$. Soit donc $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i$ un élément de $E\otimes F$; si T est une forme linéaire continue sur $E \underset{p,r,s}{\otimes} F$, on a:

$$|T(u)| \leqslant \|T\| \mu_{p,r,s}(u) \leqslant \|T\| \, \|\lambda\|_p \|x\|_r^* \|y\|_s^*;$$

Mais T définit une application linéaire $\check{T}$ de E dans F' par

$$T(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle \check{T}x_i, y_i\rangle,$$

et on a finalement pour toutes suites finies $(x_i)_{i\leqslant n}$, $(y_i)_{i\leqslant n}$, $(\lambda_i)_{i\leqslant n}$:

$$\Big|\sum \lambda_i \langle \check{T}x_i, y_i\rangle\Big| \leqslant \|T\| \, \|\lambda\|_p \|x\|_r^* \|y\|_s^*.$$

Introduisons la définition:

1.2. Définition. Un opérateur linéaire continu de E dans F est dit (p, r, s)-*sommant* s'il existe une constante $\varrho(T)$ ne dépendant que de T telle que, pour tout entier naturel n et pour toutes familles finies $x = (x_i)_{i\leqslant n}$, $\eta = (\eta_i)_{i\leqslant n}$ de vecteurs respectivement dans E et F', on ait:

$$(*) \qquad \Big(\sum |\langle Tx_i, \eta_i\rangle|^p\Big)^{1/p} \leqslant \varrho(T) \|x\|_r^* \|\eta\|_s^*.$$

L'ensemble des opérateurs (p, r, s)-sommant de E dans F sera noté $\Pi_{p,r,s}(E, F)$.

On pose si $T \in \Pi_{p,r,s}(E, F)$:

$$\pi_{p,r,s}(T) = \inf \varrho(T) \quad \text{pour lesquels } (*) \text{ est vraie.}$$

Il est facile de voir que pour chaque couple (E, F) d'espaces de Banach, $\Pi_{p,r,s}(E, F)$ est un espace vectoriel. On a le théorème:

1.3. Théorème. *L'espace* $(E \underset{p,r,s}{\otimes} F)'$ *muni de la norme du dual est un espace de Banach canoniquement isométrique à l'espace:*

$$(\Pi_{p',r,s}(E, F'), \pi_{p',r,s}) \quad \textit{avec} \quad \begin{cases} 1/p + 1/p' = 1 & si\ p \geqslant 1, \\ p' = +\infty & si\ p < 1. \end{cases}$$

D'après 1.1 es la réciproque de l'inégalité de Hölder généralisée, on a, si $T \in (E \underset{p,r,s}{\otimes} F)'$, $\check{T} \in \Pi_{p',r,s}(E, F')$ et $\pi_{p',r,s}(\check{T}) \leqslant \|T\|$.

Réciproquement, si $T \in \Pi_{p',r,s}(E, F')$, on voit en prenant des suites réduites à un élément, que T est un opérateur continu de E dans F', et donc définit une forme linéaire sur $E\otimes F$ par:

$$\hat{T}(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle Tx_i, y_i\rangle.$$

Alors:

$$|\hat{T}(u)| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle Tx_i, y_i\rangle\Big| \leqslant \|\lambda\|_p \Big(\sum |\langle Tx_i, y_i\rangle|^{p'}\Big)^{1/p'}$$
$$\leqslant \|\lambda\|_p \pi_{p',r,s}(T) \|y\|_r^* \|x\|_s^*;$$

puisque T est (p', r, s)-sommant. Mais comme cette inégalité est valable pour toutes les représentations de u de la forme $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \otimes y_i$, on obtient:

$$|\hat{T}(u)| \leqslant \pi_{p',r,s}(T) \pi_{p,r,s}(u). \ \triangledown$$

§ 2. Les opérateurs (p, r, s)-sommants.

Ces operateurs ont été introduits par Pietsch dans [17], où il en donne, sans démonstration, les propriétés élémentaires. Rappelons-les en démontrant brièvement les plus intéressantes.

2.1. Théorème. 1. *Si le triplet* (p, r, s) *vérifie* $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{r}+\frac{1}{s}$, $(\Pi_{p,r,s}, \pi_{p,r,s})$ *est alors un idéal d'opérateurs quasi normé complet. (En fait normé si* $p \geqslant 1$, p-*normé si* $p \leqslant 1$).

2. *Dans le cas contraire, pour tout couple d'espaces de Banach* $\Pi_{p,r,s}(E, F) = \{0\}$.

$\triangle$ De même que pour I.2.2 il s'agit de vérifier les conditions de 0.3. Nous ne le ferons pas. $\triangledown$

2.2. Théorème. *Si les deux triplets* (p_0, r_0, s_0) *et* (p, r, s) *vérifient:*

$$\begin{cases} ① \ p_0 \leqslant p, \ r_0 \leqslant r, \ s_0 \leqslant s, \\ ② \ \dfrac{1}{p_0} - \Big(\dfrac{1}{r_0}+\dfrac{1}{s_0}\Big) \geqslant \dfrac{1}{p} - \Big(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{s}\Big). \end{cases}$$

On a

$$\Pi_{p_0,r_0,s_0} \subset \Pi_{p,r,s}, \quad et \quad \pi_{p_0,r_0,s_0} \geqslant \pi_{p,r,s}.$$

$\triangle$ Posons $\dfrac{1}{m_1} = \dfrac{1}{r_0} - \dfrac{1}{r}$, $\dfrac{1}{m_2} = \dfrac{1}{s_0} - \dfrac{1}{s}$. Par hypothèse, on peut écrire également:

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{k_j} \geqslant \frac{1}{m_j}, \quad j = 1, 2.$$

Soient alors λ, μ deux familles de n scalaires avec $\|\lambda\|_{k_1} \leqslant 1$, $\|\mu\|_{k_2} \leqslant 1$.

Celà entraîne:

$$\|\lambda\|_{m_1} \leqslant 1, \quad \|\mu\|_{m_2} \leqslant 1.$$

Donc:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^{p_0} |\mu_i|^{p_0} |\langle Tx_i, \eta_i\rangle|^{p_0}\Big)^{1/p_0} \leqslant \pi_{p_0,r_0,s_0}(T) \|\lambda x\|_{r_0}^{*} \|\mu\eta\|_{s_0}^{*}$$
$$< \pi_{p_0,r_0,s_0}(T) \|x\|_r^{*} \|\eta\|_s^{*}.$$

Finalement, on a par la réciproque de l'inégalité de Hölder:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle Tx_i, \eta_i\rangle|^{p}\Big)^{1/p} \leqslant \pi_{p_0,r_0,s_0}(T) \|x\|_r^{*} \|\eta\|_s^{*}. \ \triangledown$$

2.3. Remarques. 1. L'idéal $(\Pi_{p,r,s}, \pi_{p,r,s})$ est un idéal régulier, c'est-à-dire que si $T \in \mathscr{L}(E, F)$ et $B_F T \in \Pi_{p,r,s}(E, F'')$, alors $T \in \Pi_{p,r,s}(E, F)$.

2. Il est équivalent de dire $T \in \Pi_{p,r,s}(E, F)$, et ${}^tT \in \Pi_{p,s,r}(F', E')$.

Donnons à présent d'autres propriétés des opérateurs (p, r, s)-sommant. Le théorème qui suit décrit partiellement la situation dans le cas des espaces de Hilbert.

2.4. Théorème. *Si H est un espace de Hilbert et si $p \in [1, +\infty]$, on a pour tout triplet (p, r, s), tel que $(r, s) \in \bar{R}_+^2/(]2, +\infty])^2$:*

1. $\Pi_{p,r,s}(H, H) = \mathscr{S}_m(H, H)$, *si* $\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{s_{\Lambda 2}} - \dfrac{1}{r_{\Lambda 2}} + 1 > 0$.

2. $\Pi_{p,r,s}(H, H) = \mathscr{L}(H, H)$, *si* $m = +\infty$.

$\triangle$ 1. (α) Supposons d'abord que $r \leqslant 2$ et $s \leqslant 2$ il existe alors deux réels p_1 et p_2, avec $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2}$ vérifiant de plus:

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \geqslant 0, \quad \frac{1}{m_2} = \frac{1}{p_2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \geqslant 0.$$

Si $T \in \mathscr{S}_m(H, H)$, T peut évidemment alors s'écrire:

$$T = T_1 \circ T_2 \quad \text{avec} \quad {}^tT_1 \in \mathscr{S}_{m_1}(H, H), \ T_2 \in \mathscr{S}_{m_2}(H, H).$$

Le théorème (2.1) de Kwapień [4] assure alors que l'on a:

$${}^tT_1 \in \Pi_{p_1,s,\infty}(H, H); \qquad T_2 \in \Pi_{p_2,r,\infty}(H, H).$$

Alors:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\langle T_1 \circ T_2 x_i, y_i\rangle|^{p}\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \|T_2 x_i\|^p \|{}^tT_1 y_i\|^p\Big)^{1/p},$$
$$\leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} \|T_2 x_i\|^{p_2}\Big)^{1/p_2} \Big(\sum_{i=1}^{n} \|{}^tT_1 y_i\|^{p_1}\Big)^{1/p_1}$$
$$\leqslant \pi_{p_1,s,\infty}({}^tT_1)\, \pi_{p_2,r,\infty}(T_2) \|x\|_r^{*} \|y\|_s^{*}.$$

(On remarque que $\Pi_{p,q,\infty}$ n'est autre que l'idéal noté $\Pi_{p,q}$ dans [4].) Réciproquement, par le théorème de croissance II.2.2, on sait que dans les hypothèses ci-dessus, on a $\Pi_{p,r,s}(H, H) \subset \Pi_{m,2,2}(H, H)$, et donc il suffit de voir que $\Pi_{m,2,2}(H, H)$ est inclus dans $\mathscr{S}_m(H, H)$, mais c'est un résultat connu [16].

(β) si $r \leqslant 2$, $s \geqslant 2$; on a par le théorème II.2.2:

$$\Pi_{p,r,2} \subset \Pi_{p,r,s} \subset \Pi_{p,r,\infty}.$$

On vient de voir que $\Pi_{p,r,2}(H, H) = \mathscr{S}_m(H, H)$ comme le théorème de Kwapień déjà cité donnait $\Pi_{p,r,\infty}(H, H) = \mathscr{S}_m(H, H)$, on a le résultat.

(γ) le cas $r \geqslant 2$, $s \leqslant 2$ se déduit de (β) par transposition.

2. Il suffit évidemment dans ce cas de considérer $\Pi_{1,1,1}(H, H)$ et de voir que

$$\mathrm{id}_H \in \Pi_{1,1,1}(H, H),$$

on a:

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, y_i\rangle| \leqslant \Big(\sum \|x_i\|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum \|y_i\|^2\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant \pi_{2,1,\infty}^2(\mathrm{id}_H) \|x\|_1^{*} \|y\|_1^{*},$$

puisque H possède la propriété d'Orlicz. $\triangledown$

Au chapitre suivant, le théorème III donnera un résultat plus complet dans le cas particulier où $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s}$.

Rappelons à présent la définition suivante concernant les idéaux d'opérateurs

2.5. Définition. Un idéal d'opérateurs $\mathscr{A}$ est dit propre si pour tout espace de Banach E de dimension infinie on a $\mathrm{id}_E \notin \mathscr{A}_{(E,E)}$.

Nous montrerons (résultat déjà connu) que $\Pi_{2,2,2}$ n'est pas un idéal propre.

Mais nous pouvons affirmer, répondant à une question de A. Pietsch, que l'on a:

2.6. Théorème. *Si $m < 2$ l'idéal $(\Pi_{m,2,2}, \pi_{m,2,2})$ est propre.*

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du:

2.7. Lemme. *L'injection canonique j de l_2 dans l_∞ n'est pas $(m, 2, 2)$-sommante si $m < 2$.*

△ Si j était $(m, 2, 2)$-sommante et si M_a est un opérateur diagonal de l_∞ dans l_2 défini par la suite $a \in l_2$; on aurait:

$$M_a \circ j \in \Pi_{m,2,2}(l_2, l_2),$$

et donc $a \in l_m$ d'après le théorème 2.4, de qui est évidemment en général faux.

Démontrons donc 2.6:

△ Le théorème de Dvoretzski [10] affirme que pour tout entier naturel n, il existe deux opérateurs u_n et v_n, $u_n \in \mathscr{L}(l_2^n, E)$, $v_n \in \mathscr{L}(E, l_\infty^n)$ avec $v_n \circ u_n = j_n$, $\|v_n\| \cdot \|u_n\| \leqslant 2$, (où j_u est l'injection canonique de l_2^n dans l_∞^n).

Si $\mathrm{id}_E \in \Pi_{m,2,2}(E, E)$, on a alors que l'opérateur:

$$T_n: l_2 \xrightarrow{\Pi_n} l_2^n \xrightarrow{u_n} E \xrightarrow{v_n} l_\infty^n \xrightarrow{\sigma_n} l_\infty$$

(où Π_n est la projection canonique de l_2 sur l_2^n et σ_n l'injection canonique de l_∞^n dans l_∞), est également $(m, 2, 2)$-sommant et de plus que

$$\pi_{m,2,2}(T_n) \leqslant 2\pi_{m,2,2}(\mathrm{id}_E).$$

Donc, par définition de $\pi_{m,2,2}$, on a:

$$\Big(\sum_{i=1}^n |\langle T_n x_i, y_i\rangle|^m\Big)^{1/m} \leqslant 2\pi_{m,2,2}(\mathrm{id}_E)\, \|x\|_2^* \, \|\boldsymbol{y}\|_2^*.$$

Mais T_n converge simplement vers j; donc en passant à la limite:

$$\Big(\sum_{i=1}^n |\langle j x_i, y_i\rangle|^m\Big)^{1/m} \leqslant 2\pi_{m,2,2}(\mathrm{id}_E)\, \|x\|_2^* \, \|\boldsymbol{y}\|_2^*,$$

ce qui contredit le lemme 2.7. ▽

2.8. Remarque: $\Pi_{2,2,2}$ n'est pas un idéal propre.

△ A. Pietsch a montré [16] que pour qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(E, F)$ soit $(2, 2, 2)$-sommant, il suffisait que pour tout A, B opérateurs continus, respectivement de l_2 dans E et de F dans l_2, BTA soit de Hilbert–Schmidt.

C'est le cas pour id_{L^1} ou id_{L^∞} d'après Grothendieck [2]. ▽

CHAPITRE III

COMPLEMENT SUR LES OPÉRATEURS (p, r, s)-SOMMANTS DANS LE CAS $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$

OPÉRATEURS DE TYPE ${}^t\Pi_s\Pi_r$

§ 1. Opérateurs de types ${}^t\Pi_s\Pi_r$. Dans le cas où $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$, nous allons voir que les éléments de $\Pi_{p,r,s}$ s'expriment simplement en fonction de ceux de Π_r et Π_s (cf. 0.4); plus précisément, nous avons le théorème démontré par Kwapień [6] dans le cas $p = 1$.

1.1. Théorème. *Soient $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$, E et F deux espaces de Banach; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

① *$T \in \Pi_{p,r,s}(E, F)$.*

② *Il existe une constante finie ϱ et deux probabilités de Radon μ et ν, portées respectivement par les boules unités $U_{E'}$ et $U_{F''}$ de E' et F'', telles que pour tout x de E et η de F' on ait:*

$$(*) \qquad |\langle Tx, {}^r\eta\rangle| \leqslant \varrho \Big(\int_{U_{E'}} |\langle x, a\rangle|^r d\mu(a)\Big)^{1/r} \Big(\int_{U_{F''}} |\langle \eta, \beta\rangle|^s d\nu(\beta)\Big)^{1/s}.$$

③ *T admet la factorisation suivante:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "w"] \arrow[drrr, "T"'] & G_r \arrow[r, "v"] & H'_s \arrow[r, "{}^t u"] & F'' \\ & & & F \arrow[u, "B_F"'] \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme G_r est un sous-espace de $L^r(\Omega_1, \mu_1)$, H'_s le dual de H_s sous-espace de $L^s(\Omega_2, \mu_2)$ ((Ω_i, μ_i) espaces probabilisés); v est un opérateur continu, w est r-sommant et ${}^t u$ désigne le transposé de u opérateur s-sommant de F' dans Π_s.

④ *Il existe un espace de Banach G et deux opérateurs A, B: A r-sommant de E dans G, ${}^tB$ s-sommant de F' dans G', avec $T = B \circ A$.*

△ Nous nous cantonnerons au cas où r et s sont différents de $+\infty$. En effet, si $r = +\infty$ $\Pi_{r,r,\infty} = \Pi_r$, et le résultat n'est autre que l'existence de la factorisation de Pietsch d'un opérateur r-sommant [13]. Si $s = +\infty$, le résultat se déduit du précédent par transposition.

Nous allons montrer ① ⇒ ② ⇒ ③ ⇒ ④ ⇒ ①.

① ⇒ ② Considérons l'espace topologique faiblement compact K, $K = U_{E'} \times U_{F''}$, et soit C le sous-ensemble de $\mathscr{C}(K)$ constitué par les fonctions de la forme:

$$(\xi, \eta) \mapsto g(\xi, \eta) = \pi_{p,r,s}^p(T)\left[\frac{p}{r}\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi\rangle|^t + \frac{p}{s}\sum_{i=1}^n |\langle y_i, \eta\rangle|^s\right] - \sum_{i=1}^n |\langle Tx_i, y_i\rangle|^p,$$

où $(x_i)_{i\leqslant n}$ et $(y_i)_{i\leqslant n}$ sont deux familles de vecteurs respectivement dans E et F'. C'est évidemment un cône convexe de fonctions réelles. De plus, la relation:

$$\left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi\rangle|^r\right)^{p/r}\left(\sum_{i=1}^n |\langle y_i, \eta\rangle|^s\right)^{p/s} \leqslant \frac{p}{r}\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi\rangle|^r + \frac{p}{s}\sum_{i=1}^n |\langle y_i, \xi\rangle|^s,$$

puisque $\frac{p}{r} + \frac{p}{s} = 1$, et la définition de $\pi_{p,r,s}(T)$ montrent que chacun des éléments de C atteint sur K un maximum positif ou nul.

Le théorème de Hahn–Banach donne alors l'existence d'une mesure de probabilité λ sur K telle que $\lambda(g)$ soit positif ou nul pour tout g de C.

Appliquons ce résultat à la fonction:

$$g_0(\xi, \eta) = \Pi_{p,r,s}^p(T)\left[\frac{p}{r}|\langle x, \xi\rangle|^r + \frac{p}{s}|\langle y, \eta\rangle|^s\right] - |\langle Tx, y\rangle|^p.$$

On a alors:

$$(**)\qquad |\langle Tx, y\rangle|^p \leqslant \Pi_{p,r,s}^p(T)\left[\frac{p}{r}\int_K |\langle x, \xi\rangle|^r d\lambda(\xi, \eta) + \frac{p}{s}\int_K |\langle y, \xi\rangle|^s d\lambda(\xi, \eta)\right].$$

Soit alors θ un réel strictement positif. Par homogénéité, on voit que dans $(**)$ on peut remplacer x par θx et y par y/θ sans modifier le premier membre; on conclut alors en utilisant l'égalité élémentaire:

$$a\cdot b = \inf_{\theta>0}\left(\frac{1}{a}\,\theta^a a^a + \frac{1}{\beta}\,\theta^{-\beta} b^\beta\right), \text{ dès que } \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

et en prenant pour μ et ν les projections de λ respectivement sur U_E et $U_{F''}$.

② ⇒ ③. Soit w_0 l'application de E dans $L^r(U_E, \mu)$ définie par:

$$w_0(x)(\eta) = \langle x, \eta\rangle \quad \text{pour} \quad \eta \in U_{E'}$$

et de même u_0 de F' dans $L^s(U_{F''}, \nu)$:

$$u_0(y)(\xi) = \langle \xi, y\rangle \quad \text{pour} \quad \xi \in U_{F''}.$$

Posons $G_r = \overline{w_0(E)}$ (adhérence dans $L^r(U_{E'}, \mu)$; $H_s = \overline{u_0(F')}$ (adhérence dans $L^s(U_{E'}, \mu)$); et soient w et u les applications w_0 et u_0 considérées à présent comme à valeurs dans G_r et H_s respectivement. Les opérateurs w et u sont de manière évidente respectivement r et s-sommant et de plus $\Pi_r(w) \leqslant 1$, $\Pi_s(u) \leqslant 1$.

D'un autre côté, étant donné l'inégalité $(*)$ l'application bilinéaire de $w_0(E)\times U_0(F')$ dans C:

$$v_0\colon \big(w(x), u(y)\big) \mapsto \langle Tx, y\rangle,$$

est bien définie et continue; donc elle s'étend en une forme bilinéaire continue $\tilde{v}_0$ de $G_r \times H_s$ dans C avec conservation de la norme, et induit naturellement une application linéaire continue ν de G_r dans H_s'.

Alors, on a, si $x \in E$ et $y \in F'$:

$$\langle {}^t uvwx, y\rangle = \langle vwx, uy\rangle = v_0(wx, uy) = \langle B_F Tx, y\rangle.$$

③ ⇒ ④. Il suffit de constater que ${}^t u\circ v$ est en fait à image dans F et de poser $A = w$, $B = {}^t u\circ v$.

④ ⇒ ①. C'est une simple conséquence de l'inégalité de Hölder. ▽

1.2. Remarques: *a*) Il est facile de constater que l'on a $\pi_{p,r,s}(T) = \inf\{\pi_r(A)\pi_s({}^tB)\}$, la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des décompositions décrites en ④.

β) Si $r < 1$, $s \geqslant 1$ le théorème est encore vrai.

Si $r \geqslant 1$, $s < 1$, on n'a plus de factorisation du type ③ mais encore ① ⇔ ② ⇔ ④ en appliquant le théorème à ${}^tT$.

Si $r < 1$, $s < 1$, on a toujours ④ ⇒ ① ⇔ ②. On peut se demander si en fait on a dans tous les cas ④ ⇔ ①?

Les dernières remarques [2] suggèrent l'introduction de la définition suivante:

1.3. Définition. Si T est un opérateur linéaire continu de E dans F, on dit que T est de type ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ si et seulement s'il existe un espace de Banach G et deux opérateurs A, B: A r-sommant de E dans G, ${}^tB$ s-sommant de F' dans G' avec $T = B\circ A$.

L'ensemble des tels opérateurs de E dans F sera noté ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r(E, F)$.

On pose si $T \in {}^t\Pi_s\cdot\Pi_r(E, F)$:

$${}^t\pi_s\cdot\pi_r(T) = \inf\{\pi_s({}^tB)\cdot\pi_r(A)\},$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des factorisations de T.

[2] Ainsi que la dernière partie du chapitre V.

Dans les 3 premiers cas décrits par la remarque III.1.2 (${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$, ${}^t\pi_s\cdot\pi_r$) coïncide donc avec ($\Pi_{p,r,s}$, $\pi_{p,r,s}$) où $\frac{1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$; et on a en général le théorème

1.4. Théorème. *(${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$, ${}^t\pi_s\cdot\pi_r$) est un idéal quasi-normé d'opérateurs.*

$\triangle$ La démonstration aisée est laissée au lecteur. $\triangledown$

§ 2. Exemples d'operateurs de type ${}^t\Pi_s\Pi_r$.

2.1. Théorème. ① *Pour tout couple (r, s) on a l'inclusion:*

$$\mathcal{N}_{1/2,\infty,\infty}\subset {}^t\Pi_s\cdot\Pi_r.$$

② *Si* $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}\leqslant 1$, $\mathcal{N}_{1,\infty,\infty}\subset {}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$.

③ *Soit λ une suite de l_1^+; si $\lambda\notin l_{1/2}$, l'opérateur M_λ de l_∞ dans l_1 n'est pas de type ${}^t\Pi_1\cdot\Pi_1$.*

$\triangle$ ① Il suffit évidemment (cf. I.2.5) de montrer qu'un opérateur diagonal de l_∞ dans l_1, défini par une suite de $l_{1/2}$ est de type ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$, pour cela, considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
l_\infty \arrow[r, "M_\lambda"] \arrow[d, "A=M_{\sqrt{\lambda}}"'] & l_1 \\
l_1 \arrow[r, "i"'] & l_2 \arrow[u, "M_{\sqrt{\lambda}}=B"']
\end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique de l_1 dans l_2.

On sait que i est q-sommante pour tout q positif [21]. De plus, on peut remarquer que ${}^tB=i\circ M_{\sqrt{\lambda}}$. Donc ${}^tB$ est également q-sommant pour tout q.

② est un cas particulier du fait que pour tout idéal *normé* contient les opérateurs nucléaires [17].

③ Soit $(e_n)_n$ la „base" canonique de l_∞; si $M_\lambda\in{}^t\Pi_1\cdot\Pi_1$, on a, en particulier:

$$\Big(\sum_{n=1}^{p}\lambda_n^{1/2}\Big)^2=\Big(\sum_{n=1}^{p}|\langle M_\lambda e_n, e_n\rangle|^{1/2}\Big)^2\leqslant {}^t\pi_1\pi_1(M_\lambda)\,\|e\|_1^*\,\|e\|_1^*\leqslant {}^t\pi_1\cdot\pi_2(M_\lambda);$$

ce qui contredit $\lambda\notin l_{1/2}$. $\triangledown$

Si H est un espace de Hilbert, on peut caractériser totalement les opérateurs de type ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ de H dans lui-même.

2.2. Théorème. ① ${}^t\Pi_\infty\cdot\Pi_\infty(H, H)=\mathcal{L}(H, H)$.

② *Si $r=+\infty$ et $s\neq+\infty$ ou $r\neq+\infty$ et $s=+\infty$, on a:*

$${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r(H, H)=\mathcal{S}_2(H, H)$$

(opérateurs de Hilbert Schmidt).

③ *Si $r\cdot s\neq+\infty$, ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r(H, H)=\mathcal{S}_1(H, H)$ (opérateurs nucléaires).*

$\triangle$ L'assertion ① est triviale; ② a été démontrée par Pełczyński [12]. Montrons ③.

Si $T\in\mathcal{S}_1(H, H)$ il est bien connu que T peut s'écrire $T_1\circ T_2$ où T_1 et T_2 (donc ${}^tT_1$ et T_2) sont des opérateurs de Hilbert–Schmidt). Donc, d'après l'assertion ② ${}^tT_1\in\Pi_s(H, H)$ et $T_2\in\Pi_r(H, H)$ soit par conséquent $T\in{}^t\Pi_s\cdot\Pi_r(H, H)$. Réciproquement, si T est de type ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$, T est en particulier r-sommant. Comme H est réfléxif T est donc compact [13] et on peut par conséquent se ramener par la décomposition spectrale des opérateurs compacts d'un espace de Hilbert (cf. [19] par exemple) au cas où T est diagonal:

$$T=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n e_n\otimes e_n,$$

où $(e_n)_{n\in N}$ est un système orthonormal de H et λ une suite de c_0^+.

Soit alors $S=\sqrt{T}$ l'opérateur de multiplication par la suite $\sqrt{\lambda}$. Si S^* désigne l'adjoint de S, on a:

$$S=S^*\quad\text{et}\quad T=S^*\circ S.$$

Soit $q=\sup(r, s)$. Par le théorème II.2.2 T est $(q/2, q, q)$-sommant, et on a donc:

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{i=1}^{n}\|Sx_i\|^q\Big)^{2/q}&=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\langle Sx_i, S^*x_i\rangle|^{q/2}\Big)^{2/q}\\&=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\langle Tx_i, x_i\rangle|^{q/2}\Big)^{2/q}\leqslant\pi_{q/2,q,q}(T)\,(\|x\|_q^*)^2;\end{aligned}$$

ce qui montre que S est q-sommant et par conséquent d'après ② $\sqrt{\lambda}\in l_2$; donc $\lambda\in l_1$ et $T\in\mathcal{S}_1(H, H)$. $\triangledown$

Un théorème de A. Pietsch [16] permet alors de prouver le corollaire suivant

2.3. Corollaire. *Si le couple (r, s) appartient á $(]0, +\infty[)^2$, on a:*

① *L'idéal ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ est inclus dans ${}^t\Pi_2\cdot\Pi_2$, l'égalité ayant lieu si r et s sont supérieurs ou égaux á 2 et l'injection de ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ dans ${}^t\Pi_2\cdot\Pi_2$ est dans tous les cas continue.*

② *Un opérateur de type ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ est r_{Λ^2}-sommant et son transposé s_{Λ^2}-sommant.*

③ *Le produit de deux opérateurs de type ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ est nucléaire.*

△ ① L'inclusion ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r \subset {}^t\Pi_2\cdot\Pi_2$ provient de la conjonction du théorème III.2.2 et de [16]; l'égalité dans le cas où r et s sont plus grands que 2 est une conséquence du théorème II.2.2. La continuité se démontre par un argument de graphe fermé.

② C'est évident d'après l'assertion ①.

③ Le produit de deux opérateurs 2-sommants est nucléaire! [13]. ▽

2.4. PROPOSITION. ① *Si $1 \leqslant p \leqslant 2$, un opérateur diagonal M_λ de l_p dans l_2 est de type*

$$ {}^t\Pi_s\cdot\Pi_r \quad \textit{ssi} \quad \lambda \in l_k, \quad \textit{avec} \quad \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p'}; \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right). $$

② *Si $p \geqslant 2$ et $\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} \leqslant 1$, M_λ est de type ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ ssi $\lambda \in l_1$.*

△ Montrons d'abord que les conditions données dans ① et ② sont suffisantes.

① Si $1 \leqslant p \leqslant 2$ alors M admet la factorisation:

$$ l_p \xrightarrow{M_\alpha} l_1 \xrightarrow{i} l_2 \xrightarrow{M_\beta} l_2 $$

avec $\alpha = \lambda^{k/p'}$, $\beta = \lambda^{k/2}$ et où i est l'injection canonique. Mais i est r-sommante pour tout r et M_β est de Hilbert–Schmidt.

② Si $p \geqslant 2$ les conditions impliquent que ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ est un idéal normé et que M_λ est un opérateur nucléaire.

Réciproquement, pour montrer la nécessité, il suffit de le faire en supposant que $T \in {}^t\Pi_2\cdot\Pi_2(l_p, l_2)$. D'après III.2.2 si M_λ est type ${}^t\Pi_2\cdot\Pi_2$, il faut que pour tout opérateur T, $T: l_2 \to l_p$, on ait

$$ M_\lambda \circ T \in \mathscr{S}_1(l_2, l_2). $$

En particulier, si $T = M_\beta$, il faut que $\beta\lambda \in l_1$. Mais M_β ne définit pas toujours un opérateur de l_2 dans l_p; il faut, dans le premier cas que $\beta \in l_{k'}$, $\left(\dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{k'} = 1\right)$, dans le second $\beta \in l_\infty$. D'où la conclusion. ▽

2.5. PROPOSITION. *Tout opérateur diagonal de l_1 dans c_0 (dans l_∞) défini par une suite de c_0 est de type ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ pour tout couple r, s.*

△ L'injection canonique j de l_1 dans c_0 s'écrit $j = n \circ i$, où i est l'injection de l_1 dans l_2 et ${}^tu = i$. ▽

2.6. Remarques. Notons qu'une simple application du théorème de dualité (I.3) permettrait d'obtenir la traduction en termes d'opérateurs nucléaires de II.2.2, II.2.4, III.2.2, III.2.3. Nous ne le ferons pas ici.

CHAPITRE IV

LES OPÉRATEURS DE TYPE (r, s)-FACTORISABLE L'ADJOINT DE ${}^t\Pi_s\Pi_r$

§1. L'adjoint de $(\mathscr{N}_{p,r,s}, \nu_{p,r,s})$ dans le cas $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$. Rappelons tout d'abord la définition suivante due à A. Pietsch [14].

1.1. DÉFINITION. L'adjoint $(\mathscr{A}^*, \alpha^*)$ d'un idéal normé $(\mathscr{A}, \alpha)$ est défini par la condition suivante: $T \in \mathscr{A}^*(E, F)$ ssi il existe une constante ϱ telle que pour tous espaces de Banach X, Y de dimension finie, tous opérateurs g, u, h appartenant respectivement à $\mathscr{L}(X, E)$, $\mathscr{A}(Y, X)$ et $\mathscr{L}(F, Y)$ on ait:

$$ |\mathrm{trace}(uhTg)| \leqslant \varrho \, \|h\| \, \|g\| \, \alpha(u), \tag{1} $$

et on pose $\alpha^*(T)$ comme égale à la borne inférieure des ϱ vérifiant (1). On peut montrer que $(\mathscr{A}^*, \alpha^*)$ est alors un idéal normé complet.

1.2. Remarque. Dans ce chapitre et ceux qui suivront, le triplet (p, r, s) vérifiera toujours la condition $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{s} = 1$, ce qui implique en particulier $p \geqslant 1$, $r \geqslant 1$, $s \geqslant 1$.

Les nombres p', r', s' seront alors définis respectivement par

$$ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1; \quad \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1. $$

On peut noter également que dans ce cas le théorème III.1.1 s'applique et que par conséquent ${}^t\Pi_s\cdot\Pi_r$ s'identifie à $\Pi_{p',r,s}$.

1.3. THÉORÈME. *L'idéal adjoint de $(\mathscr{N}_{p,r,s}, \nu_{p,r,s})$ est l'idéal $({}^t\Pi_r\cdot\Pi_s, {}^t\pi_r\cdot\pi_s)$.*

△ ① Supposons que $T \in \mathscr{N}^*_{p,r,s}(E, F)$ et considérons le diagramme (non commutatif!),

$$
\begin{tikzcd}
E & F \arrow[l, dashed, "T"'] \arrow[d, "B"] \\
(l_s^n)' \arrow[u, "A"] & l_r^n \arrow[l, dashed, "M_\sigma"]
\end{tikzcd}
$$

où l_k^n désigne l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme induite par l_k et où A, B, M_σ sont définis par:

$$ {}^tA: E' \to l_s^n: x \mapsto (\langle x, \eta_i\rangle)_{i\leqslant n}; $$
$$ B: F \to l_r^n: y \mapsto (\langle y, b_i\rangle)_{i\leqslant n}; $$
$$ M_\sigma: l_r^n \to l_{s'}^n: (\xi_i)_{i\leqslant n} \mapsto (\sigma_i \xi_i)_{i\leqslant n}. $$

On peut écrire alors:

$$BTM_\sigma A = \sum_i \sigma_i b_i \otimes T(\eta_i);$$

et

$$|\mathrm{trace}(BTM_\sigma A)| = \Big|\sum \sigma_i \langle T\eta_i, b_i\rangle\Big| \leqslant \nu^*_{p,r,s}(T)\,\nu_{p,r,s}(M_\sigma)\,\|B\|\,\|A\|.$$

Mais par la proposition I.2.6, nous savons que: $\nu_{p,r,s}(M_\sigma) = \|\sigma\|_p$; en outre $\|B\| = \|\boldsymbol{b}\|^*$, $\|A\| = \|\eta\|^*_s$, c'est-à-dire

$$\Big|\sum \sigma_i \langle T\eta_i, b_i\rangle\Big| \leqslant \nu^*_{p,r,s}(T)\,\|\sigma\|_p\,\|\boldsymbol{b}\|^*\,\|\eta\|^*_s,$$

et donc puisque σ est une suite arbitraire de n complexes.

$$\Big(\sum |\langle T\eta_i, b_i\rangle|^{p'}\Big)^{1/p'} \leqslant \nu^*_{p,r,s}(T)\,\|\boldsymbol{b}\|^*_r\,\|\eta\|^*_s;$$

par conséquent, d'après la remarque IV.1.2 on a $T \in {}^t\Pi_r \cdot \Pi_s$ et

$${}^t\pi_r \cdot \pi_s(T) \leqslant \nu^*_{p,r,s}(T).$$

② Réciproquement, considérons le diagramme:

$$\begin{tikzcd} E & F \arrow[l, "T"'] \arrow[d, "h"] \\ X \arrow[u, "g"] & Y \arrow[l, "u"] \end{tikzcd},$$

répondant aux conditions de la définition IV.1.1.

Comme X, Y sont de dimension finie, on peut alors écrire $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i^0 b_i^0 \otimes \otimes \eta_i^0$, avec de plus

$$\|\lambda^0\|_p \|b^0\|^*_s \|\eta^0\|^*_r \leqslant \nu_{p,r,s}(u) + \varepsilon.$$

Alors:

$$\begin{aligned} |\mathrm{Trace}(uhTg)| &= \Big|\sum_i \lambda_i^0 \langle hTg\eta_i^0, b_i^0\rangle\Big| \\ &\leqslant \|\lambda^0\|_p\, {}^t\pi_r \cdot \pi_s(T)\,\|h\|\,\|g\|\,\|\eta^0\|^*_r\,\|b^0\|^*_s \\ &\leqslant \big(\nu_{p,r,s}(u) + \varepsilon\big)\,{}^t\pi_r \cdot \pi_s(T)\,\|h\|\,\|g\|, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration puisque ε est arbitraire. ▽

§ 2. Les opérateurs factorisables. Ce sont, si l'on veut, des opérateurs „intégraux" par rapport aux opérateurs (p, r, s) nucléaires [18].

2.1. DÉFINITION. Un opérateur T continu de E dans F sera dit *(r, s)-factorisable* s'il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{T}, \nu)$ une fonction Q de $L^p(\Omega, \mathscr{T}, \nu)$ et des opérateurs continus A et B tels que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"] & F'' \\ L^r(\Omega, \mathscr{T}, \nu) \arrow[r, "M_Q"] & L^{s'}(\Omega, \mathscr{T}, \nu) \arrow[u, "B"] \end{tikzcd}$$

où M_Q est l'opérateur de multiplication par Q. L'ensemble des tels opérateurs de E dans F sera noté $\Gamma_{r,s}(E, F)$.

2.2. Remarques. ① Si $r = s'$, on reconnaît l'idéal $\Gamma_{r'}$ défini par Kwapień [6] et $T \in \Gamma_{r,r'}(E, F)$ signifie simplement que $B_F T$ se factorise par un espace de type L^r.

② Tout diagramme commutatif conforme à la définition 2.1 sera dit (r, s)-factorisation acceptable pour T.

Nous allons voir que si $r \neq s'$, on peut avoir des précisions sur la factorisation d'un élément de $\Gamma_{r,s}(E, F)$; on a la proposition:

2.3. PROPOSITION. *Si $T \in \Gamma_{r,s}(E, F)$ et $r \neq s'$, alors T admet une factorisation acceptable*:

$$E \xrightarrow{A_1} L^r(\Omega, \mathscr{T}, \mu) \xrightarrow{j} L^{s'}(\Omega, \mathscr{T}, \mu) \xrightarrow{B_1} F'',$$

où μ est une mesure de probabilité et j l'injection canonique de $L^r(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ dans $L^{s'}(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$.

△ Soient ν, Q, A, B les éléments de la factorisation acceptable de T décrite en IV.2.1.

Posons $\mu_1 = |Q|^p \cdot \nu$; μ_1 est alors une mesure finie.

Définissons A_0 comme l'opérateur:

$$A_0\colon E \to L^{s'}\Big(\Omega, \mathscr{T}, \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}\Big)\colon x \mapsto |Q|^{1-p/s'} A(x);$$

A_0 se factorise alors en:

$$E \xrightarrow{A_1} L^r\Big(\Omega, \mathscr{T}, \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}\Big) \xhookrightarrow{j} L^{s'}\Big(\Omega, \mathscr{T}, \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}\Big),$$

puisque $1-p/s' = p/r$. De plus, l'application $f \mapsto |Q|^{p/s'} f \|\mu_1\|^{-1/s'}$ définit une injection isométrique K de $L^{s'}\left(\Omega, \mathscr{T}, \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}\right)$ dans $L^{s'}(\Omega, \mathscr{T}, \nu)$. On a $KA_0 = M_Q(A)$;

La factorisation:

$$E \xrightarrow{A_1} L^r(\Omega, \mathscr{T}, \mu) \xrightarrow{j} L^{s'}(\Omega, \mathscr{T}, \mu) \xrightarrow{BK} F'',$$

où $\mu = \frac{\mu_1}{\|\mu_1\|}$ est donc acceptable pour T.

2.4. Théorème. *Si $\gamma_{r,s}(T)$ désigne la borne inférieure des produits $\|A\|\,\|M_Q\|\,\|B\|$ sur l'ensemble des factorisations acceptables pour T, alors $(\Gamma_{r,s}, \gamma_{r,s})$ est un idéal normé complet.*

$\triangle$ Montrons seulement la sous-additivité de $\gamma_{r,s}$. Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\Gamma_{r,s}(E, F)$ et considérons deux factorisations acceptables respectives:

$$E \xrightarrow{A_1} L^r(\Omega_1, F_1, \mu_1) \xrightarrow{M_{Q_1}} L^{s'}(\Omega_1, F_1, \mu_1) \xrightarrow{B_1} F'',$$
$$E \xrightarrow{A_2} L^r(\Omega_2, F_2, \mu_2) \xrightarrow{M_{Q_2}} L^{s}(\Omega_2, F_2, \mu_2) \xrightarrow{B_2} F''.$$

Soit $K = \Omega_1 + \Omega_2$ somme disjointe de Ω_1 et Ω_2 et soit μ la mesure sur K définie par:

$$\mu(R_1+R_2) = \tfrac{1}{2}\big(\mu_1(R_1)+\mu_2(R_2)\big),$$

où R_i est un sous-ensemble mesurable de Ω_i, $i = 1, 2$.

Soient alors:

$$A: E \mapsto L^r(K, \mu): x \mapsto A_1(x)\,1_{\Omega_1} + A_2(x)\,1_{\Omega_2},$$
$$B: L^{s'}(K, \mu) \to F'': f \mapsto B_1(f\,1_{\Omega_1}) + B_2(f\,1_{\Omega_2}),$$

et Q la fonction de $L^p(K, \mu)$ définie par $Q = Q_1 1_{\Omega_1} + Q_2 1_{\Omega_2}$.

On voit simplement que la factorisation:

$$F \xrightarrow{A} L^r(K, \mu) \xrightarrow{Q} L^{s'}(K, \mu) \xrightarrow{B} F''$$

est acceptable pour $T = T_1 + T_2$.

Un calcul de norme donne alors:

$$\|A\| \leqslant 2^{-1/r}(\|A_1\|^r + \|A_2\|^r)^{1/r};$$
$$\|M_Q\| \leqslant 2^{-1/p}(\|M_{Q_1}\|^p + \|M_{Q_2}\|^p)^{1/p};$$
$$\|B\| \leqslant 2^{1/s'}(\|B_1\|^s + \|B_2\|^s)^{1/s}.$$

Et donc en faisant usage de la relation:

$$a\cdot b\cdot c = \inf_{\lambda,\mu>0}\left\{\frac{1}{r}\lambda^r a^r + \frac{1}{p}\lambda^{-p}\mu^p b^p + \frac{1}{s}\mu^{-s}c^s\right\}$$

qui est vraie puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$, on obtient:

$$\|A\|\,\|M_Q\|\,\|B\| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r}+\frac{1}{p}-\frac{1}{s'}}(\|A_1\|\,\|M_{Q_1}\|\,\|B_1\| + \|A_2\|\,\|M_{Q_2}\|\,\|B_2\|).$$

Ce qui achève la démonstration. ∇

(Pour la complétude de $\Gamma_{r,s}$ cf. IV.3.7).

2.5. Remarques. ① Si $r \neq s'$, il est facile de montrer que $\gamma_{r,s}(T)$ est également la borne inférieure des produits $\|A_1\|\,\|B_1\|$ sur les factorisations définies en IV. 2.3.

② La proposition I.2.5 montre que si T est un opérateur (p, r, s) nucléaire de E dans F, alors il est (r, s)-factorisable et on a:

$$\nu_{p,r,s}(T) \geqslant \gamma_{r,s}(T).$$

2.6. Lemme. *Si E' et F possèdent la propriété d'approximation métrique, si T est un opérateur de rang fini de E dans F, on a:*

$$\nu_{p,r,s}(T) \leqslant \gamma_{r,s}(T),$$

dès que p, r et s' sont finis.

$\triangle$ Nous allons procéder par étapes, chacune d'entre elles étant une conséquence de la précédente.

① Commençons par supposer que T est tel qu'il admet la factorisation:

$$E \xrightarrow{A} L^r(\Omega, \mu) \xrightarrow{M_Q} L^s(\Omega, \mu) \xrightarrow{B} F,$$

avec:

α) $B: L^{s'} \to F: f \mapsto \sum_{i=1}^{n} \langle f, 1_{A_i}\rangle z_i$, où les A_i sont des sous-ensembles mesurables de Ω disjoints deux à deux et z_i des vecteurs de F. (Ω, μ) est un espace probabilisé.

β) $Q = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i}$, λ_i suite de scalaires.

γ) $A: E \to L^r(\Omega, \mu): x \to \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, x\rangle 1_{A_i}$, où les y_i sont des vecteurs de E'.

Un calcul facile montre que:

$$\|B\| = \left\|\left(z_i \mu(A_i)^{1/s}\right)_{i\leqslant n}\right\|_s^*,$$
$$\|M_Q\| = \left\|\left(\lambda_i \mu(A_i)^{1/p}\right)_{i\leqslant n}\right\|_p,$$
$$\|A\| = \left\|\left(y_i \mu(A_i)^{1/r}\right)_{i\leqslant n}\right\|_r^*.$$

Posons alors

$$\lambda_i^0 = \lambda_i \mu(A_i)^{1/p}, \; i = 1, \ldots, n, \quad y_i^0 = y_i \mu(A_i)^{1/r}, \quad z_i^0 = z_i \mu(A_i)^{1/s}.$$

On a pour tout x de E:

$$T(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle y_i, x\rangle \mu(A_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^0 \langle y_i^0, x\rangle z_i^0;$$

et

$$\|\lambda^0\|_p \|\boldsymbol{y}^0\|_r^* \|\boldsymbol{z}^0\|_s^* = \|B\| \, \|M_Q\| \, \|A\|.$$

Donc $\nu_{p,r,s}(T) \leqslant \|A\| \, \|M_Q\| \, \|B\|$.

② Conservons A et B tels que dans l'étape ① et prenons Q quelconque dans $L^p(\Omega, \mu)$.

On a pour tout x de E:

$$T(x) = BM_Q A(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle y_i, x\rangle \langle 1_{A_i}, Q\rangle z_i.$$

Il est évident que l'on peut remplacer ici Q par $Q \cdot 1_{\bigcup_i A_i}$; donc il existe une fonction en escalier Q_0 subordonnée à un recouvrement plus fin que les A_i de $\bigcup_i A_i$, telle que l'on ait:

$$\|Q - Q_0\|_{L^p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} [\|A\|^{-1} \|B\|^{-1} \wedge (\|\boldsymbol{y}\|_r^* \|\boldsymbol{z}\|_s^*)^{-1}].$$

Considérons T_0 défini par: $T_0 = BM_{Q_0}A$, T_0 vérifie manifestement les conditions de ① et on a donc:

$$\nu_{p,r,s}(T_0) \leqslant \|A\| \, \|M_{Q_0}\| \, \|B\| \leqslant \|A\| \, \|M_Q\| \, \|B\| + \varepsilon/2.$$

D'autre part, il n'est pas difficile de voir que:

$$\nu_{p,r,s}(T - T_0) \leqslant \|Q - Q_0\|_{L^p} \|\boldsymbol{y}\|_r^* \|\boldsymbol{z}\|_s^* \leqslant \varepsilon/2.$$

Donc

$$\nu_{p,r,s}(T) \leqslant \nu_{p,r,s}(T_0) + \varepsilon/2 \leqslant \|A\| \, \|M_Q\| \, \|B\| + \varepsilon.$$

③ Supposons seulement à présent que A et B sont de rang fini:

$$A = \sum_{i=1}^{n} y_i \otimes f_i; \quad B = \sum_{j=1}^{n} g_j \otimes z_j.$$

Donc pour tout x de E:

$$T(x) = \sum_{i,j}' \langle y_{ij}, x\rangle \langle f_i Q, g_j\rangle z_{ij},$$

avec

$$y_{ij} = y_i, \; j = 1, \ldots, n; \quad z_{ij} = z_j, \; i = 1, \ldots, n.$$

η étant un réel positif donné, il existe alors une famille finie (C_k) de sous-ensembles mesurables de Ω, disjoints deux à deux et deux familles de fonctions en escalier subordonnées aux C_k:

$$(F_i^0)_{i=1,\ldots,q}, \quad (g_j^0)_{j=1,\ldots,n},$$

avec:

$$\|F_i - F_i^0\|_{L^r} \leqslant \eta, \; i = 1, \ldots, p; \quad \|g_j - g_j^0\|_{L^s} \leqslant \eta, \; j = 1, \ldots, n.$$

On peut écrire alors, en posant:

$$A_0 = \sum_{i=1} y_i \otimes F_i^0, \quad B_0 = \sum_{j=1}^{n} g_j^0 \otimes z_j;$$

$$T = B_0 M_Q A_0 + (B - B_0) M_Q A_0 + BM_Q(A - A_0).$$

Et donc:

$$\nu_{p,r,s}(T) \leqslant \nu_{p,r,s}(B_0 M_Q A_0) + \nu_{p,r,s}\big((B - B_0) M_Q A_0\big) + \nu_{p,r,s}\big(BM_Q(A - A_0)\big).$$

Alors $B_0 M_Q A_0$ vérifie les hypothèses de ② et on a:

$$\nu_{p,r,s}(B_0 M_Q A_0) \leqslant \|A_0\| \, \|M_Q\| \, \|B_0\| \leqslant \|A\| \, \|M_Q\| \, \|B\| + \varepsilon/3,$$

dès que η est assez petit.

De plus, il est facile de voir que les quantités:

$$\nu_{p,r,s}\big((B - B_0) M_Q A_0\big) \quad \text{et} \quad \nu_{p,r,s}\big(BM_Q(A - A_0)\big)$$

sont également inférieures à $\varepsilon/3$ dès que l'on choisit η convenablement.

Donc finalement on a:

$$\nu_{p,r,s}(T) \leqslant \|A\| \, \|M_Q\| \, \|B\| + \varepsilon.$$

Passons à dernière étape.

④ Supposons que $T = AM_Q B$,

$$T = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n a_n \otimes y_n, \quad a_n \in E' \quad \text{et} \quad y_n \in F.$$

Comme E' possède la p.a.m. (3), pour tout α il existe un opérateur ${}^tG$ de rang fini de E' dans lui-même avec:

$$\big\|\big({}^tG(a_n) - a_n\big)_{n \leqslant p}\big\|_r^* \leqslant \alpha;$$

et de même si F possède la p.a.m., il existe K de rang fini de F dans F avec:

$$\big\|\big(K(y_n) - y_n\big)_{n \leqslant p}\big\|_s^* \leqslant \alpha.$$

Soit T_0 défini par $T_0 = KBM_Q AG$. On a

$$T = T_0 + (B - KB) M_Q AG + BM_Q(A - AG).$$

(3) Abrégé pour propriété d'approximation métrique.

Par la même technique que dans ③ on déduit alors:

$$\nu_{p,r,s}(T) \leqslant \|A\| \, \|M_Q\| \, \|B\| + \varepsilon,$$

ce qui achève la démonstration en passant à la borne inférieure sur les décompositions acceptables pour T. ▽

2.7. Remarques. ① Si $r = +\infty$, $s \neq 1$, le résultat est encore vrai, même si un seul des deux espaces possède la p.a.m. (cf. [18], Lemma 7).

② Si $p = +\infty$, $s \neq 1$, le résultat est encore valable et sa démonstration plus facile.

2.8. Théorème. *Si E' et F possèdent la* p.a.m.; *on a alors pour tout opérateur $(p; r, s)$-nucléaire de E dans F*:

$$\nu_{p,r,s}(T) = \gamma_{r,s}(T).$$

Un opérateur T est (p, r, s)-nucléaire de E dans F si et seulement s'il est limite en norme $\gamma_{r,s}$ d'opérateurs de rang fini.

En effet, la remarque IV.2.5 ② nous donne:

$$\nu_{p,r,s}(T) \geqslant \gamma_{r,s}(T).$$

De plus, si T est limite pour la norme $\nu_{p,r,s}$ d'opérateurs de rang fini, T l'est a fortiori pour la norme $\gamma_{r,s}$; donc:

$$\begin{aligned} \nu_{p,r,s}(T) &= \lim_n \nu_{p,r,s}(T_n) \\ &\leqslant \lim_n \gamma_{r,s}(T_n), \text{ d'après le lemme IV.2.6}, \\ &\leqslant \gamma_{r,s}(T). \end{aligned}$$

2.9. Corollaire. *L'adjoint de l'idéal $(\Gamma_{r,s}; \gamma_{r,s})$ s'identifie à l'idéal* $({}^t\Pi_r \cdot \Pi_s; {}^t\pi_s \cdot \pi_r)$.

△ C'est une conséquence directe de la définition de l'adjoint et du théorème 2.8. ▽

A l'aide de ce résultat, on peut voir simplement que l'on a:

$$(\Gamma_{r,s}; \gamma_{r,s}) \subset ({}^t\Pi_r \cdot \Pi_s^*; {}^t\pi_s \cdot \pi_r^*).$$

Mais cela ne montre pas encore que $\Gamma_{r,s}$ est en fait l'adjoint de ${}^t\Pi_r \cdot \Pi_s$.

Ce dernier résultat, qui répond à une question de Pietsch [17] (15.3.6) et de Gordon Lewis et Retherford [23] va être l'objet du paragraphe suivant.

§ 3. Maximalité de l'idéal $(\Gamma_{r,s}; \gamma_{r,s})$. Nous voulons montrer ici que l'adjoint de l'idéal $({}^t\Pi_r \cdot \Pi_s; {}^t\pi_r \cdot \pi_s)$ n'est autre que $(\Gamma_{r,s}; \gamma_{r,s})$. Le corollaire IV.2.9 montre qu'il suffit pour cela que $(\Gamma_{r,s}; \gamma_{r,s})$ soit égal à son biadjoint.

A. Pietsch a démontré [14] qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal soit égal à son biadjoint est qu'il soit maximal dans le sens suivant:

3.1. Définition. Un idéal normé $(\mathscr{A}, \alpha)$ est *maximal* si et seulement si chaque ensemble $\mathscr{A}(E, F)$ possède la propriété suivante:

Soit $T \in \mathscr{L}(E, F)$; supposons que pour tout sous-espace M de dimension finie de E, pour tout sous-espace N de codimension finie de F l'opérateur $\Pi_N T \mathscr{I}_M$ (où $\mathscr{I}_M$ est l'injection canonique de M dans E, Π_N la projection de F sur F/N) soit dans $\mathscr{A}(M, F/N)$ avec

$$\alpha(\Pi_N T \mathscr{I}_M) \leqslant \varrho < +\infty,$$

indépendamment de M et N; alors $T \in \mathscr{A}(E, F)$ et $\alpha(T) \leqslant \varrho$.

Pour démontrer donc la maximalité de $(\Gamma_{r,s}; \gamma_{r,s})$ nous utilisons des résultats de J. L. Krivine et Dacunha Castelle [1] sur les ultraproduits d'espaces de Banach.

Rappelons tout d'abord la définition et les propriétés élémentaires des ultraproduits.

3.2. Définition. Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces de Banach indexée par un ensemble I préordonné filtrant et $l_\infty((E_i)_{i\in I})$ l'espace des familles $x = (x_i)_{i\in I}$, avec $x_i \in E_i$ et $\sup \|x_i\| < +\infty$.

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre tendant vers $+\infty$ sur I. On définit une *semi-norme* sur $l_\infty((E_i)_{i\in I})$ par:

$$\|x\| = \lim_{\mathscr{U}} \|x_i\|.$$

On appellera ultraproduit des E_i le quotient complété de $l_\infty((E_i)_{i\in I})$ par cette semi-norme; et on le désignera par $\prod_i E_i/\mathscr{U}$.

Si nous supposons données à présent une autre famille $(F_i)_I$ d'espaces de Banach, et une famille $(u_i)_I$ d'opérateurs de E_i dans F_i respectivement, si $(u_i)_I$ est uniformément bornée, on en déduit de manière naturelle un opérateur, „ultraproduit" des opérateurs u_i: $u = \prod_i u_i/\mathscr{U}$, de $\prod_i E_i/\mathscr{U}$ dans $\prod_i F_i/\mathscr{U}$ vérifiant de plus:

$$\|u\| = \lim_{\mathscr{U}} \|u_i\| < +\infty.$$

Donnons à présent le lemme essentiel:

3.3. Lemme. *Soient $(\Omega_i, \nu_i)_{i\in I}$ une famille (préordonnée filtrante) d'espaces de probabilités, j_i l'injection canonique de $L^r(\Pi_i, \nu_i)$ dans $L^{s'}(\Omega_i, \nu_i)$ $(s' < r)$. On a alors:*

$$\gamma_{r,s}\Big(\prod j_i/\mathscr{U}\Big) \leqslant 1.$$

On sait d'après [1] que

$$\prod_i L^r(\Omega_i, \nu_i)/\mathscr{U} \quad \text{et} \quad \prod_i L^{s'}(\Omega_i, \nu_i)/\mathscr{U}$$

sont des espaces réticulés pour l'ordre défini par: $f \leqslant g$ si et seulement si il existe des représentants $(f_i)_I$ de f, $(g_i)_I$ de g avec pour chaque i $f_i \leqslant g_i$. Il en résulte aussitôt que $\prod_i j_i/\mathscr{U}$ est un opérateur positif.

De plus (et c'est le dernier résultat profond sur les ultraproduits dont nous aurons besoin),

$$\prod_i L^r(\Omega_i, \nu_i)/\mathscr{U} \quad \text{et} \quad \prod_i L^{s'}(\Omega_i, \nu_i)/\mathscr{U}$$

s'identifient comme espaces de Banach réticulés à $L^r(\Omega_1, \nu_1)$ et $L^{s'}(\Omega_2, \nu_2)$ respectivement, où (Ω_1, ν_1) et (Ω_2, ν_2) sont des espaces mesurés (non nécessairement avec des mesures finies).

Il suffit donc de montrer que si u est un opérateur positif de $L^r(\Omega_1, \nu_1)$ dans $L^{s'}(\Omega_2, \nu_2)$ il est dans $\Gamma_{r,s}\big(L^r(\Omega_1, \nu_1), L^{s'}(\Omega_2, \nu_2)\big)$.

Mais d'après un résultat de B. Maurey [9] un tel opérateur admet la factorisation:

$$u\colon L^r(Q_1, \nu_1) \xrightarrow{v} L^r(\Omega_2, \nu_2) \xrightarrow{M_Q} L^{s'}(\Omega_2, \nu_2),$$

avec $Q \in L^p(\Omega_2, \nu_2)$ et $\|v\| \cdot \|Q\| \leqslant 1$ si $\|u\| \leqslant 1$.

D'après IV.2.4. cela démontre le lemme. ∇

3.4. Proposition. *Soit $(u_i)_I$ une famille d'opérateurs respectivement de E_i dans F_i. Si pour chaque i on a $\gamma_{r,s}(u_i) \leqslant 1$, on a alors $\gamma_{r,s}(\prod u_i/\mathscr{U}) \leqslant 1$.*

Nous nous contenterons de démontrer la proposition si $r \neq s'$; pour $r = s'$, elle est plus facile!

Supposons donc $u_i \in \Gamma_{r,s}(E_i, F_i)$. Par la remarque IV.2.5, u_i admet la factorisation acceptable suivante:

$$E_i \xrightarrow{A_i} L^r(\Omega_i, \nu_i) \xrightarrow{j_i} L^{s'}(\Omega_i, \nu_i) \xrightarrow{B_i} F'',$$

avec $\|A_i\| \leqslant 1 + \varepsilon \|B_i\| \leqslant 1 + \varepsilon$.

Par passage à l'ultraproduit, on en déduit:

$$\prod_i E_i/\mathscr{U} \xrightarrow{A} \prod_i L^r(\Omega_i, \nu_i)/\mathscr{U} \xrightarrow{j} \prod_i L^s(\Omega_i, \nu_i)/\mathscr{U} \xrightarrow{B} \prod_i F_i''/\mathscr{U},$$

et le résultat découle du lemme IV.3.3. ∇

Enfin on a le théorème:

3.5. Théorème. *L'idéal $(\Gamma_{r,s}; \gamma_{r,s})$ est maximal.*

$\triangle$ Désignons par I l'ensemble des couples (M, N) où M (resp. N) est un sous espace de dimension finie (resp. codimension finie) de E (resp. F), ordonné par: $(M, N) < (M_1, N_1)$ si et seulement si M est un sous espace de M_1 et N_1 un sous espace de N. Il est facile de voir que I est préordonné filtrant. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre tendant vers l'infini sur I. Si $i = (M, N)$ convenons de poser $M = M_i$, $N = N_i$. Par hypothèse, on a pour chaque $i \in I$ un opérateur u_i de M_i dans F/N_i, $(u_i = \Pi_{N_i} u \mathscr{I}_{M_i})$ avec $\gamma_{r,s}(u_i) \leqslant \varrho$.

On en déduit pour $\tilde{u} = \prod_i u_i/\mathscr{U}$, opérateur de $\prod_i M_i/\mathscr{U}$ dans $\prod_i F/N_i/\mathscr{U}$, que $\gamma_{r,s}(\tilde{u}) \leqslant \varrho$; mais il est facile de montrer qu'il existe:

1) une injection isométrique K de E dans $\prod_i M_i/\mathscr{U}$,

2) une projection de norme 1, Π de $\prod_i F/N_i/\mathscr{U}$ dans F''. D'autre part:

$$\Pi \circ \tilde{u} \circ K = B_F \circ u$$

d'où le résultat. ∇

3.6. Corollaire. *L'adjoint de $({}^t\Pi_r \cdot \Pi_s; {}^t\pi_r \cdot \pi_s)$ est identifiable à l'idéal $(\Gamma_{r,s}; \gamma_{r,s})$.*

3.7. Remarque. On ne s'est jamais servi dans ce qui précède du caractère complet de $\Gamma_{r,s}$. Comme un idéal adjoint est toujours complet, le résultat s'en suit: $\Gamma_{r,s}$ est complet.

CHAPITRE V

CONSÉQUENCES DE LA THÉORIE QUELQUES NOUVEAUX IDÉAUX

§ 1. Conséquences de la théorie. Nous allons commencer par démontrer un théorème, généralisant celui de Kwapień [4] sur la factorisation à travers les espaces de type L^p.

1.1. Théorème. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur u appartienne à $\Gamma_{r,s}(E, F)$ est que pour tout espace de Banach G, et tout opérateur v appartenant à $\Pi_s(F, G)$, on ait ${}^t(vu) \in \mathscr{I}_{r'}(G', E')$* [4].

① Considérons le diagramme (non commutatif):

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] & F \arrow[r, "v"] & G \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[u, "h"] & & Y \arrow[ll, "w"] \end{tikzcd},$$

où X et Y sont des espaces de Banach de dimension finie, $u \in \Gamma_{r,s}(E, F)$, $v \in \Pi_s(F, G)$.

D'après la définition III.1.3, on a: $wgv \in {}^t\Pi_r \cdot \Pi_s(F, X)$. Donc en utilisant la définition de l'adjonction, on obtient:

$$\begin{aligned} |\mathrm{trace}(wgvuh)| &\leqslant \gamma^*_{r,s}(wgv)\gamma_{r,s}(u)\|h\| \\ &\leqslant \Pi_r({}^tw)\|g\|\Pi_s(v)\gamma_{r,s}(u)\|h\|. \end{aligned}$$

[4] $((\mathscr{I}_{r'}, i_{r'})$ désigne l'idéals des opérateurs r'-intégraux [18], c'est-à-dire $(\Gamma_{\infty,r}; \gamma_{\infty,r})$.

Comme trace $(wgvuh) = \operatorname{trace}({}^t(wgvuh))$, cela montre que ${}^t(vu) \in \Pi_r^*(G', E')$, donc ${}^t(vu) \in \mathscr{I}_{r'}(G', E')$ et de plus $\Pi_s(v)\gamma_{r,s}(u) \leqslant i_{r'}({}^t(vu))$.

② Réciproquement, soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ vérifiant la propriété de l'énoncé. Par un argument de graphe fermé, il est facile de voir qu'alors l'application $\hat{u}$ définie par:

$$\hat{u}: \Pi_s(F, G) \mapsto \mathscr{I}_{r'}(G', E'),$$
$$v \mapsto {}^t(vu),$$

est continue; par conséquent, il existe $\varrho(u)$ avec $i_{r'}({}^t(vu)) \leqslant \varrho(u)\Pi_s(v)$. Considérons alors le diagramme:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] & F \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[u, "h"] & Y \arrow[l, "\theta \quad G \quad v"'] \end{tikzcd}$$

avec $v \in \Pi_s(Y, G)$ et ${}^t\theta \in \Pi_r(X', G')$.

On a $|\operatorname{trace}(\theta vguh)| = |\operatorname{trace}({}^t h\, {}^t(vgu)\, {}^t\theta)|$ mais par hypothèse

$${}^t(vgu) \in \mathscr{I}_{t'}(G', E').$$

Donc

$$\begin{aligned} |\operatorname{trace}(\theta vguh)| &\leqslant \|h\|\Pi_r({}^t\theta)\, i_{t'}({}^t(vgu)) \\ &\leqslant \|h\|\Pi_r({}^t\theta)\, \varrho(u)\Pi_s(v)\, \|g\|; \end{aligned}$$

ce qui montre que $u \in \Gamma_{r,s}(E, F)$ et $\gamma_{r,s}(u) \leqslant \varrho(u)$.

On remarque que le meilleur $\varrho(u)$ n'est autre que $\gamma_{r,s}(u)$. ∇

Montrons quelques corollaires. D'abord un théorème dû à Persson [7].

1.2. Théorème. *Si* $r \in \Pi_{s'}(L^s, E)$ *alors* ${}^t v \in \mathscr{I}_{s'}(E', L^{s'})$ $(1 \leqslant s \leqslant +\infty)$.

$\triangle$ On applique le théorème V.1.1 en prenant $u = \mathrm{id}_{L^s}$ opérateur qui, évidemment, appartient à $\Gamma_{s,s'}(L^s, L^s)$! ∇

On peut alors légèrement améliorer un théorème de Kwapień [6].

1.3. Théorème. *Si les réels* s, q, p, r *sont tels que*: $1 \leqslant s \leqslant q \leqslant p < r < +\infty$; *tout opérateur continu* u *de* L^r *dans* L^s *appartient à* $\Gamma_{q,p'}(L^r, L^s)$.

$\triangle$ D'après le théorème V.1.1 il suffit de montrer $u\,{}^t v$ appartient à $\mathscr{I}_{q'}(G', L^{r'})$ dès que $v \in \Pi_{p'}(L^s, G)$. Si $v \in \Pi_{p'}(L^s, G)$, puisque $p' \leqslant s'$, il appartient a fortiori à $\Pi_{s'}(L^s, G)$; par V.1.2 on a donc ${}^t v \in \mathscr{I}_{s'}(G', L^{s'})$ et donc ${}^t u\, {}^t v \in \mathscr{I}_{s'}(G', L^{r'})$.

Scindons à présent le problème:

① Si $q, s < r \leqslant 2$ on sait que $\Pi_s(L^{r'}, G') = \Pi_q(L^{r'}, G')$ (cf. [5] par exemple); par adjonction, on obtient alors que $\mathscr{I}_{s'}(G', L^{r'}) = \mathscr{I}_{q'}(G', L^{r'})$, ce qui démontre dans ce cas la proposition.

② Le cas $2 \leqslant s$, $q < r$ se démontre comme ① par transposition.

③ Pour le cas restant, c'est-à-dire $s < 2 < r$, on sait classiquement [8] (mais on pourrait le démontrer par la même méthode que ①) que u se factorise par L^2.

D'autre part, à partir du corollaire III.2.3 on déduit par adjonction que $\Gamma_{2,2} \subset \Gamma_{r,s}$ pour tout couple (r, s) de nombres réels avec $s' \leqslant r$. Ce qui donne un résultat meilleur que celui annoncé.

1.4. Corollaire. *Dans les mêmes conditions que le théorème* V.1.3 *on a*:

① ${}^t\Pi_q\Pi_{p'}(L^s, L^r) = \mathscr{N}_{1,\infty,\infty}(L^s, L^r)$,

② $\mathscr{N}_{\beta,q,p'}(L^r, L^s) = K(L^r, L^s)$ $\left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = 1\right)$ (opérateurs compacts) c'est une simple application de l'adjonction. ∇

1.5. Remarque. On peut facilement montrer que l'on a:

$$\mathscr{L}(L^\infty, L^1) = {}^t\Pi_2 \cdot \Pi_2(L^\infty, L^1) \quad \text{et} \quad \mathscr{I}_1(L^1, L^\infty) = \Gamma_{2,2}(L^1, L^\infty).$$

Dans le cas des espaces l_p le théorème V.1.3 peut s'énoncer ainsi:

1.6. Corollaire: *Si les réels* s, q, p, r, *sont tels que*: $1 \leqslant s \leqslant q \leqslant p < r < +\infty$; *tout opérateur continu de* l_r *dans* l_s *est* (β, q, p')*-nucléaire.*

$\triangle$ Ceci provient du fait que dans ces conditions, on a $K(l_r, l_s) = \mathscr{L}(l_r, l_s)$.

§ 2. Quelques nouveaux idéaux.

2.1. ① Notons I_F^∞ l'injection canonique de l'espace de Banach F dans $l_\infty(U_{F'})$ et Q_E^1 la surjection canonique de $l_1(U_E)$ sur E. Si alors $(\mathscr{A}, \alpha)$ est un idéal normé (complet), on peut lui associer de manière naturelle quatre autres idéaux appelés respectivement enveloppes injectives à droite, injectives à gauche, projective à droite, projectives à gauche, de $\mathscr{A}$, notés: $(\mathscr{A}\backslash, \alpha\backslash)$, $(/\mathscr{A}, /\alpha)$, $(\mathscr{A}/, \alpha/)$ et $(\backslash\mathscr{A}, \backslash\alpha)$; et définis par:

1) $T \in \mathscr{A}\backslash(E, F)$ si et seulement si $\mathscr{I}_F^\infty \cdot T \in \mathscr{A}(E, l_\infty(U_F))$ et $\alpha\backslash(T) = \alpha(I_F^\infty \circ T)$.

2) $T \in /\mathscr{A}(E, F)$ si et seulement si $T \cdot Q_E^1 \in \mathscr{A}(l_1(U_E), F)$ et $/\alpha(T) = \alpha(T \cdot Q_E^1)$.

3) $T \in \mathscr{A}/(E, F)$ si et seulement si il existe $S \in \mathscr{A}(E, l_1(U_F))$, avec $T = Q_F^1 S$, et $\alpha/(T) = \alpha(S)$.

4) $T \in \backslash\mathscr{A}(E, F)$ si et seulement si il existe $S \in \mathscr{A}(l_\infty(U_{E''}), F)$, avec $T = S I_E^\infty$, et $\backslash\alpha(T) = \alpha(S)$.

② De plus, on peut montrer que:

$$((/\mathscr{A})^*; (/\alpha)^*) = (\mathscr{A}^*/, \alpha^*/), \quad \text{et} \quad ((\mathscr{A}\backslash)^*; (\alpha\backslash)^*) = (\backslash\mathscr{A}^*, \backslash\alpha^*).$$

2.2. Nous allons à présent déterminer les adjoints respectifs de $\mathscr{N}_{r,s}\backslash$, $/\mathscr{N}_{r,s}$, $/\mathscr{N}_{r,s}\backslash$. Pour cela, définissons ${}^t\Pi_s \cdot \mathscr{I}_r$ comme la classe des opérateurs qui s'écrivent comme le composé $B \circ A$ d'un opérateur A

r-intégral, et d'un opérateur B dont le transposé est s-sommant. On définit une norme sur cette classe en posant:

$$^t\pi_s\cdot i_r(T) = \inf\big(\pi_s(^t\beta)\cdot i_r(A)\big),$$

la borne inférieure étant prise sur les factorisations possibles pour T.

De même, on définit $^t\mathscr{I}_s\cdot\Pi_r$ et $^t\mathscr{I}_s\cdot\mathscr{I}_r$. On a alors la proposition:

2.3. Proposition. *Les adjoints respectifs des idéaux*

$$(\mathscr{N}_{p,s,r}\diagdown;\ \nu_{p,s,r}\diagdown),\quad (/\mathscr{N}_{p,s,r};\ /\nu_{p,s,r})\quad \textit{et}\quad (/\mathscr{N}_{p,s,r};\ /\nu_{p,s,r})$$

s'identifient à:

$$(^t\Pi_s\cdot\mathscr{I}_r;\ ^t\pi_s\cdot i_r),\quad (^t\mathscr{I}_s\cdot\Pi_r;\ ^ti_s\cdot\pi_r)\quad \textit{et}\quad (^t\mathscr{I}_s\cdot\mathscr{I}_r;\ ^ti_s\cdot i_r).$$

△ Nous nous contenterons de démontrer la proposition dans le cas de $(\mathscr{N}_{p,s,r}\diagdown;\ \nu_{p,s,r}\diagdown)$, les autres démonstrations étant similaires. D'après V.2.1 ②, il suffit de voir que l'on a:

$$(\diagdown{}^t\Pi_s\cdot\Pi_r;\ \diagdown{}^t\pi_s\cdot\pi_r) = (^t\Pi_s\cdot\mathscr{I}_r;\ ^t\pi_s\cdot i_r).$$

Par définition, si $T\in{}^t\Pi_s\mathscr{I}_r(E,F)$ on peut écrire:

$$T: E\xrightarrow{A}G\xrightarrow{B}F,\quad \text{où}\quad A\in\mathscr{I}_r(E,G)\ \text{et}\ ^tB\in\Pi_s(G',E').$$

Comme $A\in\mathscr{I}_r(E,G)$ il admet une factorisation

$$E\xrightarrow{u}L^\infty(U_{E'},\mu)\xrightarrow{v}G,\quad \text{avec}\quad v\in\Pi_r\big(L^\infty(U_{E'},\mu),G\big)\ \text{(cf. [18])}.$$

Si l'on considère l'injection I_E^∞ de E dans $l_\infty(U_{E'})$, la propriété d'extension de $L^\infty(U_{E'},\mu)$ (cf. [11]) permet de prolonger u en une application $\tilde u$ de $l_\infty(U_{E'})$ dans $L^\infty(U_{E'},\mu)$ avec $\|u\|=\|\tilde u\|$ et $\tilde u I_E^\infty = u$.

On a donc $T = Bv\tilde u I_E^\infty$, avec $Bv\tilde u$ dans $^t\Pi_s\cdot\Pi_r(l_\infty(U_{E'}),F)$; de plus, comme $\pi_r(v)=i_r(A)$, on a également:

$$^t\pi_s\cdot i_r(T)\leqslant \pi_s\cdot\pi_r(Bv\tilde u) = \diagdown{}^t\pi_s\cdot\pi_r(T).$$

Réciproquement, si $T\in\diagdown{}^t\Pi_s\cdot\Pi_r(E,F)$, on a le diagramme:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "I_E^\infty"'] & & F \\ & l^\infty(U_{E'}) \arrow[ur, "S"'] & \end{tikzcd}$$

avec $S\in{}^t\Pi_s\cdot\Pi_r\big(l^\infty(U_{E'}),F\big)$. Mais S s'écrit alors $B_1\cdot A_1$ avec $^tB_1\in\Pi_s(F',G_1)$ et $A_1\in\Pi_r\big(l_\infty(U_{E'}),G_1\big)$.

Il est bien connu [18] qu'un opérateur r-sommant partant d'un espace de type L^∞ est r-intégral, ce qui achève la démonstration puisqu'alors également: $\diagdown{}^t\pi_s\cdot\pi_r(T) = \pi_s\cdot\pi_r(S)\leqslant{}^t\pi_s\cdot i_r(T)$. ▽

D'un autre côté, si la détermination explicite de $\mathscr{N}_{p,r,s}\diagdown$, $/\mathscr{N}_{p,r,s}$ ou $/\mathscr{N}_{p,r,s}\diagdown$ s'avère difficile on a la proposition suivante concernant $\Gamma_{r,s}$:

2.4. Proposition. ① *$T\in\Gamma_{r,s}\diagdown(E,F)$ si et seulement si T admet une factorisation:*

$$\begin{tikzcd} T: E \arrow[r, "A"] & S_r \arrow[r, "j_1"] \arrow[d, "\cap"] & S_{s'} \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\cap"] & F, \\ & L^r(\Omega,\mu) \arrow[r, "j"] & L^{s'}(\Omega,\mu) & \end{tikzcd}$$

où (Ω,μ) est un espace mesuré; S_r et $S_{s'}$ des sous-espaces fermés de $L^r(\Omega,\mu)$, $L^{s'}(\Omega,\mu)$ respectivement et où l'application j_1 est induite par j à l'aide des injections canoniques i_1 et i_2; j est comme toujours l'injection canonique de $L^r(\Omega,\mu)$ dans $L^{s'}(\Omega,\mu)$, μ est une mesure de probabilité si $r\neq s'$.

② *De même $T\in/\Gamma_{r,s}(E,F)$ si et seulement si B_FT admet la factorisation*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] & Q_r \arrow[r, hook, "j_1"] & Q_{s'} \arrow[r, "B"] & F'' \\ & L^r(\Omega,\mu) \arrow[u, "\Pi_1"] \arrow[r, "j"'] & L^{s'}(\Omega,\mu) \arrow[u, "\Pi_2"'] & \end{tikzcd}$$

où ici Q_r et $Q_{s'}$ sont des sous-espaces quotients de $L^r(\Omega,\mu)$ et $L^s(\Omega,\mu)$ et où j_1 est induite par j à l'aide des projections Π_1 et Π_2.

③ *$T\in/\Gamma_{r,s}\diagdown(E,F)$ si et seulement si T admet la factorisation:*

$$E\xrightarrow{A}SQ_r\xrightarrow{j_1}SQ_{s'}\xrightarrow{B}F,$$

j_1 induite par j sur les sous-espaces de quotients SQ_r et $SQ_{s'}$ de $L^r(\Omega,\mu)$, $L^{s'}(\Omega,\mu)$ respectivement.

△ Démontrons simplement ①. Supposons que T admette une telle factorisation. On a le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "B"] & S_r \arrow[r, hook, "j_1"] \arrow[d, "i_1"'] & S_{s'} \arrow[r, "A"] \arrow[d, "i_2"'] & F \arrow[d, "I_F^\infty"'] \\ & L^r(\Omega,\mu) \arrow[r, "j"] & L^{s'}(\Omega,\mu) \arrow[r, dashed, "B_1"] & l_\infty(U_{F'}) \end{tikzcd}$$

la propriété d'extension de $l_\infty(U_{F'})$ permet de prolonger $I_F^\infty B$ en un opérateur B_1 de $L^{s'}(\Omega,\mu)$ dans $l_\infty(U_{F'})$, ce qui montre que $I_{F'}^\infty\cdot T$ est dans $\Gamma_{r,s}$. Réciproquement, si $T\in\Gamma_{r,s}\diagdown(E,F)$, $I_F^\infty\circ T\in\Gamma_{r,s}\big(E,l_\infty(U_{F'})\big)$ et on a la factorisation:

$$T: E\to L^r(\Omega,\mu)\to L^{s'}(\Omega,\mu)\to l''_\infty(U_{F'})$$

Soit $S_r = \overline{A(E)}$ (adhérence dans $L^r(\Omega, \mu)$), $S_{s'} = \overline{j(S_r)}$ (adhérence dans $L^{s'}(\Omega, \mu)$).

Il est facile de constater que $B(S_{s'}) \subset F$ et le théorème est démontré. D'autre part, on peut remarquer en se basant sur la définition des différentes barres que l'on peut démontrer des lemmes point pour point analogues à IV.2.6, et on peut montrer le théorème dont on laisse au lecteur le soin de déduire les conséquences.

2.5. THÉORÈME. ① *$u \in /\Gamma_{r,s}(E, F)$ ssi pour tout espace de Banach G et tout opérateur $v \in \Pi_s(F, G)$ on a ${}^t(vu) \in \Pi_{r'}(G', E')$.*

② *$u \in \Gamma_{r,s}\diagdown(E, F)$ ssi pour tout espace de Banach G et tout opérateur $v \in \mathscr{I}_s(F, G)$ on a ${}^t(vu) \in \mathscr{I}_{r'}(G', E')$.*

③ *$u \in /\Gamma_{r,s}\diagdown(E, F)$ ssi pour tout espace de Banach G et tout opérateur $v \in \mathscr{I}_s(F, G)$ on a ${}^t(vu) \in \Pi_{r'}(G', E')$.*

Bibliographie

[1] D. Dacunha Castelle et J. L. Krivine, *Application des ultraproduits ...*, Studia Math. 41 (1972), p. 316–333.

[2] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1955.

[3] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I*, Berlin 1969.

[4] S. Kwapień, *Some remarks on absolutely (p, q) summing operators in l_p spaces*, Studia Math. 29 (1968), p. 328–337.

[5] — *On a theorem of L. Schwartz and its application to absolutely summing operators*, Studia Math. 38 (1970), p. 193–201.

[6] — *On operators factorisable through L^p spaces*, Bull. Soc. Math. de France (31–32).

[7] A. Persson, *On some properties of p-nuclear and p-integral operators*, Studia Math. 33 (1969), p. 213–222.

[8] S. Lindenstrauss et A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in L^p spaces*, Studia Math. 29 (1968), p. 275–326.

[9] B. Maurey, *Séminaire Maurey–Schwartz (1972–1973)*, Exposé XV — Ecole Polytechnique.

[10] V. D. Milman, *New proof of the theorem of A. Dvoretzky ...*, Functional Anal. Appl. 5 (1971), p. 288–295.

[11] L. Nachbin, *A theorem of Hahn Banach type for linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), p. 28–46.

[12] A. Pełczyński, *A characterisation of Hilbert-Schmidt operators*, Studia Math. 28 (1967), p. 355–360.

[13] A. Pietsch, *Absolutely p-summierende abbildungen in normieren-raümen*, Studia Math. 28 (1967), p. 333–353.

[14] — *Adjungierte normierte operatorenideal*, Matematische Nachrichten Band 48 (1971), p. 1–6.

[15] — *l_p-factoriserhare operatoren in Banachraünen*, Acta Scientiarium Math. (1970) 31, Fasc. 1, 2, p. 117–123.

[16] — *Ideale von* Sp *operatoren in Banachraümen*, Studia Math. 38 (1970), p. 60–69.

[17] — *Theorie der Operatorenideale*, Friedrich–Schiller–Universität Jena.

[18] A. Pietsch et A. Persson, *p-nucleare und p integrale Abbildungen in Banachraümen*, Studia Math. 33 (1969), p. 20–61.

[19] Riez et Nagy, *Introduction à l'Analyse fonctionelle.*

[20] P. Saphar, *Produits tensoriels d'espaces de Banach ...*, Studia Math. 38 (1970), p. 71–100.

[21] L. Schwartz, *Seminaire Goulaouic Schwartz (1969–1970)*, Applications radonifiantes — Exposé V.

[22] — *Séminaire Maurey–Schwartz (1972–1973)*, Exposé II.

[23] Gordon Lewis et Retherford, *Banach ideals of operators with applications*, Journal of functional Analysis — Vol 14 n° 1 Septembre 1973, p. 85–129.

UNIVERSITÉ DE CLERMONT
COMPLEXE SCIENTIFIQUE DES CEZEAUX
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Received December 17, 1974 (923)