STUDIA MATHEMATICA, T. LVI. (1976)

Conditions de bornitude et espaces de fonctions mesurables

par

P. TURPIN (Orsay)

Abstract. If E and F are topological linear spaces (generally not locally convex) and $u\colon E\to F$ is a linear operator, we consider the following conditions: (α) $u(U)$ is bounded in F for some zero-neighbourhood U in E; (δ) $u(B)$ is bounded in F if $B\subset E$ is „additively bounded" in E, i.e., if, for every zero-neighbourhood U in E, there exists an integer $N\geqslant 1$ such that $B\subset U+\ldots+U$ (N terms U). We consider also some „galb" conditions [Lecture Notes in Mathematics 331, p. 224, Springer, Berlin 1973] (β) and (γ) verifying (α) ⇒ (β) ⇒ (γ) ⇒ (δ). We are interested in converse implications (false in general). We study in details the case where u is the inclusion between modulared spaces $L^{\psi}_{\Omega}\subset L^{\varphi}_{\Omega}$ (for the modulars $\int_{\Omega}\varrho(|x(\omega)|,\omega)\,d\omega$, $\varrho=\psi,\varphi$): for example, if $\varphi=\psi$, (α) and (δ) are equivalent in most cases (this improves a result of S. Rolewicz, Studia Math. 18 (1959), pp. 1–9).

S. Rolewicz a établi en [10] qu'un espace d'Orlicz relatif à l'un des espaces mesurés usuels $(0,1)$, $\boldsymbol{R}$ (avec la mesure de Lebesgue) ou $\boldsymbol{N}$ (pour la mesure cardinale) est localement borné s'il est localement „quasi-convexe", c'est-à-dire s'il est une limite projective d'espaces localement bornés, ou, c'est équivalent, s'il possède une base $\mathscr{V}$ de voisinages de 0 tels que, pour tout $V\in\mathscr{V}$, V absorbe $V+V$.

D'autre part, S. Simons demande en [12] à quelle condition un sous-ensemble B d'un espace vectoriel topologique est borné dès qu'il est „additivement borné" (définition 6), c'est-à-dire dès que $\sup_{x\in B}\nu(x)<\infty$ pour toute F-seminorme continue ν de E (propriété intéressante dans la théorie des mesures vectorielles par exemple: proposition 5, infra). Il observe que tout espace localement quasi-convexe possède cette propriété.

Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques et $u\colon E\to F$ est un opérateur linéaire, on étudie dans cet article les conditions suivantes.

(α) u est bornifiant; autrement dit u applique quelque voisinage de 0 dans E sur un borné de F (définition 3, infra).

(β) u est galbé par l^0_i; autrement dit, pour tout voisinage V de 0 dans F il existe un voisinage U de 0 dans E et des scalaires $a_n>0$, $n\geqslant 0$, vérifiant $\bigcup_{N\geqslant 0}\sum_{0}^{N}{}' a_n u(U)\subset V$ (définition 4).

(γ) u est galbé par l_g^0; autrement dit, pour tout voisinage V de 0 dans F il existe un voisinage U de 0 dans E tel que, pour tout entier $N \geqslant 1$, V absorbe $u(U)+\ldots+u(U)$ (N termes $u(U)$) (définition 5).

(δ) u applique tout sous-ensemble additivement borné de E sur un borné de F.

Un cas important est celui où $E = F$ et où u est l'application identique i_E de E. Quand i_E vérifie (α) on dit que E est localement borné; on dit que E est galbé par l_i^0 (resp. l_g^0) quand i_E vérifie (β) (resp. (γ)).

Dans le §1, on étudie sommairement ces conditions (caractérisation des espaces galbés par l_i^0 (proposition 2), par exemple), on établit les implications assez évidentes

$$(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma) \Rightarrow (\delta), \tag{1}$$

on caractérise les sous-ensembles additivement bornés d'un espace de Musielak–Orlicz L_Ω^φ (définition 2, théorème 1).

Dans le §2, on étudie les réciproques des implications (1).

On démontre d'abord très simplement que (β) $\Rightarrow$ (α) pour des opérateurs positifs entre des espaces réticulés très généraux, comprenant la plupart des espaces de Musielak–Orlicz (théorème 2). On a là une première amélioration du résultat de S. Rolewicz sus-mentionné.

Dans les théorèmes 3 et 4 on détermine les couples (φ, ψ) tels que l'inclusion $L_\Omega^\psi \subset L_\Omega^\varphi$ vérifie (α) (resp. (β), (γ), (δ)).

Cela permet de démontrer que, pour l'application identique d'un espace de Musielak–Orlicz presque quelconque, les propriétés (α)–(δ) sont équivalentes (théorème 5). C'est une seconde amélioration du théorème de S. Rolewicz. C'est aussi une réciproque (dans un cas particulier) de l'observation de S. Simons citée plus haut.

Une telle réciproque est fausse en général: on donne en 2.6.2 un espace métrisable (intersection dénombrable d'espaces de Musielak–Orlicz munie de la topologie limite projective) vérifiant (δ) mais pas (γ).

On a vu aussi en [17] et [19], § 3.2, qu'un espace de même type peut être galbé par l_i^0 (condition (β)) sans être localement quasi-convexe.

On démontre toutefois (théorème 6) que pour l'application identique d'une intersection d'espaces de Musielak–Orlicz (de même que pour une inclusion $L_\Omega^\psi \subset L_\Omega^\varphi$), ($\beta$) et ($\gamma$) sont équivalents (ce qui est faux en général: [15], [19], n° 6.6.4).

§ 1

1.1. Espaces de Musielak–Orlicz. Soit Ω un espace mesuré, c'est-à-dire un ensemble muni d'une tribu $\mathscr{S}$ de sous-ensembles et d'une mesure positive σ-additive définie sur $\mathscr{S}$, notée $d\omega$. On supposera dans cet article qu'un sous-ensemble de Ω est mesurable (resp. de mesure nulle) s'il a une trace mesurable (resp. de mesure nulle) sur tout élément de $\mathscr{S}$ de mesure finie.

Définition 1. Une *fonction d'Orlicz* est une application $\varphi\colon [0, \infty] \to [0, \infty]$ croissante et continue à gauche, nulle et continue en 0, non identiquement nulle.

Une *fonction de Musielak–Orlicz* sur Ω est une application $\varphi\colon [0, \infty] \times \Omega \to [0, \infty]$ telle que, pour tout $\omega \in \Omega$, l'application $t \to \varphi(t, \omega)$ soit une fonction d'Orlicz, et que, pour tout $t \geqslant 0$, l'application $\omega \to \varphi(t, \omega)$ soit mesurable.

Notons que d'après la continuité à gauche on a

$$\varphi(\infty, \omega) = \sup_{t<\infty} \varphi(t, \omega). \tag{2}$$

Définition 2. Soit φ une fonction de Musielak–Orlicz sur Ω.

Pour toute fonction scalaire x mesurable sur Ω (définie à une fonction négligeable près), à valeurs finies ou infinies, on pose

$$I_\Omega^\varphi(x) = \int_\Omega \varphi(|x(\omega)|, \omega)\, d\omega.$$

Et on pose, en prenant les fonctions x finies presque partout.

$$L_\Omega^\varphi = \{x \mid \exists s > 0,\ I_\Omega^\varphi(sx) < \infty\}$$

et

$$B_\Omega^\varphi(r) = \{x \mid I_\Omega^\varphi(x) \leqslant r\}, \quad 0 < r < \infty,$$

l'espace vectoriel L_Ω^φ étant muni de la topologie vectorielle admettant pour base de voisinages de 0 l'ensemble des $\varepsilon B_\Omega^\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

On dit que L_Ω^φ est un *espace de Musielak–Orlicz* ([8]).

Quand $\varphi(t, \omega)$ ne dépend pas de ω, φ est une fonction d'Orlicz et L_Ω^φ un espace d'Orlicz.

Les $\varepsilon B_\Omega^\varphi(\varepsilon)$ définissent bien une topologie vectorielle, car on a

$$aB_\Omega^\varphi(r) + bB_\Omega^\varphi(s) \subset (a+b)B_\Omega^\varphi(r+s). \tag{3}$$

L_Ω^φ est un espace vectoriel topologique métrisable et complet.

Par exemple, si Ω est un ensemble muni de la mesure cardinale (tout $S \subset \Omega$ est mesurable et de mesure Cardinal(S)), on a

$$I_\Omega^\varphi(x) = \sum_{\omega \in \Omega} \varphi(|x(\omega)|, \omega),$$

et si de plus Ω est l'ensemble N des entiers $n \geqslant 0$, L_Ω^φ se note souvent l^φ.

Remarque 1. Tout espace de Musielak–Orlicz L_Ω^φ relatif à un espace mesuré Ω purement atomique est de la forme $L_A^{\varphi'}$ où A est l'ensemble des atomes de Ω muni de la mesure cardinale et où, pour tout $a \in A$,

$$\varphi'(t, a) = \varphi(t, a) m_a,$$

m_a étant la mesure de l'atome a (on a $0 < m_a < \infty$) et $\varphi(t, a)$ la valeur "essentielle" de $\varphi(t, \omega)$ pour $\omega \in a$.

Si, pour $n \in N$, $\varphi(t, n) = t^{p_n}$, où $0 < p_n < \infty$, l^φ se note souvent (cf. [13] et références de [13])

(4) $$l^{(p_n)}.$$

Si Ω est un espace mesuré, on note

$$L^0_\Omega$$

l'espace des (classes de) fonctions scalaires mesurables et presque partout finies sur Ω, muni de la topologie de la convergence en mesure sur tout sous-ensemble mesurable de Ω de mesure finie.

Remarque 2. Pour tout espace de Musielak–Orlicz L^φ_Ω on a $L^\varphi_\Omega \subset L^0_\Omega$ avec injection canonique continue.

Pour tout ensemble mesurable $S \subset \Omega$ (implicitement muni de la structure d'espace mesuré induite par Ω), on identifiera L^φ_S et L^0_S aux sous-espaces de L^φ_Ω et L^0_Ω constitués par les fonctions presque partout nulles sur $\Omega \setminus S$.

On note χ_S la fonction caractéristique de S.

1.2. Opérateurs bornifiants. Rappelons qu'un sous-ensemble B d'un espace vectoriel topologique E est dit borné quand tout voisinage V de 0 dans E absorbe B (autrement dit, $\varepsilon B \subset V$ pour quelque $\varepsilon > 0$).

Définition 3. Soit $u: E \to F$ un opérateur linéaire entre espaces vectoriels topologiques E et F. On dit que u est *bornifiant* quand il existe dans E un voisinage de l'origine U tel que $u(U)$ soit borné dans F.

On dit qu'un espace vectoriel topologique E est *localement borné* quand il possède un voisinage de 0 borné (autrement dit, quand l'application identique de E est bornifiante).

1.3. Opérateurs galbés par l^0_i. Suivant [20], si E est un espace vectoriel, $A \subset E$, $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de scalaires, on pose

(5) $$\sum_{i \in I}{}' a_i A = \bigcup_J \Big\{ \sum_{i \in J} a_i x_i \mid \forall i,\ x_i \in A \Big\},$$

où J parcourt l'ensemble des parties finies non vides de I.

Définition 4. Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques, on dit qu'un opérateur linéaire $u: E \to F$ est *galbé par* l^0_i quand, pour tout voisinage V de 0 dans F, il existe un voisinage U de 0 dans E et une suite de scalaires $a_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$, vérifiant (cf. (5))

(6) $$\sum_{n \geqslant 0}{}' a_n u(U) \subset V.$$

On dit que E est *galbé par* l^0_i quand l'application identique de E est galbée par l^0_i.

Pour justifier les expressions „galbé par l^0_i" ou (cf. infra) „par l^0_g" on renvoie à la définition des galbes ([19], ou [14], [18]); l^0_i et l^0_g, ainsi que les galbes, sont des espaces de suites munis d'une structure à convergence: u est galbé par l^0_i (resp, l^0_g) quand l^0_i (resp. l^0_g) est continûment inclus dans le galbe de u.

Les définitions 4 et 5 suffiront pour la compréhension de cet article.

Proposition 1. *Tout opérateur bornifiant est galbé par* l^0_i.

En effet, supposons $u: E \to F$ bornifiant. $u(U)$ est borné dans F pour un voisinage U de 0 dans E. Soit V un voisinage de 0 dans F. Il existe une suite (V_n) de voisinages de 0 dans F vérifiant $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$, $V_0 + V_0 \subset V$, puis des $a_n > 0$ tels que $a_n u(U) \subset V_n$, d'où (6).

Remarque 3. On sait ([7], [11], [19], n° 2.3.2.6) qu'on peut dire mieux pour un espace localement borné E: E est localement p-convexe pour un $p \in]0, 1]$. Autrement dit, E possède une base (V_i) de voisinages de 0 vérifiant

$$\sum |a_n|^p \leqslant 1 \Rightarrow \sum_n{}' a_n V_i \subset V_i.$$

La réciproque de la proposition 1 est vraie dans certains cas: voir, plus loin, les théorèmes 2, 3, 4, 5.

Proposition 2. *Pour qu'un espace vectoriel topologique E soit galbé par l^0_i il faut et il suffit qu'il soit une limite projective filtrante „bornifiante" d'espaces vectoriels topologiques.*

Autrement dit, il faut et il suffit que E soit limite projective d'un système projectif filtrant d'espaces vectoriels topologiques $(E_i, u_{ij}: E_j \to E_i)_{i \in I, j \in I, i \leqslant j}$ vérifiant la propriété suivante: pour tout $i \in I$ il existe $j \geqslant i$ tel que u_{ij} soit bornifiant.

On trouvera en [19], théorèmes 6.1.1 et 6.1.3, des énoncés plus complets (par exemple, les E_i peuvent être supposés semimétrisables).

Démonstration. Supposons que E soit limite projective filtrante bornifiante du système (E_i, u_{ij}); soit u_i l'application canonique $E \to E_i$. Soit V un voisinage de 0 dans E. $V \supset u_i^{-1}(V_i)$ pour un voisinage V_i de 0 dans un E_i. D'après la proposition 1, il existe $j \geqslant i$, un voisinage V_j de 0 dans E_j et des $a_n > 0$ vérifiant $\sum_{n \geqslant 0}{}' a_n u_{ij}(V_j) \subset V_i$, d'où $\sum{}' a_n u_j^{-1}(V_j) \subset V$. E est donc galbé par l^0_i.

Réciproquement, supposons E galbé par l^0_i. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une base de voisinages équilibrés de 0 dans E. Pour tout i, soit $\mathscr{T}_i$ la topologie vectorielle la plus fine sur E rendant V_i borné: $\mathscr{T}_i$ admet pour base de voisinages de 0 l'ensemble des $\sum_{n \geqslant 0}{}' a_n V_i$, où (a_n) parcourt l'ensemble des suites de $]0, \infty[$ ([20]). Par hypothèse, tout V_i est un voisinage de 0 pour un $\mathscr{T}_j$ (donc la topologie de E est la borne supérieure des $\mathscr{T}_i$), et V_i étant borné pour $\mathscr{T}_i$, l'application identique $(E, \mathscr{T}_j) \to (E, \mathscr{T}_i)$ est bornifiante. E est donc limite projective filtrante bornifiante des $(E, \mathcal{T}_i)$, en posant $i \leqslant j$ quand $\mathcal{T}_j$ est plus fine que $\mathcal{T}_i$.

1.4. Opérateurs galbés par l_g^0. Si E est un espace vectoriel et $A \subset E$, on pose, pour tout entier $N \geqslant 1$,

$$(7) \qquad +^N A = \Big\{\sum_{n=1}^{N} x_n \mid \forall n,\ x_n \in A\Big\}.$$

Définition 5. Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques, on dit qu'un opérateur linéaire $u \colon E \to F$ est *galbé par* l_g^0 quand pour tout voisinage V de 0 dans F il existe un voisinage U de 0 dans E tel que, pour tout N, V absorbe $+^N u(U)$.

On dit que E est *galbé par* l_g^0 quand l'application identique de E est galbée par l_g^0.

Evidemment, tout opérateur galbé par l_i^0 est galbé par l_g^0.

La réciproque est fausse en général ([15], [19], n° 6.6.4). On verra qu'elle est vraie dans certains cas (théorèmes 3, 4, 6).

1.5. Propriétés de stabilité. On établira aisément que les sous-espaces, produits, images par des opérateurs linéaires continus presque ouverts, complétés, limites inductives dénombrables (pour la topologie vectorielle limite inductive) d'espaces vectoriels topologiques galbés par l_i^0 (resp. l_g^0) sont galbés par l_i^0 (resp. par l_g^0).

Le composé (à gauche ou à droite) d'un opérateur galbé par l_i^0 (resp. l_g^0) et d'un opérateur linéaire continu est encore galbé par l_i^0 (resp. l_g^0).

1.6. Ensembles additivement bornés.

Définition 6. Un sous-ensemble B d'un espace vectoriel topologique E est dit *additivement borné* quand pour tout voisinage V de 0 dans E il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que $B \subset +^N V$.

Une F-seminorme d'un espace vectoriel E est une application ν: $E \to [0, \infty[$ vérifiant, pour $x \in E$, $y \in E$, $\nu(x+y) \leqslant \nu(x) + \nu(y)$ et, pour s scalaire, $\nu(sx) \leqslant \nu(x)$ si $|s| \leqslant 1$, $\nu(sx) \to 0$ quand $s \to 0$.

On sait que toute topologie vectorielle peut être définie par une famille de F-seminormes. En effet, pour toute suite de voisinages de 0 équilibrés V_n, $-\infty < n < \infty$, d'un espace vectoriel topologique E vérifiant $V_n + V_n \subset V_{n-1}$ il existe une F-seminorme ν de E (continue) vérifiant ([20], p. 2)

$$\nu(x) < 2^{-n} \Rightarrow x \in V_n \Rightarrow \nu(x) \leqslant 2^{-n}.$$

Cela donne aussi l'énoncé suivant.

Proposition 3. *Un sous-ensemble B d'un espace vectoriel topologique E est additivement borné si et seulement si $\sup_{x \in B} \nu(x) < \infty$ pour toute F-seminorme continue ν de E.*

L'image d'un ensemble additivement borné par un opérateur linéaire continu est additivement bornée.

Tout ensemble borné est additivement borné.

La réciproque est fausse en général. On a cependant le résultat suivant.

Proposition 4. *Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques, tout opérateur linéaire $u \colon E \to F$ galbé par l_g^0 applique tout sous-ensemble additivement borné de E sur un borné de F.*

En effet, soient B un sous-ensemble additivement borné de E et V un voisinage de 0 dans F. Il existe un voisinage U de 0 dans E tel que V absorbe $u(+^N U)$ pour tout N. Comme $+^N U \supset B$ pour N assez grand, V absorbe $u(B)$. $u(B)$ est donc borné dans F.

On verra que la réciproque est fausse en général (proposition 8) mais qu'elle est vraie dans certains cas (théorème 5).

Déterminons par exemple les sous-ensembles additivement bornés d'un espace de Musielak–Orlicz.

Théorème 1. *Soit φ une fonction de Musielak–Orlicz sur un espace mesuré Ω.*

Un ensemble $B \subset L_\Omega^\varphi$ est additivement borné dans L_Ω^φ si et seulement si on a

(i) *il existe $s > 0$ tel que $\sup_{x \in B} \int_\Omega \varphi(s|x(\omega)|, \omega)\, d\omega < \infty$; et, quand l'ensemble A des atomes de Ω n'est pas vide,*

(ii) *$\sup_{x \in B} \sup_{a \in A} \varphi(|tx(a)|, a) m_a \to 0$ quand $t \to 0$, m_a désignant la mesure de l'atome a.*

Démonstration. Supposons B additivement borné. $B \subset +^N B_\Omega^\varphi(1)$ pour quelque entier $N \geqslant 1$, d'où $\frac{1}{N} B \subset B_\Omega^\varphi(N)$ d'après (3). B vérifie donc (i). Si $A \neq \emptyset$, la topologie $\mathcal{T}$ sur L_Ω^φ définie par la F-seminorme

$$|x|_\varphi = \inf\Big\{s > 0 \mid \sup_{a \in A} \varphi\Big(\frac{1}{s}|x(a)|, a\Big) m_a \leqslant s\Big\}.$$

est localement convexe et moins fine que la topologie donnée de L_Ω^φ: pour $\mathcal{T}$, B est additivement borné, donc borné, d'où (ii).

Réciproquement, supposons (i) et (quand $A \neq \emptyset$) (ii) vérifiés et prouvons que B est additivement borné.

On peut supposer que, pour tout $x \in B$ et pour tout $y \in L_\Omega^\varphi$, $|y| \leqslant |x| \Rightarrow y \in B$. On a alors

$$sB \subset B_\varepsilon + B'_\varepsilon$$

avec $B_\varepsilon = sB$ et $B'_\varepsilon = \{0\}$ si $A = \emptyset$ et, quand $A \neq \emptyset$,

$$B_\varepsilon = \big\{x \in sB \mid \forall a \in A,\ \varphi(|x(a)|, a) m_a \leqslant \varepsilon\big\},$$

$$B'_\varepsilon = \Big\{x \in sB \mid x = \sum_{a \in A} x(a)\chi_a \text{ et } \forall a \in A,\ x(a) = 0 \text{ ou } \varphi(|x(a)|, a) m_a > \varepsilon\Big\}.$$

Soit $x \in B_\varepsilon$. On pose $x_0 = x$ si $I_\Omega^\varphi(x) \leqslant 2\varepsilon$. Sinon, il existe un ensemble mesurable $S_0 \subset \Omega$ vérifiant $\varepsilon < I_{S_0}^\varphi(x) \leqslant 2\varepsilon$ et on pose $x_0 = x\chi_{S_0}$. On répète cette opération sur $x\chi_{\Omega\setminus S_0}$. En itérant, on trouve une partition de Ω en ensembles mesurables S_h, $0 \leqslant h \leqslant k$, avec $I_{S_h}^\varphi(x) \leqslant 2\varepsilon$ pour $0 \leqslant h \leqslant k$ et $I_{S_h}^\varphi(x) > \varepsilon$ pour $h < k$, d'où $k\varepsilon < m$ si

$$m = \sup_{x \in B} I_\Omega^\varphi(sx).$$

Si $x_h = x\chi_{S_h}$ on a $x = \sum_{h=0}^{k} x_h$, d'où

$$B_\varepsilon \subset +^N B_\Omega^\varphi(2\varepsilon), \quad \text{avec} \quad N = 1 + [m/\varepsilon]. \tag{8}$$

D'autre part, si $x \in B'_\varepsilon$, $x(a) \neq 0$ pour moins de m/ε atomes a. Grace à (ii), on a donc, pour un entier N' assez grand,

$$\sup_{x \in B'_\varepsilon} I_\Omega^\varphi\left(\frac{x}{N'}\right) \leqslant \frac{m}{\varepsilon} \sup_{x \in B'_\varepsilon} \sup_{a \in A} \varphi\left(\frac{|x(a)|}{N'}, a\right) m_a \leqslant 2\varepsilon.$$

D'où

$$sB \subset B_\varepsilon + B'_\varepsilon \subset +^{N+N'} B_\Omega^\varphi(2\varepsilon)$$

et $B \subset +^M 2\varepsilon B_\Omega^\varphi(2\varepsilon)$ si $2\varepsilon s M \geqslant N + N'$. B est donc additivement borné.

On a les cas particuliers suivants.

1.6.1. Si φ est une fonction de Musielak–Orlicz et si Ω est un espace mesuré sans atome, $B \subset L_\Omega^\varphi$ est additivement borné si et seulement si il existe $s > 0$ vérifiant

$$\sup_{x \in B} \int_\Omega \varphi\big(s|x(\omega)|, \omega\big) d\omega < \infty.$$

1.6.2. Si φ est une fonction d'Orlicz et Ω un ensemble non vide muni de la mesure cardinale, $B \subset L_\Omega^\varphi$ est additivement borné si il existe $s > 0$ vérifiant (cf. (2))

$$\sup_{x \in B} \sum_{\omega \in \Omega} \varphi\big(s|x(\omega)|\big) < \varphi(\infty).$$

1.6.3. Si $p_n > 0$ et $p_n \to 0$, un ensemble $B \subset l^{(p_n)}$ (cf. (4)) est additivement borné dans $l^{(p_n)}$ si et seulement si on a

$$\sup_{x \in B} \sum_0^\infty |x_n|^{p_n} < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{x \in B} |x_n|^{p_n} \to 0.$$

Notons ([1]) qu'un ensemble $B \subset l^{(p_n)}$ est borné dans $l^{(p_n)}$ si et seulement si on a

$$\sup_{x \in B} \sum_0^\infty |x_n|^{p_n} < \infty \quad \text{et} \quad \sup_{x \in B} \sum_N^\infty |x_n|^{p_n} \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

La notion d'ensemble additivement borné se rencontre par exemple dans l'étude des mesures vectorielles. On a en effet le résultat suivant.

PROPOSITION 5. *Soit $\mathcal{T}$ une tribu de parties d'un ensemble Σ et soit $\mu: \mathcal{T} \to E$ une fonction σ-additive à valeurs dans un espace vectoriel topologique E. $\mu(\mathcal{T}) = \{\mu(S) \mid S \in \mathcal{T}\}$ est alors additivement borné dans E.*

Il suffit en effet d'appliquer [2], corollaire 4.5, et la proposition 3 précédente.

Je conjecture qu'il existe une tribu $\mathcal{T}$, un espace vectoriel topologique E et une fonction σ-additive d'ensembles $\mu: \mathcal{T} \to E$ telle que $\mu(\mathcal{T})$ ne soit pas borné dans E. (1)

Il faudrait savoir ce qu'il en est quand E est un espace de Musielak–Orlicz (non localement borné): cf. [19], nº 7.2, 7.3. (2)

§ 2

Etudions les réciproques des implications (1) de l'introduction, pour quelques types d'opérateurs.

2.1. Opérateurs positifs. Rappelons qu'un espace vectoriel topologique réel réticulé E est dit *localement solide* quand il possède une base (V_i) de voisinages de 0 solides, c'est-à-dire tels qu'on ait

$$(x \in V_i,\ y \in E,\ |y| \leqslant |x|) \Rightarrow y \in V_i.$$

THÉORÈME 2. *Soient E et F des espaces vectoriels topologiques réticulés localement solides. On suppose que F possède un voisinage V de 0 tel que toute suite $(x_n) \subset V$ positive et croissante soit bornée dans F.*

Tout opérateur linéaire positif $u: E \to F$ galbé par l_i^0 est alors bornifiant.

En particulier, F est localement borné s'il est galbé par l_i^0.

Démonstration. Il existe dans E un voisinage de 0 solide U et des $a_n > 0$ vérifiant (cf. (5)) $\sum' a_n u(U) \subset V$. Montrons que $u(U)$ est borné dans F: si $x_n \in U$ pour $n = 0, 1, \ldots$, la suite des $\sum_0^n a_\nu u(|x_\nu|)$, $n \geqslant 0$, est une suite croissante et positive de V, donc bornée. Comme $|a_n u(x_n)| \leqslant \sum_0^n a_\nu u(|x_\nu|)$ et que F est localement solide, l'ensemble des $a_n u(x_n)$, $n \geqslant 0$, est borné dans F. Cela prouve que $u(U)$ est borné dans F puisque (x_n) est une suite arbitraire de U.

COROLLAIRE 2.1. *Soit F un sous-espace vectoriel réticulé de L_Ω^0 (nº 1.1), muni d'une topologie vectorielle localement solide et possédant un voisinage V de 0 borné et fermé dans L_Ω^0 (Ω est un espace mesuré quelconque).*

(a) *F est alors localement borné s'il est galbé par l_i^0.*

(b) *Plus généralement, si E est un espace vectoriel topologique réticulé localement solide, tout opérateur linéaire $u: E \to F$ positif et galbé par l_i^0 est bornifiant.*

(1) Conjecture vérifiée en [23].

(2) Problème partiellement résolu: [21], [22], [24].

En effet, si (x_n) est une suite croissante et positive de V, et si $x(\omega) = \lim x_n(\omega)$ pour $\omega \in \Omega$, $x(\omega)$ est fini pour presque tout ω car V est borné dans L^0_Ω, donc $x \in F$ car V est fermé dans L^0_Ω, donc (x_n) est bornée dans F puisque $0 \leqslant x_n \leqslant x$ et que F est localement solide.

Le corollaire 2.1 s'applique par exemple si F est un espace de Musielak–Orlicz L^φ_Ω, avec $\varphi(\infty, \omega) := \infty$ pour tout ω (2.3.3, exemple 2, infra). Dans ce cas, le (a) ci-dessus sera renforcé plus loin (théorème 5).

W. Fischer et U. Schöler ont, indépendamment, obtenu (a) dans le cas particulier où F est un espace d'Orlicz L^φ, la fonction φ vérifiant la condition Δ_2: $\sup\limits_{t>0} \varphi(2t)/\varphi(t) < \infty$ (communication personnelle).

On trouvera en [19], théorème 6.4.1, une généralisation du théorème 2.

2.2. Opérateurs définis sur un espace localement additivement borné. Voici une autre façon de montrer qu'un opérateur est bornifiant.

Si un espace vectoriel topologique E est „localement additivement borné" (possède un voisinage de 0 additivement borné), un opérateur linéaire défini sur E est bornifiant s'il vérifie la condition (δ) de l'introduction, a fortiori s'il est galbé par l^0_g (proposition 4).

On en tire les conséquences suivantes.

PROPOSITION 6. *Supposons que Ω soit un espace mesuré sans atome et φ une fonction de Musielak–Orlicz sur Ω, ou bien que Ω soit un ensemble muni de la mesure cardinale et φ une fonction d'Orlicz.*

Alors, pour tout opérateur u défini sur L^φ_Ω, les conditions (α), (β), (γ), (δ) *sont équivalentes.*

En effet, d'après 1.6.1 et 1.6.2, L^φ_Ω est localement additivement borné.

Pour un opérateur défini sur un espace de Musielak–Orlicz quelconque, aucune des réciproques des implications (1) n'est vraie. On verra que (δ) $\not\Rightarrow$ (γ) (2.3.3, exemple 3). (γ) $\not\Rightarrow$ (β) car il existe un espace vectoriel topologique métrisable complet et séparable E galbé par l^0_g mais pas par l^0_t ([15], [19], n° 6.6.4); d'après [19], n° 0.3.11, E est un quotient d'un espace de Musielak–Orlicz l^φ et d'après [19], n° 2.4.7, l'application canonique u: $l^\varphi \to E$ est galbée par l^0_g mais non par l^0_t. De même, (β) $\not\Rightarrow$ (α).

PROPOSITION 7. *Ω étant de mesure bornée et sans atome, supposons qu'un espace d'Orlicz L^φ_Ω admette un quotient séparé non nul galbé par l^0_g. Il existe alors $p > 0$ vérifiant $L^\varphi_\Omega \subset L^p_\Omega$.*

Car si F est un quotient de L^φ_Ω galbé par l^0_g, F est localement borné d'après 1.5 et la proposition 6, donc localement p-convexe pour un $p \in]0, 1]$ (remarque 3). Par conséquent ([16], [19], proposition 3.4.1), si F est séparé et non nul, $l^p \subset l^\psi$ avec $\psi(t) = 1/\varphi(1/t)$, d'où

$$\limsup_{t\to 0} t^{-p}\psi(t) < \infty \quad \text{et} \quad \liminf_{t\to\infty} t^{-p}\varphi(t) > 0, \quad \text{d'où} \quad L^\varphi_\Omega \subset L^p_\Omega.$$

Je ne sais pas si, réciproquement, la condition $L^\varphi_\Omega \subset L^p_\Omega$, où $0 < p < 1$, entraîne que L^φ_Ω admet un quotient séparé non nul localement p-convexe.

2.3. Inclusions entre espaces de Musielak–Orlicz. Soient Ω un espace mesuré, φ et ψ des fonctions de Musielak–Orlicz sur Ω.

Nous examinons dans les théorèmes 3 et 4 ci-dessous à quelle condition on a $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$, et surtout à quelles conditions cette inclusion (c'est-à-dire l'injection canonique $L^\psi_\Omega \to L^\varphi_\Omega$) vérifie les propriétés (α)–(δ).

Le premier point a déjà été étudié en [5] dans le cas où φ et ψ sont convexes en t et en [4] dans un cas plus général (voir aussi les références de [4]); on redonne ci-dessous (parties (a) des théorèmes 3 et 4) les conditions de ces articles, sous une forme un peu différente.

THÉORÈME 3. *Supposons Ω purement atomique: on conviendra* (remarque 1) *que, pour tout $\omega \in \Omega$, $\{\omega\}$ est un atome de mesure* 1.

Si $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, $a > 0$, $\omega \in \Omega$, posons

$$t_{\varepsilon,\lambda,a}(\omega) = \sup\{t \geqslant 0 \mid \psi(t, \omega) \leqslant \varepsilon \text{ et } \varphi(\lambda t, \omega) > a\psi(t, \omega)\}, \tag{9}$$

avec $\sup \emptyset = 0$: *on a* $0 \leqslant t_{\varepsilon,\lambda,a}(\omega) \leqslant \infty$.

(a) *Pour que $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$ il faut et il suffit qu'il existe $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, $a < \infty$, $s > 0$ vérifiant*

$$\sum_{\omega\in\Omega} \varphi\big(st_{\varepsilon,\lambda,a}(\omega), \omega\big) < \infty. \tag{10}$$

(b) *Les conditions* (i) *et* (ii) *ci-dessous sont équivalentes.*

(i) *Tout sous-ensemble additivement borné de L^ψ_Ω est un borné de L^φ_Ω.*

(ii) *Pour tout $a > 0$ il existe $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ et $s > 0$ vérifiant* (10).

(c) *Les conditions* (iii), (iv) *et* (v) *ci-dessous sont équivalentes* (*et entraînent les précédentes*).

(iii) *$L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$ et cette inclusion est galbée par l^0_g.*

(iv) *$L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$ et cette inclusion est galbée par l^0_t.*

(v) *Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $a > 0$ on puisse trouver $\lambda > 0$ et $s > 0$ vérifiant* (10) *et tel qu'on ait*

$$\sum_{\omega\in\Omega_\varepsilon} \varphi(\infty, \omega) < \infty, \quad \text{où} \quad \Omega_\varepsilon = \{\omega \in \Omega \mid \psi(\infty, \omega) \leqslant \varepsilon\}. \tag{11}$$

(d) *Les conditions* (vi) *et* (vii) *ci-dessous sont équivalentes* (*et entraînent les précédentes*):

(vi) *$L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$ et cette inclusion est bornifiante.*

(vii) $\inf\limits_{\omega\in\Omega} \psi(\infty, \omega) > 0$ *et il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $a > 0$, on puisse trouver $\lambda > 0$ et $s > 0$ vérifiant* (10).

On voit que si $\inf\limits_{\omega\in\Omega} \psi(\infty, \omega) > 0$, (iii), (iv) *et* (vi) *sont équivalentes.*

THÉORÈME 4. *Supposons Ω sans atome. Pour $\lambda > 0$, $\alpha > 0$, $\omega \in \Omega$. posons*

(12) $$t_{\infty,\lambda,\alpha}(\omega) = \sup\{t \geqslant 0 \mid \varphi(\lambda t, \omega) > \alpha\psi(t, \omega)\},$$

avec $\sup\emptyset = 0$.

(a) *Pour que $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$ il faut et il suffit qu'il existe $\lambda > 0$, $\alpha < \infty$ et $s > 0$ vérifiant*

(13) $$\int_\Omega \varphi\big(st_{\infty,\lambda,\alpha}(\omega), \omega\big)d\omega < \infty.$$

(b) *Pour que $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$ avec inclusion bornifiante il faut et il suffit que pour tout $\alpha > 0$ il existe $\lambda > 0$ vérifiant*

(14) $$t_{\infty,\lambda,\alpha} \in L^\varphi_\Omega.$$

D'après la proposition 6, cela équivaut aussi à chacune des conditions (i), (iii), (iv) *du théorème* 3.

Remarque 4. Si $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$, on verra dans les démonstrations ci-dessous que les théorèmes 3 et 4 restent vrais si on remplace φ par ψ et s par 1 dans (10), (13) et (14).

2.3.1. Démontrons le théorème 3.

D1. Supposons qu'existent $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ et $s > 0$ vérifiant (10). Soit $x \in L^\psi_\Omega$ vérifiant $I^\psi_\Omega(x) < \infty$ et soit $K = \{\omega \in \Omega \mid \psi(|x(\omega)|, \omega) > \varepsilon\}$. K est fini, donc il existe r vérifiant $0 < r \leqslant \inf\{\lambda, s\}$ et $I^\varphi_K(rx) < \infty$. Si $\omega \notin K$ on a

(15) $$\varphi\big(r|x(\omega)|, \omega\big) \leqslant \sup\big\{\alpha\psi\big(|x(\omega)|, \omega\big), \varphi\big(st_{\varepsilon,\lambda,\alpha}(\omega), \omega\big)\big\}$$

d'où

$$I^\varphi_\Omega(rx) \leqslant \alpha I^\psi_\Omega(x) + I^\varphi_\Omega(st_{\varepsilon,\lambda,\alpha}) + I^\varphi_K(rx) < \infty.$$

Donc $x \in L^\varphi_\Omega$, d'où $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$.

D2. Inversement, si on a $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$, prouvons qu'il existe $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha < \infty$ vérifiant

(16) $$I^\varphi_\Omega(t_{\varepsilon,\lambda,\alpha}) < \infty.$$

Supposons cela faux: pour tout entier $n \geqslant 1$ on a

$$I^\varphi_\Omega(t_{1/n,1/n,n}) = \infty.$$

D'après (9) il existe des $t_{n,\omega}$, $\omega \in \Omega$, vérifiant $0 \leqslant t_{n,\omega} < \infty$ et

(17) $$\psi(t_{n,\omega}, \omega) \leqslant \frac{1}{n},$$

(18) $$\varphi\left(\frac{1}{n}t_{n,\omega}, \omega\right) \geqslant n\psi(t_{n,\omega}, \omega),$$

(19) $$\sum_{\omega\in\Omega}\psi(t_{n,\omega}, \omega) = \infty.$$

Puis, grâce à (17) et (19), il existe des ensembles $J_n \subset \Omega$ vérifiant

(20) $$\frac{1}{n} \leqslant \sum_{\omega\in J_n}\psi(t_{n,\omega}, \omega) < \frac{2}{n}.$$

Si $x_n(\omega) = \frac{1}{n}t_{n,\omega}$ pour $\omega \in J_n$ et $x_n(\omega) = 0$ pour $\omega \notin J_n$, on voit que, quand $n \to \infty$, x_n tend vers 0 dans L^ψ_Ω (par (20)) mais pas dans L^φ_Ω puisque de (18) et (20) on déduit $I^\varphi_\Omega(x) \geqslant 1$. Mais cela est absurde car, d'après le théorème du graphe fermé (remarque 2) l'inclusion $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$ est continue.

Il existe donc $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ et $\alpha < \infty$ vérifiant (16). Comme $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$, on voit qu'il existe en outre $s > 0$ vérifiant (10) (remarquer que si $\Omega' \subset \Omega$ et $\sum_{\omega\in\Omega_1}\psi(\infty, \omega) < \infty$, alors $\sum_{\omega\in\Omega'}\varphi(\infty, \omega) < \infty$).

D3. Supposons (ii) vérifié, prouvons (i): soit B un sous-ensemble additivement borné de L^ψ_Ω, montrons que B est un borné de L^φ_Ω.

Soit $\eta > 0$. Posons

(21) $$\alpha = \eta/M,$$

où $M > 0$ est tel que $B^\psi_\Omega(M)$ absorbe B (théorème 1), puis, appliquant (ii), soient $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ et $s \in]0, \lambda]$ vérifiant (10).

Il existe un ensemble $J \subset \Omega$ ayant un nombre fini N d'éléments et tel qu'on ait

(22) $$I^\varphi_{\Omega\setminus J}(st_{\varepsilon,\lambda,\alpha}) \leqslant \eta.$$

D'après (a), (ii) entraîne $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$, continûment d'après le théorème du graphe fermé. B est donc additivement borné dans L^φ_Ω et (théorème 1) il existe $r > 0$ vérifiant, pour tout $x \in rB$,

$$I^\psi_\Omega(x) \leqslant M, \quad \sup_{\omega\in\Omega}\psi\big(|x(\omega)|, \omega\big) \leqslant \varepsilon, \quad \sup_{\omega\in\Omega}\varphi\big(s|x(\omega)|, \omega\big) \leqslant \eta/N,$$

d'où, en appliquant (15), (21), (22)

$$I^\varphi_\Omega(sx) \leqslant \alpha I^\psi_\Omega(x) + I^\varphi_{\Omega\setminus J}(st_{\varepsilon,\lambda,\alpha}) + I^\varphi_J(sx) \leqslant 3\eta.$$

Donc $srB \subset B^\varphi_\Omega(3\eta)$, ce qui prouve que B est borné dans L^φ_Ω.

D4. Montrons que (i) entraîne que pour tout $\alpha > 0$ il existe $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$ vérifiant (16); d'où (ii) car (i) entraîne aussi $L^\psi_\Omega \subset L^\varphi_\Omega$.

Dans le cas contraire on voit comme en D2 que pour $\alpha > 0$ convenable et pour tout entier $n \geqslant 1$ on peut trouver des fonctions $x_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$, vérifiant $0 \leqslant x_n(\omega) < \infty$ et

(23) $$\psi\big(x_n(\omega), \omega\big) \leqslant \frac{1}{n},$$

(24) $$\varphi\left(\frac{1}{n}x_n(\omega), \omega\right) \geqslant \alpha\psi\big(x_n(\omega), \omega\big),$$

$$(25)\qquad 1-\frac{1}{n}<I_\Omega^\psi(x_n)\leqslant 1.$$

D'après (25) et (23), $x_n\in B_\Omega^\psi(1)$ et $\sup_{\omega\in\Omega}\psi(x_n(\omega),\omega)\to 0$ quand $n\to\infty$, donc $\{x_n|\ n\geqslant 1\}$ est additivement borné dans L_Ω^ψ (théorème 1). Mais cet ensemble n'est pas borné dans L_Ω^φ (en contradiction avec (i)) car d'après (24) et (25) on a

$$I_\Omega^\varphi\left(\frac{1}{n}x_n\right)\geqslant a\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

D5. Supposant qu'il existe $\eta>0$ tel que $B_\Omega^\varphi(1)$ absorbe $+^N B_\Omega^\psi(\eta)$ pour tout entier $N\geqslant 1$, prouvons que (v) est vérifié (avec $\varepsilon=\eta/2$). On en déduira (iii) $\Rightarrow$ (v).

La condition (11) est vérifiée avec $\varepsilon=\eta$: si $\omega\in\Omega_\eta$, $B_\Omega^\psi(\eta)$ contient le sous-espace vectoriel engendré par $\chi_{\{\omega\}}$, donc $B_\Omega^\varphi(1)$ contient le sous-espace vectoriel engendré par $\{\chi_{\{\omega\}}|\ \omega\in\Omega_\eta\}$, d'où $\sum_{\omega\in\Omega\eta}\varphi(\infty,\omega)\leqslant 1$.

Montrons en outre qu'on a, pour N entier et pour tous $a>0$, $\lambda>0$,

$$(26)\qquad \left(Na\varepsilon>1 \text{ et } \lambda+^N B_\Omega^\psi(2\varepsilon)\subset B_\Omega^\varphi(1)\right)\ \Rightarrow\ I_\Omega^\psi(t_{\varepsilon,\lambda,a})\leqslant 2N\varepsilon.$$

On en déduira que, si $\varepsilon=\eta/2$, pour tout $a>0$ il existe $\lambda>0$ vérifiant (16), donc (10) avec $s>0$ convenable car l'hypothèse entraîne $L_\Omega^\psi\subset L_\Omega^\varphi$, donc que (v) est vérifié.

Supposons qu'on ait $I_\Omega^\psi(t_{\varepsilon,\lambda,a})>2N\varepsilon$, avec $Na\varepsilon>1$. Il existe des $t_\omega\in[0,\infty[$ vérifiant

$$\psi(t_\omega,\omega)\leqslant\varepsilon,\qquad \varphi(\lambda t_\omega,\omega)>a\psi(t_\omega,\omega),\qquad \sum_{\omega\in\Omega}\psi(t_\omega,\omega)>2N\varepsilon,$$

puis N ensembles finis deux à deux disjoints $J_n\subset\Omega$ vérifiant

$$\varepsilon<\sum_{\omega\in J_n}\psi(t_\omega,\omega)\leqslant 2\varepsilon.$$

Si alors $x_n=\sum_{\omega\in J_n}t_\omega\chi_{\{\omega\}}$,

$$x_n\in B_\Omega^\psi(2\varepsilon)\qquad\text{et}\qquad \lambda\sum_1^N x_n\notin B_\Omega^\varphi(1)$$

puisque

$$I_\Omega^\varphi\left(\lambda\sum_1^N x_n\right)=\sum_{n=1}^N\sum_{\omega\in J_n}\varphi(\lambda t_\omega,\omega)>\sum_1^N\sum_{\omega\in J_n}a\psi(t_\omega,\omega)>Na\varepsilon>1.$$

On a donc (26).

D6. Comme (iv) $\Rightarrow$ (iii), on voit que (iv) $\Rightarrow$ (v).

D7. Prouvons que (vii) $\Rightarrow$ (vi). Soit $\varepsilon>0$ vérifiant

$$(27)\qquad 0<\varepsilon<\inf_{\omega\in\Omega}\psi(\infty,\omega)$$

et tel que, pour tout $a>0$, on puisse trouver $\lambda>0$ et $s>0$ vérifiant (10).

Montrons que $B_\Omega^\psi(\varepsilon)$ est borné dans L_Ω^φ.

$\eta>0$ donné, soit

$$(28)\qquad a=\eta/\varepsilon$$

et soit $\lambda>0$ et $s>0$ vérifiant (10). Grâce à (27), $t_{\varepsilon,\lambda,a}(\omega)<\infty$ pour tout $\omega\in\Omega$, donc on peut prendre s assez petit pour avoir

$$I_\Omega^\varphi(st_{\varepsilon,\lambda,a})\leqslant\eta.$$

D'après (15) on a, pour tout $x\in B_\Omega^\psi(\varepsilon)$,

$$I_\Omega^\varphi(sx)\leqslant aI_\Omega^\psi(x)+I_\Omega^\varphi(st_{\varepsilon,\lambda,a})\leqslant a\varepsilon+\eta=2\eta.$$

Donc $sB_\Omega^\psi(\varepsilon)\subset B_\Omega^\varphi(2\eta)$, et $B_\Omega^\psi(\varepsilon)$ est borné dans L_Ω^φ.

D8. Prouvons (v) $\Rightarrow$ (iv) (ce qui, avec D5 et D6, établit (c)).

$L_{\Omega_\varepsilon}^\varphi$ (cf. (11)) est localement convexe (sa topologie est celle de la convergence simple sur Ω_ε) donc l'inclusion $L_{\Omega_\varepsilon}^\psi\subset L_{\Omega_\varepsilon}^\varphi$ est évidemment galbée par l_t^0.

D'autre part la condition (vii) est vérifiée sur $\Omega_\varepsilon'=\Omega\setminus\Omega_\varepsilon$, donc, d'après D7, l'inclusion $L_{\Omega_\varepsilon'}^\psi\subset L_{\Omega_\varepsilon'}^\varphi$ est bornifiante, et par suite galbée par l_t^0 (proposition 1). On a donc (iv).

D9. Supposons (vi). Cela entraîne (iv), donc (v) d'après D6, et la seconde condition de (vii) est vérifiée.

En outre $B_\Omega^\psi(\varepsilon)$ est borné dans L_Ω^φ pour $\varepsilon>0$ assez petit, donc, pour tout $\omega\in\Omega$, l'espace vectoriel engendré par $\chi_{\{\omega\}}$ n'est pas contenu dans $B_\Omega^\psi(\varepsilon)$, d'où $\psi(\infty,\omega)>\varepsilon$. (vii) est donc vérifié, et le théorème 3 démontré.

2.3.2. Démontrons le théorème 4: Ω est maintenant sans atome. $t_{\infty,\lambda,a}$ est mesurable car si on pose pour tout rationnel $r\in\,]0,\infty[$

$$(29)\qquad S(r,\lambda,a)=\{\omega\in\Omega|\ \varphi(\lambda r,\omega)>a\psi(r,\omega)\}$$

on a $t_{\infty,\lambda,a}=\sup_r r\chi_{S(r,\lambda,a)}$.

La suffisance des conditions de (a) et (b) s'établit facilement, comme dans la démonstration du théorème 3 (D1 et D7).

Inversement, supposons qu'on ait $L_\Omega^\psi\subset L_\Omega^\varphi$ et prouvons qu'il existe $\lambda>0$ et $a<\infty$ vérifiant

$$(30)\qquad I_\Omega^\psi(t_{\infty,\lambda,a})<\infty$$

(d'où (13) pour un $s>0$ convenable).

Prouvons que si $\lambda>0$, $a>0$, $M>0$, on a

$$(31)\qquad \lambda B_\Omega^\psi(M)\subset B_\Omega^\varphi(aM)\ \Rightarrow\ I_\Omega^\psi(t_{\infty,\lambda,a})\leqslant M.$$

Supposons le second membre faux. Il existe une fonction mesurable x (de la forme $\sup_r r\chi_{S(r,1/n,n)}$, où r parcourt un ensemble fini de rationnels (cf. (29))) vérifiant pour tout ω

$$0 \leqslant x(\omega) < \infty, \quad \varphi\big(\lambda x(\omega), \omega\big) > a\psi\big(x(\omega), \omega\big), \quad I_\Omega^\psi(x) > M.$$

Puis (car $\psi\big(x(\omega), \omega\big) < \infty$ pour tout ω), il existe un ensemble mesurable $A \subset \Omega$ vérifiant

$$I_A^\psi(x) = M.$$

Alors $x\chi_A \in B_A^\psi(M)$ mais $\lambda x\chi_A \notin B_\Omega^\varphi(aM)$ (ce qui prouve (31)) car on a

$$I_A^\varphi(\lambda x) > aI_A^\psi(x) = aM.$$

Or, d'après le théorème du graphe fermé, l'inclusion $L_\Omega^\psi \subset L_\Omega^\varphi$ est continue, donc il existe λ, a et $M < \infty$ vérifiant le premier membre de (31), d'où (30).

Supposons en outre l'inclusion $L_\Omega^\psi \subset L_\Omega^\varphi$ bornifiante. Il existe $M > 0$ tel que $B_\Omega^\psi(M)$ soit borné dans L_Ω^φ: d'après (31), pour tout $a > 0$ il existe $\lambda > 0$ tel que $I_\Omega^\psi(t_{\infty,\lambda,a}) \leqslant M$. Cela entraîne que $t_{\infty,\lambda,a}$ appartient à L_Ω^ψ (et donc à L_Ω^φ).

En effet $t_{\infty,\lambda,a}$ est fini presque partout car si $S \subset \Omega$ est mesurable et si $\int_S \psi(\infty, \omega)\,d\omega < \infty$, L_S^ψ est additivement borné dans L_Ω^ψ (nº 1.6.1), donc borné dans L_Ω^φ, d'où $L_S^\psi = \{0\}$ et S est de mesure nulle.

2.3.3. Exemples.

Exemple 1. Si φ et ψ sont des fonctions d'Orlicz, avec $0 < \psi(t) < \infty$ pour $0 < t < \infty$, si l'espace mesuré Ω est 1) un ensemble infini muni de la mesure cardinale, ou 2) de mesure bornée non nulle et sans atome, ou bien 3) de mesure non bornée sans atome, posons

$$s_\Omega(\varphi, \psi) = \inf_{\lambda>0} \limsup_{t} \frac{\varphi(\lambda t)}{\psi(t)},$$

où la limite supérieure est prise pour $t \to 0$ dans le cas 1), $t \to \infty$ dans le cas 2), $t \to {}^0_\infty$ dans le cas 3). Alors $L_\Omega^\psi \subset L_\Omega^\varphi$ si et seulement si $s_\Omega(\varphi, \psi) < \infty$ (c'est la condition usuelle), et cette inclusion vérifie l'une quelconque des conditions (α)–(δ) de l'introduction (équivalentes en vertu de la proposition 6) si et seulement si $s_\Omega(\varphi, \psi) = 0$ (quand $\varphi = \psi$ c'est la condition bien connue pour que L_Ω^φ soit localement borné).

Il suffit d'appliquer les théorèmes 3 et 4 en observant que, φ et ψ étant des fonctions d'Orlicz, les fonctions $t_{\varepsilon,\lambda,a}$ et $t_{\infty,\lambda,a}$ sont constantes.

Exemple 2. Si Ω est de mesure bornée non nulle sans atome et L_Ω^ψ un espace de Musielak–Orlicz, l'inclusion $L_\Omega^\psi \subset L_\Omega^0$ est bornifiante si et seulement si $\psi(\infty, \omega) = \infty$ pour presque tout ω.

En effet, L_Ω^0 est l'espace d'Orlicz L_Ω^φ si $\varphi = \chi_{]1,\infty]}$. La condition (14) équivaut alors à ce qu'on ait, pour presque tout ω, $t_{\infty,\lambda,a}(\omega) < \infty$, c'est-à-dire (cf. (12)) $\psi(t, \omega) \geqslant 1/a$ pour t assez grand.

Exemple 3. Considérons des espaces $l^{(p_n)}$ et $l^{(q_n)}$ (cf. (4)), avec $0 < p_n$, $q_n < \infty$. En appliquant les théorèmes 3 et 4 on obtient aisément les assertions suivantes.

1) Si $T = \{n \geqslant 0 \mid q_n < p_n\}$ et si $r_n = q_n/(p_n - q_n)$ pour $n \in T$, $l^{(p_n)} \subset l^{(q_n)}$ si et seulement si il existe $s > 0, \lambda > 0$, $a > 0$ vérifiant $\sum_{n\in T} s^{q_n}\lambda^{q_n r_n} a^{r_n} < \infty$.

Si $\sup p_n < \infty$, on retrouve les conditions de [9] et [13]: $l^{(p_n)} \subset l^{(q_n)}$ si et seulement si il existe $a > 0$ vérifiant $\sum_{n\in T} a^{r_n} < \infty$.

2) Si $q_n \to 0$, pour que tout sous-ensemble additivement borné de $l^{(p_n)}$ soit borné dans $l^{(q_n)}$ il faut et il suffit que $1 < \liminf q_n/p_n$.

3) Si $q_n \to 0$, pour que $l^{(p_n)} \subset l^{(q_n)}$ avec inclusion bornifiante (resp. galbée par l_g^0, resp. par l_l^0) il faut et il suffit que $q_n/p_n \to \infty$.

Prouvons 2) et 3). On verra a posteriori qu'on peut supposer $p_n \leqslant q_n$, quitte à remplacer p_n par $\inf\{p_n, q_n\}$. Si alors $\psi(t, n) = t^{p_n}$ et $\varphi(t, n) = t^{q_n}$, $t_{\varepsilon,\lambda,a}(n)$ (cf. (9)) vaut 0 si $\lambda^{q_n}\varepsilon^{q_n/p_n} \leqslant a\varepsilon$ et ε^{1/p_n} dans le cas contraire. Donc $\sum_n \psi\big(t_{\varepsilon,\lambda,a}(n), n\big) < \infty$ si et seulement si $\lambda^{p_n}\varepsilon^{q_n/p_n - 1} \leqslant a$ pour tout n assez grand. Il reste alors à appliquer la remarque 4 et le théorème 3, (b) et (d).

2.4. Conditions pour qu'un espace de Musielak–Orlicz soit localement borné. Appliquant les théorèmes 3 et 4 à l'application identique d'un espace de Musielak–Orlicz on obtient le résultat suivant (l'équivalence de (ii), (iii), (iv) ou (iv′) est démontrée différemment en [19], nº 6.6.7; en ce qui concerne l'équivalence de (iii) et (iv), voir plus haut le nº 2.1).

Théorème 5. *Soit L_Ω^φ un espace de Musielak–Orlicz. Soit A l'ensemble des atomes de Ω, et pour tout $a \in A$ soit $m_a > 0$ la mesure de a.*

Supposons d'abord qu'on ait $A = \emptyset$ ou $\inf_{a\in A} \varphi(\infty, a)m_a > 0$.

Les conditions suivantes sont alors équivalentes.

(i) *Tout sous-ensemble additivement borné de L_Ω^φ est borné dans L_Ω^φ.*

(ii) *L_Ω^φ est galbé par l_g^0.*

(iii) *L_Ω^φ est galbé par l_l^0.*

(iv) *L_Ω^φ est localement borné.*

Si $A \neq \emptyset$ et $\inf_{a\in A} \varphi(\infty, a)m_a = 0$, chacune des conditions (i), (ii), (iii) *est équivalente à*

(iv′) *L_Ω^φ est somme directe d'un espace de Musielak–Orlicz localement borné et d'un produit dénombrable de droites.*

Remarque 5. D'après la remarque 3, on voit donc que tout espace de Musielak–Orlicz vérifiant (i) (ou (ii), (iii)) est localement p-convexe pour un $p \in\,]0, 1]$.

Remarque 6. En faisant $\psi = \varphi$ dans les théorèmes 3 et 4 on obtient immédiatement une caractérisation des fonctions de Musielak–Orlicz φ telles que L^{φ}_{Ω} soit localement borné.(³)

Démontrons le théorème 5. On a évidemment (§ 1)

$$\text{(iv) (resp. (iv'))} \Rightarrow \text{(iii)} \Rightarrow \text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}.$$

Si Ω est sans atome on a (i) $\Rightarrow$ (iv) (proposition 6).

Il reste à examiner le cas d'un espace mesuré Ω purement atomique, en fait muni de la mesure cardinale (remarque 1).

Supposons (i) vérifié et prouvons (iv) ou (iv'), selon le cas.

Soit $\beta \in]0, 1[$. D'après le théorème 3, (b) et la remarque 4 il existe $\varepsilon > 0$ et $\mu \in]0, 1]$ vérifiant

$$I^{\varphi}_{\Omega}(t_{\varepsilon,\mu,\beta}) < \infty,$$

$t_{\varepsilon,\mu,\beta}$ étant obtenu en faisant $\psi = \varphi$ dans (9).

Soit $\alpha > 0$ et soit $N \geqslant 1$ un entier tel que $\beta^N \leqslant \alpha$. On a, pour tout ω,

$$\mu^N t_{\varepsilon,\mu^N,\alpha}(\omega) \leqslant t_{\varepsilon,\mu,\beta}(\omega).$$

En effet, de $\varphi(\mu^N t, \omega) > \alpha\varphi(t, \omega)$ on déduit qu'il existe un entier $k \in]1, N]$ vérifiant $\varphi(\mu^k t, \omega) > \beta\varphi(\mu^{k-1}t, \omega)$, avec $\varphi(\mu^{k-1}t, \omega) \leqslant \varepsilon$ si $\varphi(t, \omega) \leqslant \varepsilon$, d'où $\mu^N t \leqslant \mu^{k-1} t \leqslant t_{\varepsilon,\mu,\beta}(\omega)$.

On a alors

$$I^{\varphi}_{\Omega}(\mu^N t_{\varepsilon,\mu^N,\alpha}) < \infty.$$

On voit donc qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\alpha > 0$ on puisse trouver $\lambda > 0$ et $s > 0$ vérifiant (10) (avec $s = \lambda$).

Si $\inf\limits_{\omega\in\Omega} \varphi(\infty, \omega) > 0$, la condition (vii) du théorème 3 est vérifiée (avec $\psi = \varphi$), donc L^{φ}_{Ω} est localement borné.

Supposons qu'on ait $\inf\limits_{\omega\in\Omega} \varphi(\infty, \omega) = 0$. Si $0 < \alpha < 1$ et si $\varphi(\infty, \omega) \leqslant \varepsilon$, il est clair que $t_{\varepsilon,\lambda,\alpha}(\omega) = \infty$ pour tout $\lambda > 0$. La relation (10) (vérifiée pour quelque $\lambda > 0$) entraîne alors

$$\sum_{\omega\in\Omega_\varepsilon} \varphi(\infty, \omega) < \infty$$

où $\Omega_\varepsilon = \{\omega \mid \varphi(\infty, \varepsilon) \leqslant \varepsilon\}$. L^{φ}_{Ω} est alors la somme directe du produit dénombrable de droites $L^{\varphi}_{\Omega_\varepsilon}$ et de l'espace $L^{\varphi}_{\Omega\setminus\Omega_\varepsilon}$, localement borné d'après la première partie de cette démonstration.

2.5. Opérateurs „conservant l'orthogonalité". Supposons Ω de mesure σ-finie. Les théorèmes 3 et 4 peuvent s'appliquer à tout opérateur linéaire $u: L^{\psi}_{\Omega} \to L^{\tau}_{\Sigma}$, où L^{τ}_{Σ} est un autre espace de Musielak–Orlicz, vérifiant $u(x)u(y) = 0$ si $xy = 0$ et tel que $|u(x_n)| \to |u(x)|$ presque partout sur Σ dès que $x_n \to x$ presque partout sur Ω, avec $0 \leqslant x_n \leqslant x_{n+1}$.

En effet, u admet une factorisation $u = vir$ où r est l'opérateur de restriction à un sous-espace mesuré $\Omega_0 \subset \Omega$, i est l'injection canonique de $L^{\psi}_{\Omega_0}$ dans un espace de Musielak–Orlicz $L^{\varphi}_{\Omega_0} \supset L^{\psi}_{\Omega_0}$, et v est un isomorphisme de $i(L^{\psi}_{\Omega_0})$ sur $u(L^{\psi}_{\Omega})$ (pour les topologies induites par $L^{\varphi}_{\Omega_0}$ et L^{τ}_{Σ}). On voit alors que chacune des conditions (α), (β), (γ), (δ) de l'introduction est vérifiée par u si et seulement si elle l'est par i.

Cela est une conséquence immédiate de [3]. On pose pour $x \in L^{\psi}_{\Omega}$

$$\varrho(x) = I^{\tau}_{\Sigma}(u(x)).$$

On a $\varrho(0) = 0$, $\varrho(x+y) = \varrho(x)+\varrho(y)$ si $xy = 0$. Supposons que $x, y \in L^{\psi}_{\Omega}$ et que $|x| \leqslant |y|$. Si x et y sont simples, on a $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \chi_{A_i}$ et $y = \sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \chi_{A_i}$, les A_i étant deux à deux disjoints, avec $|\xi_i| \leqslant |\eta_i|$, d'où

$$|u(x)| = \sum |\xi_i|\,|u(\chi_{A_i})| \leqslant \sum |\eta_i|\,|u(\chi_{A_i})| = |u(y)|.$$

Dans le cas général, $|x|$ (resp. $|y|$) est limite presque partout d'une suite croissante de fonctions simples r_n (resp. s_n), avec $0 \leqslant r_n \leqslant s_n$. On a alors

$$|u(x)| = \lim |u(r_n)| \leqslant \lim |u(s_n)| = |u(y)|.$$

On voit donc que $\varrho(x) \leqslant \varrho(y)$ si $|x| \leqslant |y|$ et que $\varrho(x_n) \to \varrho(x)$ si x_n tend presque partout vers x en croissant. D'après [3] on a alors

$$\varrho(x) = \int_{\Omega} \varphi(|x(\omega)|, \omega)\, d\omega$$

pour une fonction φ induisant une fonction de Musielak–Orlicz sur l'ensemble

$$\Omega_0 = \{\omega \in \Omega \mid \sup_{t<\infty} \varphi(t, \omega) > 0\}$$

muni de la structure d'espace mesuré induite par Ω.

r est la restriction $L^{\psi}_{\Omega} \to L^{\psi}_{\Omega_0}$. On a $L^{\psi}_{\Omega_0} \subset L^{\varphi}_{\Omega_0}$: i est l'injection canonique. Enfin, v: $i(L^{\psi}_{\Omega_0}) \to L^{\tau}_{\Sigma}$ est défini par $v(i(x)) := u(x)$.

2.6. Intersections d'espaces de Musielak–Orlicz.

2.6.1. On a vu en [17], [19], §3.2, qu'il existe des intersections d'espaces de Musielak–Orlicz (munies de la topologie limite projective) galbées par l^0_l sans être localement quasi-convexes. On verra plus bas que pour l'application identique de ces espaces la condition (δ) (voir l'introduction) n'entraîne pas la condition (γ). On montre cependant ci-dessous que les conditions (β) et (γ) restent équivalentes.

Théorème 6. *Soit Φ un ensemble non vide de fonctions de Musielak–Orlicz sur un espace mesuré Ω. Munissons l'espace vectoriel $E = \bigcap\limits_{\varphi\in\Phi} L^{\varphi}_{\Omega}$ de la borne supérieure des topologies induites par les L^{φ}_{Ω}.*

(³) Indépendamment, M. Ehrlich a obtenu une condition voisine quand Ω est sans atome [Archiv der Math. 26 (1975), pp. 273–283].

(a) *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *E est galbé par l^0_g.*

(ii) *E est galbé par l^0_t.*

(b) *Supposons en outre que, pour tout $\varphi\in\Phi$ et pour presque tout $\omega\in\Omega$, $\varphi(\infty,\omega)=\infty$, et que l'intersection des L^φ_Ω soit filtrante, c'est-à-dire que pour tout ensemble fini $F\subset\Phi$ il existe $\psi\in\Phi$ vérifiant $L^\psi_\Omega\subset\bigcap_{\varphi\in F}L^\varphi_\Omega$. Alors* (i) *et* (ii) *équivalent à*

(iii) *Pour tout $\varphi\in\Phi$ il existe $\psi\in\Phi$ et $\varepsilon>0$ tels que $B^\psi_\Omega(\varepsilon)\cap E$ soit borné dans L^φ_Ω.*

Démonstration. On a (iii) $\Rightarrow$ (ii) (proposition 2), et évidemment (ii) $\Rightarrow$ (i).

Etudions les réciproques.

On peut supposer filtrante l'intersection des L^φ_Ω, $\varphi\in\Phi$, car si $F\subset\Phi$ est fini, $\bigcap_{\varphi\in F}L^\varphi_\Omega$ est un espace de Musielak–Orlicz: c'est l'espace $L^{\sup F}_\Omega$.

Soit donc E galbé par l^0_g, et soit $\varphi\in\Phi$.

D1. Supposons Ω purement atomique, en fait muni de la mesure cardinale (remarque 1). Il existe $\psi\in\Phi$ et $\varepsilon>0$ tels que $B^\varphi_\Omega(1)$ absorbe $+^N\big(E\cap B^\psi_\Omega(\varepsilon)\big)$ pour tout entier $N\geqslant 1$. E contient les fonctions simples, donc $E\cap B^\psi_\Omega(\varepsilon)$ est dense dans $B^\psi_\Omega(\varepsilon)$ pour la topologie induite par L^0_Ω. Par suite $B^\varphi_\Omega(1)$ absorbe $+^N B^\psi_\Omega(\varepsilon)$ pour tout N. D'après la démonstration du théorème 3 (partie D5) on en déduit que l'inclusion $L^\psi_\Omega\subset L^\varphi_\Omega$ vérifie la condition (v) du théorème 3, donc qu'elle est galbée par l^0_t, et même bornifiante si $\psi(\infty,\omega)=\infty$ pour tout ω (théorème 3 (d)).

D2. Supposons Ω sans atome. Soit $r>0$. Il existe $\psi\in\Phi$ et $\varepsilon>0$ tels que $B^\varphi_\Omega(r)$ absorbe $+^N E\cap B^\psi_\Omega(\varepsilon)$, pour tout entier $N\geqslant 1$. Par suite, Ω étant sans atome, $B^\varphi_\Omega(r)$ absorbe $E\cap B^\psi_\Omega(m)$ pour tout $m<\infty$ (démonstration du théorème 1). Soit, pour $m\leqslant\infty$,

$$S_m=\{\omega\in\Omega\mid \psi(\infty,\omega)<m\},\qquad S=S_\infty,\qquad \Sigma=\Omega\setminus S. \tag{32}$$

Pour tout $m<\infty$, $B^\psi_\Omega(m)$ contient l'espace vectoriel $\{x\chi_{S_m}\mid x\in E\}$ et il en est donc de même de $B^\varphi_\Omega(r)$. Comme S est réunion croissante des S_m on en déduit

$$E_S=\{x\chi_S\mid x\in E\}\subset B^\varphi_\Omega(r). \tag{33}$$

Prouvons que $E\cap B^\psi_\Sigma(1)$ est borné dans L^φ_Σ. Cela entraînera (iii), ainsi que (ii). En effet, on trouvera comme dans la démonstration de la proposition 1 des $a_n>0$ vérifiant $\sum' a_n\big(E\cap B^\psi_\Omega(1)\big)\subset B^\varphi_\Sigma(r)$. Comme E_S est un espace vectoriel il vient (cf. (33))

$$\sum{}' a_n\big(E\cap B^\psi_\Omega(1)\big)\subset E_S+\sum{}' a_n\big(E\cap B^\psi_\Sigma(1)\big)\subset B^\varphi_S(r)+B^\varphi_\Sigma(r)=B^\varphi_\Omega(2r).$$

Cela prouvera que E est galbé par l^0_t.

Soit $\Delta\subset\Sigma$ un ensemble mesurable de mesure σ-finie. Il existe un ensemble mesurable $D\subset\Delta$ tel que $E\cap L^0_\Delta$ soit un sous-espace dense de L^0_D. En effet, si F est la fermeture de $E\cap L^0_\Delta$ dans L^0_Δ, il existe un ensemble mesurable $D\subset\Delta$ vérifiant $\chi_D\in F$ (F contient donc les fonctions simples portées par D) et $\chi_A\leqslant\chi_D$ presque partout pour tout ensemble mesurable $A\subset\Delta$ tel que $\chi_A\in F$. D'où $F=L^0_D$.

On voit alors que, pour tout m, $E\cap B^\psi_\Delta(m)$ est un sous-ensemble dense de $B^\psi_D(m)$ pour la topologie induite par L^0_D et que $B^\varphi_D(r)$ absorbe $B^\psi_D(m)$. On déduit de (31) que pour tout $a>0$ il existe $\lambda>0$ vérifiant $I^\psi_D(t_{\infty,\lambda,a})<\infty$, et donc $t_{\infty,\lambda,a}\chi_D\in L^\varphi_D$ puisque $\psi(\infty,\omega)=\infty$ pour tout $\omega\in D$ et que $L^\psi_D\subset L^\varphi_D\cdot B^\psi_D(1)$ et par suite $E\cap B^\psi_\Delta(1)$ sont donc bornés dans L^φ_Σ (théorèmes 1 et 4).

Supposons alors $E\cap B^\psi_\Sigma(1)$ non borné dans L^φ_Σ. Il existe une suite $(x_n)\in E\cap B^\psi_\Sigma(1)$ telle que $\frac{1}{n}x_n$ ne tende pas vers 0 dans L^φ_Σ, chaque x_n étant porté par un ensemble K_n de mesure finie. $\Delta=\bigcup_n K_n$ est alors de mesure σ-finie, et $E\cap B^\psi_\Delta(1)$ n'est pas borné dans L^φ_Σ, en contradiction avec ce qui précède.

2.6.2. Il existe des intersections d'espaces de Musielak–Orlicz (munies de la topologie limite projective) non galbées par l^0_g mais dont tout sous-ensemble additivement borné est borné. Donnons deux exemples.

Exemple 1. Soit I un ensemble non vide, munissons l'espace vectoriel $E=\mathbf{R}^{(I)}$ de la topologie vectorielle la plus fine.

I étant muni de la mesure cardinale, soit Γ l'ensemble de toutes les fonctions de Musielak–Orlicz sur I. On vérifie aisément que $E=\bigcap_{\varphi\in\Gamma}L^\varphi_I$, et la topologie de E est la borne supérieure des topologies induites par les L^φ_I.

En effet, si ν est une F-norme de E et si $\varphi(t,i)=\nu(t\chi_{\{i\}})$, on voit que $\varphi\in\Gamma$ et que ν est continue pour la topologie induite sur E par L^φ_I.

On sait ([6]) que dans E tout ensemble additivement borné B est borné. En effet, pour tout $\varphi\in\Gamma$ il existe $s>0$ vérifiant $\sup_{x\in B}\sum_{i\in I}\varphi(sx_i,i)<\infty$ (théorème 1). Cela entraîne que B est contenu dans un $\mathbf{R}^{(J)}$, $J\subset I$ fini, et donc borné dans E.

En outre E n'est pas galbé par l^0_g si I a au moins la puissance du continu.

Cela peut se démontrer à la manière de [6]: l'intervalle $(0,1)$ étant muni de la mesure de Lebesgue, il existe une application linéaire continue presque ouverte de E sur l'espace $L^0_{(0,1)}$, qui n'est pas galbée par l^0_g; appliquer alors 1.5.

Voici une démonstration plus explicite. Il existe une surjection

$i \to \varphi_i$ de I sur l'ensemble de toutes les fonctions d'Orlicz ne s'annulant qu'en 0. $\varphi \in \Gamma$ si $\varphi(t, i) = \varphi_i(t)$. Si E était galbé par l_g^0 il existerait $\psi \in \Gamma$ vérifiant avec φ la condition (v) du théorème 3 (voir la démonstration du théorème 6): il existerait $\varepsilon > 0$ et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\lambda_n > 0$ et $s_n > 0$ vérifiant

$$\sum_{i \in I} \varphi\left(s_n t_{\varepsilon, \lambda_n, 1/n}(i), i\right) < \infty. \tag{35}$$

Or, soit

$$J = \{i \in I \mid \inf_{t>0} \sup_{n \geqslant 1} n\varphi(\lambda_n t, i) > 0\}.$$

Pour tout $i \in J$, il existe n tel que $t_{\varepsilon, \lambda_n, 1/n}(i) > 0$. J n'étant pas dénombrable, cela contredit (35).

Exemple 2. Soit une suite $p_n \to 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, avec $0 < p_n < \infty$. Si

$$F = \bigcap_{k \in \boldsymbol{N}} l^{\varphi_k}, \quad \text{où} \quad \varphi_k(t, n) = t^{2^{-k} p_n},$$

est muni de la topologie borne supérieure des topologies induites par les l^{φ_k}, tout sous-ensemble additivement borné de F est borné, et F n'est pas galbé par l_g^0.

En effet soit B additivement borné dans F. Pour tout k, B est additivement borné dans $l^{\varphi_{k+1}}$, donc borné dans l^{φ_k} d'après 2.3.3, exemple 3. B est donc borné dans F.

Si F était galbé par l_g^0, pour tout k il existerait $h \geqslant k$ tel que l'inclusion $l^{\varphi_h} \subset l^{\varphi_k}$ soit bornifiante (car F est dense dans l^{φ_h}), d'après le théorème 6 (b). Mais cela est faux (2.3.3, exemple 3). F étant métrisable et complet on peut énoncer ce qui suit.

Proposition 8. *Il existe un espace vectoriel topologique métrisable et complet non galbé par l_g^0, et dont tout sous-ensemble additivement borné est borné.*

Problème (cf. [12]): caractériser les espaces métrisables dont tout sous-ensemble additivement borné est borné.

Références

[1] B. A. Barnes, A. K. Roy, *Boundedness in certain topological linear spaces*, Studia Math. 33 (1969), pp. 147–156.

[2] L. Drewnowski, *Topological rings of sets, continuous set functions, integration. II*, Bull. Acad. Pol. Sci. 20 (1972), pp. 277–286.

[3] L. Drewnowski, W. Orlicz, *A note on modular spaces. X*, ibid. 16 (1968), pp. 809–814.

[4] — — *A note on modular spaces. XI*, ibid. 16 (1968), pp. 877–882.

[5] J. Ishii, *On equivalence of modular function spaces*, Proc. Japan Acad. 35 (1959), pp. 551–556.

[6] S. O. Iyahen, *Semiconvex spaces*, Glasgow Math. J. 9 (1968), pp. 111–118.

[7] G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Springer, Berlin 1969.

[8] J. Musielak, W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), pp. 49–65.

[9] H. Nakano, *Modulared sequence spaces*, Proc. Japan Acad. 27 (1951), pp. 508–512.

[10] S. Rolewicz, *Some remarks on the spaces $N(L)$ and $N(l)$*, Studia Math. 18 (1959), pp. 1–9.

[11] — *Metric linear spaces*, Monografie Matematyczne 56, Warszawa 1972

[12] S. Simons, *Boundedness in linear topological spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 113 (1964) pp. 169–180.

[13] — *The sequence spaces $l(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$*, Proc. London. Math. Soc. (3) 15 (1965), pp. 422–436.

[14] P. Turpin, *Généralisations d'un théorème de S. Mazur et W. Orlicz*, C. R. Acad. Sci. Paris, 273 A (1971), pp. 457–460.

[15] — *Sur un problème de S. Simons concernant les bornés des espaces vectoriels topologiques*, Coll. Anal. fonctionn. (1971, Bordeaux), Bull. Soc. Math. France, Mém. 31–32 (1972), pp. 381–387.

[16] — *Opérateurs linéaires entre espaces d'Orlicz non localement convexes*, Studia Math. 46 (1973), pp. 153–165.

[17] — *Espaces et intersections d'espaces d'Orlicz non localement convexes*, ibid. 46 (1973), pp. 167–195.

[18] — *Linear operators between Orlicz spaces*, Summer School on Topological Vector Spaces, Lecture Notes in Mathematics 331, Springer, Berlin 1973, pp. 222–226.

[19] — *Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux*, Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) 131 (1976).

[20] L. Waelbroeck, *Topological vector spaces and algebras*, Lecture Notes in Mathematics 230, Springer, Berlin 1971.

[21] W. Fischer and U. Schöler, *The range of vector measures into Orlicz spaces*, Studia Math., à paraître.

[22] I. Labuda, *Ensembles convexes dans les espaces d'Orlicz*, C. R. Acad. Sci Paris 281 A (1975), pp. 443–445.

[23] P. Turpin, *Une mesure vectorielle nor bornée*, ibid. 280 A (1975), pp. 509–511.

[24] — *Colloque sur l'intégration vectorielle et multivoque* (exposé n° 8), Caen 22 et 23 mai 1975, OFFILIB, Paris.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

Received December 4, 1974 (918)