pological isomorphism of Λ onto Γ; thus Φ is an isometry by Lemma 2. Wendel's Lemma 1 (cf. [19], p. 257) can be used that Φ_1 is an isometric multiplier on $A_p(\Lambda)$. When Γ is connected and Φ is an isomorphism with $\|\Phi\| \leqslant 2$, the analogue of Helson's theorem [6] should hold for $A_p(\Gamma)$. It seems best to approach this theorem within the study of almost periodic multipliers. We hope to do this in a sequel to the present paper.

References

[1] N. Bourbaki, Seminaire, 1969, L'expose n° 367.

[2] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), pp. 181–236.

[3] A. Figa-Talamanaca, *Translation invariant operators on L_p*, Duke Math. Jour. 32 (1965), pp. 495–501.

[4] A. Figa-Talamanaca and G. I. Gaurdy, *Density and representation theorems of type (p, q)*, Jour. Austr. Math. Soc. 7 (1967), pp. 1–6.

[5] M. J. Fisher, *Recognition and limit theorems for L_p-multipliers*, Studia Math. 50 (1974), pp. 31–41.

[6] H. Helson, *Isomorphism of abelian group algebras*, Ark. Math. 2 (1953), pp. 475–485.

[7] C. Herz, *The theory of p-spaces with an application to convolution operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971), pp. 69–82.

[8] S. Igari, *Functions of L_p-multipliers*, Tôhoku Math. Jour. 21 (1969), pp. 304–320.

[9] R. Larsen, *The multiplier problem*, Springer-Verlag lecture notes 105, Berlin 1969.

[10] N. Lohoue, *Sur certains propriétés remarquables des algèbres $A_p(G)$*, C. R. Acad. Sc. de Paris 273 (1971), pp. 893–896.

[11] R. Strichartz, *Isomorphism of group algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966), pp. 858–862.

[12] J. G. Wendel, *On isometric isomorphism of group algebras*, Pac. Jour. Math. 1 (1951), pp. 305–311.

[13] — *Left centralizers and isomorphisms of group algebras*, ibid. 2 (1952), pp. 251–261.

Received May 4, 1974 (637)

STUDIA MATHEMATICA, T. LIV. (1975)

О поведении коэффициентов Фурье равноизмеримых функций

А. Б. ГУЛИСАШВИЛИ (Тбилиси, СССР)

Резюме. В работе показано, что для любой функции $f \in \mathscr{L}_1(T^m)$ имеет место равенство

$$\inf_{\omega \in \Omega_m} \|\widehat{f \circ \omega}\|_{2,\varrho} = (2\pi)^{-m} \sqrt{\varrho(0)} \Big| \int_{T^m} f(x)\, dx \Big|,$$

где Ω_m — множество сохраняющих меру Лебега обратимых преобразований T^m на себя, $\widehat{f \circ \omega}$ — преобразование Фурье $f \circ \omega$, а норма берется в пространстве $l_2(Z^m)$ с весом ϱ, где ϱ положительно на Z^m и стремится к нулю на бесконечности.

1. Введение. Основным результатом настоящей работы является теорема, согласно которой любую интегрируемую функцию можно так „переставить", что у полученной функции коэффициенты Фурье будут вести себя, в некотором смысле, как коэффициенты функции из $\mathscr{L}_2$. Работа состоит из четырех пунктов. В первом приводятся необходимые обозначения и формулируется основная теорема. Следующие два пункта посвящены её доказательству. В четвертом пункте дается следствие, касающееся абсолютной сходимости рядов Фурье интегралов дробного порядка от преставленных функций.

Приведем список используемых обозначений:

а) Обозначения для различных пространств и множеств: R^m, $m \geqslant 1$, — евклидово пространство размерности m; Z^m — целочисленная решетка в R^m; $T^m = R^m/2\pi Z^m$ — тор размерности m; R^+ — множество $\{y \in R^1\colon\ y \geqslant 0\}$; Z^+ — множество $\{n \in Z^1;\ n > 0\}$.

б) Обозначения, связанные с измеримостью и мерой: S_m — кольцо борелевских подмножеств T^m; μ — m-мерная нормированная лебеговская мера $(2\pi)^{-m} dx$; Ω_m — множество сохраняющих меру μ преобразований $\omega\colon T^m \to T^m$, для которых существует $A_\omega \in S_m$, $\mu A_\omega = 0$, такое, что ω отображает $T^m \setminus A_\omega$ на себя взаимно однозначно.

в) Обозначения для функциональных пространств и коэффициентов Фурье: $\mathscr{L}_1(T^m)$ — пространство интегрируемых по Лебегу на T^m функций; $l_2(\varrho)(Z^m)$ — пространство, состоящее из комплексных функций c, определенных на Z^m, для которых конечна норма

$$\|c\|_{2,\varrho} = \Big\{ \sum_{n\in Z^m} |c(n)|^2 \varrho(n) \Big\}^{1/2}, \tag{1}$$

где весовая функция ϱ всюду будет предполагаться определенной на Z^m, положительной и стремящейся к нулю на бесконечности; $\hat f$ — преобразование Фурье функции $f\in\mathscr{L}_1(T^m)$, где $\hat f(n) = (2\pi)^{-m}\int_{T^m} f(x)e^{-in\cdot x}dx$ — коэффициент Фурье f.

г) Обозначения для семейств отображений: $\mathscr{N}_1$ — семейство отображений τ: $(0,1]\to Z^+$, для которых множество $\tau([\varepsilon,1])$ ограничено для любого ε, $0<\varepsilon<1$; $\mathscr{N}_2$ — семейство отображений γ: $R^+\to Z^+$, для которых множество $\gamma([0,\varepsilon])$ ограничено для любого $\varepsilon>0$.

Известно, что для любого пространства $l_2(\varrho)(Z^m)$ существует $f\in\mathscr{L}_1(T^m)$, такое, что $\hat f$ не принадлежит $l_2(\varrho)(Z^m)$ (в случае $m=1$, это утверждение является следствием, например, теоремы 1.5 на стр. 294 в [1], так как существует положительная функция, не принадлежащая $l_2(\varrho)(Z^1)$, и ее можно мажорировать четной выпуклой на Z^+ функцией; кратный случай сводится к одномерному рассмотрением функций, постоянных по всем координатам, кроме одной).

Однако справедлива следующая

Теорема. *Пусть задано пространство $l_2(\varrho)(Z^m)$. Тогда для любой функции $f\in\mathscr{L}_1(T^m)$*

$$\inf_{\omega\in\Omega_m} \|\widehat{f\circ\omega}\|_{2,\varrho} = (2\pi)^{-m}\sqrt{\varrho(0)}\Big|\int_{T^m} f(x)\,dx\Big|.$$

Заметим сразу, что достаточно предполагать $\varrho(0)=0$, и доказывать равенство

$$\inf_{\omega\in\Omega_m} \|\widehat{f\circ\omega}\|_{2,\varrho} = 0, \tag{2}$$

так как, в условиях теоремы,

$$\inf_{\omega\in\Omega_m} \|\widehat{f\circ\omega}\|_{2,\varrho} = \inf_{\omega\in\Omega_m}\Big\{|(\widehat{f\circ\omega})(0)|^2\varrho(0) + \sum_{n\in Z^m\setminus\{0\}} |(\widehat{f\circ\omega})(n)|^2\varrho(n)\Big\}^{1/2} =$$
$$= (2\pi)^{-m}\sqrt{\varrho(0)}\Big|\int_{T^m} f(x)\,dx\Big| + \inf_{\omega\in\Omega_m}\Big\{\sum_{n\in Z^m\setminus\{0\}} |(\widehat{f\circ\omega}),(n)|^2\varrho(n)\Big\}^{1/2}.$$

Эта теорема была анонсирована нами в более слабой форме в заметке [4].

Сделаем еще несколько замечаний об идее доказательства теоремы в случае $m=1$ (общий случай вытекает из этого). Согласно равенству (37) ниже, доказательство можно проводить для равноизмеримых f функций (точнее, для класса $G(f)$); для $f\in\mathscr{L}_2$ теорема просто выводится из леммы 5 и неравенства Бесселя, так как, положив $f_k(x) = f(kx)$, $k=\overline{1,\infty}$, имеем

$$\inf_k \|\hat f_k\|_{2,\varrho} \leqslant \inf_k\{|\hat f_k(0)|^2\varrho(0) + \varrho(k)\|f\|_2^2\}^{1/2} = (2\pi)^{-1}\sqrt{\varrho(0)}\Big|\int f(x)\,dx\Big|;$$

для $f\in\mathscr{L}_1$ коэффициенты Фурье восстанавливаются по коэффициентам характеристических функций лебеговских множеств $\theta_f(y)$ (см. лемму 4), остается только подобрать равноизмеримую f функцию с лебеговскими множествами, инвариантными относительно заданного семейства рациональных сдвигов, что и осуществляется в § 2.

2. Башни измеримых множеств, равноизмеримость функций и инвариантность относительно сдвигов. В этом пункте проводятся некоторые предварительные рассмотрения, необходимые для доказательства основной теоремы. Нам понадобится такое

Определение. Назовем *башней над* T^1 или просто *башней* отображение δ: $K_\delta\to S_1$, где $K_\delta\subset[0,1]$, удовлетворяющее следующим условиям:

(3) 1) $\delta(a_1)\supset\delta(a_2)$, если $a_1, a_2\in K_\delta$ и $a_1>a_2$;

(4) 2) $\mu\delta(a) = a$, если $a\in K_\delta$.

Множество B всех башен непусто; оно, например, содержит отображение δ, у которого $K_\delta=\{1\}$, $\delta(1) = T^1$ (1).

Полной башней будет называться такая башня δ, у которой $K_\delta = [0,1]$, а *непрерывной слева полной башней* — полная башня, у которой $\bigcup_{a>b}\delta(b) = \delta(a)$ для всех $a\in(0,1]$.

Множество всех полных башен B_1 и множество непрерывных слева полных башен B_2 непусты. Действительно, башня δ, у которой $K_\delta=[0,1]$, $\delta(a) = [0,2\pi a)$ при $a\in(0,1]$, $\delta(0)=\{0\}$, принадлежит B_2.

Каждой башне $\delta\in B_1$ соответствует башня $\delta_l\in B_2$, определяемая следующим образом:

$$\delta_l(a) = \bigcup_{a>b}\delta(b) \quad \text{при} \quad a\in(0,1],$$
$$\delta_l(0) = \delta(0).$$

Множество B_1 является множеством максимальных элементов относительно следующего частичного упорядочения B:

$$\delta_1\succ\delta_2 \Leftrightarrow \{K_{\delta_1}\supset K_{\delta_2};\ \delta_1(a)=\delta_2(a) \text{ при } a\in K_{\delta_2}\} \tag{5}$$

(это несложно доказать, используя лемму Цорна).

(1) Здесь и ниже T^1 отождествляется с отрезком $[0,2\pi)$, а сложение элементов T^1 — со сложением $\mathrm{mod}\,2\pi$.

Для $n \in Z^+$ обозначим через $B^{(n)}$ подмножество B, каждый элемент которого обладает в дополнение к (3) и (4) еще свойством

$$(6) \qquad \delta(a) + 2\pi/n = \delta(a), \qquad a \in K_\delta .$$

Свойство (6) означает, что каждое множество $\delta(a)$ инвариантно относительно сдвига на $2\pi n^{-1}$. Легко видеть, что множества $B^{(n)}$, $B_1^{(n)} = B_1 \cap B^{(n)}$, $B_2^{(n)} = B_2 \cap B^{(n)}$ непусты, и что $B_1^{(n)}$ является множеством максимальных элементов $B^{(n)}$ относительно индуцированного порядка (5).

Следствием леммы, которую мы сейчас будем доказывать, является существование непрерывных слева полных башен, у которых разные множества $\delta(a)$ инвариантны относительно разных рациональных сдвигов.

Лемма 1. *Если $\tau \in \mathcal{N}_1$, а a_1 и a_2 — действительные числа, для которых $0 < a_i < 1$, $i = 1, 2$, $a_1 + a_2 \leqslant 1$, то существуют башни $\delta_1, \delta_2 \in B_2$, такие, что*

1) $\delta_1(a_1) \cap \delta_2(a_2) = \emptyset$;

2) $\delta_i(t) + \dfrac{2\pi}{\tau(t)} = \delta_i(t)$, $t \in (0, a_i]$, $i = 1, 2$.

Доказательство. Пусть $a = \min\{a_1, a_2\}$. Фиксируем какую-нибудь положительную последовательность $\{a_n\}$, $1 \leqslant n < \infty$, для которой $a_1 = 1$,

$$(7) \qquad a_n > \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \qquad 1 \leqslant n < \infty .$$

Не ограничивая общности, можно предполагать, что τ не возрастает, непрерывно слева, имеет разрывы только в точках $\{aa_n\}$, $1 \leqslant n < \infty$, и что

$$(8) \qquad \tau(t_2) \mid \tau(t_1)\ (^2) \quad \text{при} \quad t_1 < t_2 .$$

В самом деле, для любого $\eta \in \mathcal{N}_1$ существует $\tau \in \mathcal{N}_1$ с перечисленными выше свойствами такое, что $\eta(t) \mid \tau(t)$ для всех $t \in (0, 1]$, а справедливость леммы 1 для τ влечет ее справедливость для η.

Рассмотрим последовательность борелевских множеств $\{U_n\}$, $1 \leqslant n < \infty$, такую, что

$$(9) \qquad U_n + \frac{2\pi}{\tau(aa_n)} = U_n, \qquad \mu U_n = a_n, \qquad 1 \leqslant n < \infty$$

(такие множества существуют, так как для каждого фиксированного s $B_1^{(s)}$ непусто).

(2) $m \mid n$, где $m, n \in Z^+$, обозначает, что m делит n.

Составим новую последовательность

$$(10) \qquad V_n = \bigcup_{k \geqslant n} U_k .$$

Имеем

$$(11) \qquad \begin{array}{ll} 1)\ V_{n+1} \subset V_n, \quad 1 \leqslant n < \infty; & 2)\ \mu V_n \geqslant a_n, \quad 1 \leqslant n < \infty; \\ 3)\ \mu V_n \downarrow 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty; & 4)\ V_n + \dfrac{2\pi}{\tau(aa_n)} = V_n, \quad 1 \leqslant n < \infty. \end{array}$$

(1) следует из (10); 2) — из (10) и (9); 3) — из 2), (7) и (10); 4) — из (9), (10) и (8)).

Рассмотрим еще новую последовательность множеств

$$(12) \qquad W_n = V_n \setminus V_{n+1}, \qquad 1 \leqslant n < \infty .$$

Из определения (12), свойства 4) из (11), и из (8) следует, что W_n попарно не пересекаются и

$$(13) \qquad W_n + \frac{2\pi}{\tau(aa_n)} = W_n, \qquad 1 \leqslant n < \infty .$$

Кроме того,

$$(14) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \mu W_n = \mu V_1 = 1 .$$

Существуют две последовательности множеств $\{W_n^1\}$ и $\{W_n^2\}$, $1 \leqslant n < \infty$, такие, что

1) $W_n^1 \cap W_n^2 = \emptyset$, $1 \leqslant n < \infty$;

2) $W_n^i \subset W_n$, $1 \leqslant n < \infty$, $i = 1, 2$;

3) $\mu W_n^i = a_i \mu W_n$, $1 \leqslant n < \infty$; $i = 1, 2$;

4) $W_n^i + \dfrac{2\pi}{\tau(aa_n)} = W_n^i$, $1 \leqslant n < \infty$, $i = 1, 2$.

Это следует из того, что внутри любого множества, инвариантного относительно сдвига на $2\pi s^{-1}$, где $s \in Z^+$, существуют инвариантные относительно такого же сдвига множества произвольной меньшей меры ($B_1^{(s)}$ — максимальные элементы $B^{(s)}$).

Построим две башни σ_1 и σ_2, у которых K_{σ_i} является множеством, состоящим из чисел

$$(15) \qquad \varepsilon_k^i = \sum_{n=k}^{\infty} \mu W_n^i, \qquad 1 \leqslant k < \infty, \ i = 1, 2,$$

а

$$(16) \qquad \sigma_i(\varepsilon_k^i) = \bigcup_{n=k}^{\infty} W_n^i, \qquad i = 1, 2 .$$

Ясно, что

(17) $$\sigma_i(\varepsilon_1^i) = \sigma_i(a_i) = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n^i, \quad i = 1, 2;$$

это следует из (15), (16), (14) и свойства 3) множеств W_n^i. Множества $\sigma_1(a_1)$ и $\sigma_2(a_2)$ не пересекаются, так как выполнено (17), имеет место свойство 1) для W_n^i, и ввиду того, что W_n попарно не пересекаются. Кроме того,

(18) $$\sigma_i(\varepsilon_k^i) + \frac{2\pi}{\tau(a a_k)} = \sigma_i(\varepsilon_k^i), \quad 1 \leqslant k < \infty, \ i = 1, 2,$$

ввиду свойства 4) множеств W_k^i, а также (16) и (8).

Согласно тому, что τ непрерывно слева и имеет разрывы только в точках $a a_k$, $1 \leqslant k < \infty$, и тому, что $B_1^{(s)}$ является множеством максимальных элементов $B^{(s)}$ для каждого $s \in Z^+$, существуют башни δ_1, $\delta_2 \in B_2$, для которых $\delta_i \succ \sigma_i$ и

(19) $$\delta_i(t) + \frac{2\pi}{\tau(a a_k)} = \delta_i(t), \quad t \in (0, a_i], \ i = 1, 2,$$

где k таково, что $\varepsilon_{k+1}^i < t \leqslant \varepsilon_k^i$ (башни δ_i склеиваются из кусков δ_k^i, непрерывных слева на $(\varepsilon_{k+1}^i, \varepsilon_k^i]$ и инвариантных относительно сдвига на $2\pi[\tau(a a_k)]^{-1}$).

Покажем, что δ_1 и δ_2 удовлетворяют лемме 1. Действительно, 1) выполняется, так как $\delta_i(a_i) = \sigma_i(a_i)$, $i = 1, 2$, а $\sigma_1(a_1) \cap \sigma_2(a_2) = \emptyset$. Что касается 2), то сначала получим неравенство

(20) $$a a_k \leqslant \varepsilon_k^i, \quad 1 \leqslant k < \infty, \ i = 1, 2,$$

из (15), свойства 3) множеств W_n^i, из (12) и свойства 2) множеств V_n, а затем из (20), (19), (8), и из свойств τ получим, что

$$\delta_i(t) + \frac{2\pi}{\tau(t)} = \delta_i(t), \quad t \in (0, a_i], \ i = 1, 2.$$

Лемма 1 доказана.

Заметим, что для любого $\tau \in \mathcal{N}_1$ существует $\delta \in B_2$, для которого

(21) $$\delta(t) + \frac{2\pi}{\tau(t)} = \delta(t), \quad t \in (0, 1].$$

Это следует из леммы 1, если взять, например, $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, построить δ_1 и δ_2, затем взять башню σ, у которой $K_\sigma = [0, \frac{1}{2}]$, $\sigma(a) = \delta_1(a)$ при $a \in [0, \frac{1}{2}]$, и найти башню $\delta \in B_2$, такую, что $\delta \succ \sigma$ и $\delta(a) + 2\pi/\tau(2^{-1}) = \delta(a)$ при $a \in (\frac{1}{2}, 1]$.

Теперь рассмотрим класс $\mathfrak{M}_m$ измеримых и конечных почти всюду на T^m функций, и его подкласс $\mathfrak{M}_m^+$, состоящий из неотрицательных

функций. Каждая функция $f \in \mathfrak{M}_m^+$ порождает отображение θ_f: $R^+ \to S_m$, где

(22) $$\theta_f(y) = \{x: f(x) > y\}, \quad 0 \leqslant y < \infty.$$

Функция

$$\mathcal{D}(y; f) = \mu\theta_f(y), \quad 0 \leqslant y < \infty,$$

называется *функцией распределения* функции $f \in \mathfrak{M}_m^+$, а две функции $f, g \in \mathfrak{M}_m^+$, у которых

$$\mathcal{D}(y; f) = \mathcal{D}(y; g), \quad 0 \leqslant y < \infty,$$

называются *равноизмеримыми функциями.* Функция распределения не возрастает, непрерывна справа и стремится к нулю на бесконечности.

Для $f \in \mathfrak{M}_1^+$ и $\delta \in B_2$ рассмотрим отображение $\lambda(f, \delta)$: $R^+ \to S_1$, определенное следующим образом:

(23) $$\lambda(f, \delta)(y) = \delta(\mathcal{D}(y; f)), \quad 0 \leqslant y < \infty,$$

где $\mathcal{D}(y; f)$ — функция распределения f.

Следующая лемма — простое следствие хорошо известной теоремы (см., напр., 10 на стр. 83 в [2]).

Лемма 2. *Для заданных $f \in \mathfrak{M}_1^+$ и $\delta \in B_2$ существует $g \in \mathfrak{M}_1^+$, такое, что*

(24) $$\theta_g = \lambda(f, \delta).$$

Согласно только что цитированной теореме,

$$g(x) = \sup\{t \in [0, \infty): x \in \lambda(f, \delta)(t)\}.$$

Заметим, что функции g и f из леммы 2 равноизмеримы. Лемма 2 помогает нам строить функции, равноизмеримые заданной функции f при помощи различных башен из B_2.

Если мы возьмем, например, башню $\delta \in B_2$, у которой $\delta(a) = [0, 2\pi a)$, $0 < a \leqslant 1$, мы получим в качестве функции g перестановку f в невозрастающем порядке f^*. Для всякой $f \in \mathfrak{M}_1^+$ функция f^* не возрастает, равноизмерима f и непрерывна справа. Легко проверить, что

(25) $$f^*(\mathcal{D}(y; f)) \geqslant y, \quad 0 \leqslant y < \infty.$$

Возьмем теперь функцию f из $\mathfrak{M}_m$ и рассмотрим ее положительную и отрицательную части f^+ и f^-, где

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}.$$

Ясно, что $f^+, f^- \in \mathfrak{M}_m^+$ и что

(26) $$f = f^+ - f^-.$$

Пусть $\gamma \in \mathcal{N}_2$. Тогда для $f \in \mathfrak{M}_1^+$ определено отображение $\gamma \circ f^*$ (f^* рассматривается как отображение $(0, 1]$ в R^+) и

$$\gamma \circ f^* \in \mathcal{N}_1. \tag{27}$$

Справедлива

Лемма 3. *Если $\gamma \in \mathcal{N}_2$, то для любой функции $f \in \mathfrak{M}_1$ существует функция $g \in \mathfrak{M}_1$, у которой g^+ равноизмеримо f^+, g^- равноизмеримо f^-, и кроме того,*

$$\theta_{g^+}(y) + \frac{2\pi}{\gamma(y)} = \theta_{g^+}(y), \quad 0 \leqslant y < \infty, \tag{28}$$

$$\theta_{g^-}(y) + \frac{2\pi}{\gamma(y)} = \theta_{g^-}(y), \quad 0 \leqslant y < \infty. \tag{29}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно предполагать, что

$$\gamma(t_1) \mid \gamma(t_2) \quad \text{при} \quad t_1 < t_2. \tag{30}$$

Пусть $a_1(f) = \mu\{x\colon f^+(x) > 0\}$, $a_2(f) = \mu\{x\colon f^-(x) > 0\}$. Тогда, если $a_1(f) = a_2(f) = 0$, то в качестве g годится нулевая функция.

Если $a_2(f) = 0$, $a_1(f) > 0$, то существует башня $\delta \in B_2$, для которой справедливо (21) с $\tau(t) = \gamma \circ (f^+)^*(t)$, ввиду (27). Из леммы 2, примененной к f^+ и δ, мы получим функцию g, равноизмеримую f^+, у которой $g = g^+$, $\theta_{g^+}(y) = \delta(\mathcal{D}(y; f^+))$.

Далее, согласно (21), определению τ, и (25),

$$\begin{aligned} \theta_{g^+}(y) &= \delta(\mathcal{D}(y; f^+)) = \delta(\mathcal{D}(y; f^+)) + \frac{2\pi}{\tau(\mathcal{D}(y; f^+))} = \\ &= \delta(\mathcal{D}(y; f^+)) + \frac{2\pi}{\gamma \circ (f^+)^*(\mathcal{D}(y; f^+))} = \\ &= \delta(\mathcal{D}(y; f^+)) + \frac{2\pi}{\gamma(y)} = \theta_{g^+}(y) + \frac{2\pi}{\gamma(y)}, \end{aligned} \tag{31}$$

и (28) доказано в этом случае. Справедливость (29) следует из равноизмеримости f^- и нулевой функции, и того, что $g^- \equiv 0$.

Аналогично рассматривается случай $a_1(f) = 0$, $a_2(f) > 0$.

Если $a_1(f) > 0$, $a_2(f) > 0$, то из леммы 1 с $a_1 = a_1(f)$, $a_2 = a_2(f)$ и $\tau \in \mathcal{N}_1$ таким, что

$$\gamma \circ (f^+)^*(t) \mid \tau(t), \quad \gamma \circ (f^-)^*(t) \mid \tau(t), \quad t \in (0, 1],$$

следует существование башен $\delta_1, \delta_2 \in B_2$, для которых

$$\delta_1(a_1(f)) \cap \delta_2(a_2(f)) = \emptyset; \quad \delta_i(t) + \frac{2\pi}{\tau(t)} = \delta_i(t), \quad t \in (0, a_i(f)],\ i = 1, 2.$$

Применим теперь лемму 2 сначала к f^+ и δ_1, а затем к f^- и δ_2. Получим функции $g_1, g_2 \in \mathfrak{M}_1^+$, у которых $\{x\colon g_1(x) > 0\} \cap \{x\colon g_2(x) > 0\} = \emptyset$, и таким же рассуждением, как при доказательстве (31), убедимся, что лемма 3 справедлива для $g = g_1 - g_2$. Этим доказательство завершается.

3. Доказательство основной теоремы. Мы пока предполагаем, что $m = 1$, и проведем доказательство для этого случая. Затем будет показано, что многомерный случай — следствие одномерного.

Нам понадобятся две несложные леммы о коэффициентах Фурье. Обозначим через $\chi(y; f)$, где $f \in \mathfrak{M}_1^+$, $y \in R^+$, характеристическую функцию множества $\theta_f(y)$, определенного при помощи (22). Имеет место

Лемма 4. *Пусть $f \in \mathfrak{M}_1^+ \cap \mathcal{L}_1(T^1)$. Тогда*

$$\hat{f}(n) = \int_0^\infty \widehat{\chi(y; f)}(n)\, dy, \quad n \in Z^1. \tag{32}$$

Доказательство. Функция $\chi(y; f)(t)$, $y \in [0, \infty)$, $t \in [0, 2\pi)$, измерима на $[0, \infty) \times [0, 2\pi)$ (это тривиально, если f — характеристическая функция борелевского множества, отсюда получается измеримость $\chi(y; f)(t)$ для всевозможных линейных комбинаций характеристических функций в качестве f, а отсюда стандартным предельным переходом и для произвольного f), значит измерима функция $\chi(y; f)(t)\cos nt$ для любого $n \in Z^1$, и

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\chi(y; f)(t) \cos nt|\, dy\, dt \leqslant \int_0^\infty dy \int_0^{2\pi} \chi(y; f)(t)\, dt = \int_0^\infty \mathcal{D}(y; f)\, dy < \infty,$$

согласно теореме Фубини и тому, что

$$\int_0^\infty \mathcal{D}(y; f)\, dy = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx.$$

Из существования двойного интеграла $\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \chi(y; f)(t) \cos nt\, dy\, dt$ следует, что функция

$$\xi_n(y) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \chi(y; f)(t) \cos nt\, dt$$

интегрируема на $[0, \infty)$, и что

$$\int_0^\infty \xi_n(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos nt\, dt \int_0^\infty \chi(y; f)(t)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt.$$

Лемма доказана для косинус-коэффициентов. Аналогично рассуждаем для синус-коэффициентов. Из полученных равенств следует (32) и лемма 4 доказана полностью.

Следующая лемма известна. Доказательство предоставляем читателю.

Лемма 5. *Пусть* $s \in Z^+$, *а* $f \in \mathscr{L}_1(T^1)$ *и* $f(x+2\pi s^{-1}) = f(x)$ *почти всюду на* T^1. *Тогда* $\hat{f}(n) = 0$ *для таких* n, *которые не делятся на* s.

Предположим, что $m = 1$ и выполнены условия основной теоремы. Возьмем число $\varepsilon > 0$ и зафиксируем какую-нибудь положительную на $(0, \infty)$ функцию φ, для которой

$$\int_0^\infty \frac{dy}{\varphi(y)} = 1, \tag{33}$$

и какое-нибудь $\gamma \in \mathscr{N}_2$, такое, что

$$\int_0^\infty \varphi(y) \sup_{|n|\geqslant\gamma(y)} \varrho(n)\, dy < \tfrac{1}{4}\varepsilon^2 \tag{34}$$

(такое γ существует, так как $\sup\limits_{|n|\geqslant k} \varrho(n) \to 0$ при $k \to \infty$).

Если $f \in \mathscr{L}_1(T^1)$, то применив лемму 3 к f и γ получим функцию g, у которой g^+ равноизмеримо f^+, g^- равноизмеримо f^-, и выполнены равенства (28) и (29).

Далее,

$$\|\hat{g}\|_{2,\varrho} \leqslant \|\widehat{g^+}\|_{2,\varrho} + \|\widehat{g^-}\|_{2,\varrho} = I_1 + I_2, \tag{35}$$

согласно тому, что $g = g^+ - g^-$, и неравенству треугольника для нормы (1).

Для оценки I_1 мы применяем последовательно лемму 4; неравенство Буняковского и (33); теорему Фубини; то, что $\varrho(0) = 0$; равенство (28) и лемму 5; равенство Парсеваля и, наконец, неравенство (34). По этой схеме,

$$I_1^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varrho(n) \Big| \int_0^\infty \widehat{\chi(y; g^+)}(n)\, dy \Big|^2 \leqslant \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varrho(n) \int_0^\infty \varphi(y) |\widehat{\chi(y; g^+)}(n)|^2 dy =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(y)\, dy \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varrho(n) |\widehat{\chi(y; g^+)}(n)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \varphi(y) \sup_{|n|\geqslant\gamma(y)} \varrho(n)\, dy \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\widehat{\chi(y; g^+)}(k)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(y) \sup_{|n|\geqslant\gamma(y)} \varrho(n)\, dy \int_0^{2\pi} [\chi(y; g^+)(t)]^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \varphi(y) \sup_{|n|\geqslant\gamma(y)} \varrho(n)\, dy < \tfrac{1}{4}\varepsilon^2.$$

Отсюда следует, что $I_1 < \frac{1}{2}\varepsilon$, аналогично получается неравенство $I_2 < \frac{1}{2}\varepsilon$, и из (35) выводим, что

$$\inf_{g \in G(f)} \|\hat{g}\|_{2,\varrho} = 0, \tag{36}$$

где $G(f)$ — множество всевозможных функций g, у которых g^+ равноизмеримо f^+, а g^- равноизмеримо f^-.

Начиная с этого места, мы будем предполагать m произвольным. Пусть $f \in \mathscr{L}_1(T^m)$, а $G(f)$ определено как выше, но в m-мерном случае.

Покажем, что (36) остается справедливым. Действительно, существует функция $g \in G(f)$, которая постоянна по всем координатам, кроме одной, то есть, $g(x) = g_1(x_1)$, $x \in T^m$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $x_1 \in T^1$, $g \in \mathscr{L}_1(T^1)$. У этой функции $\hat{g}(n) = 0$ для тех $n = (n_1, \ldots, n_m)$, у которых хотя бы одно n_k, $k \geqslant 2$, не равно нулю; и $\hat{g}(n) = \hat{g}_1(n_1)$, когда $n = (n_1, 0, \ldots, 0) \in Z^m$, $n_1 \in Z^1$.

Из того, что выполнено равенство (36) для функции g_1 легко вывести справедливость этого равенства для f.

Нам осталось доказать, что

$$\inf_{\omega \in \Omega_m} \|\widehat{f \circ \omega}\|_{2,\varrho} = \inf_{g \in G(f)} \|\hat{g}\|_{2,\varrho}. \tag{37}$$

Неравенство

$$\inf_{g \in G(f)} \|\hat{g}\|_{2,\varrho} \leqslant \inf_{\omega \in \Omega_m} \|\widehat{f \circ \omega}\|_{2,\varrho} \tag{38}$$

следует из того, что $f \circ \omega \in G(f)$ для любого $\omega \in \Omega_m$.

Чтобы доказать справедливость обратного неравенства, достаточно показать что для любого $\varepsilon > 0$ и $g \in G(f)$ найдется $\omega \in \Omega_m$, для которого

$$|(f \circ \omega)(t) - g(t)| < \varepsilon \quad \text{почти всюду на } T^m. \tag{39}$$

(Этот факт хорошо известен; достаточно взять $a_n = n\varepsilon$, $0 \leqslant n < \infty$, и построить семейство сохраняющих индуцированную меру обратимых mod 0 преобразований ω_n: $\theta_{g^+}(a_n) \setminus \theta_{g^+}(a_{n+1}) \to \theta_{f^+}(a_n) \setminus \theta_{f^+}(a_{n+1})$, существование которых обеспечивается леммой на стр. 104 в [3] для $m = 1$ и замечанием на стр. 87 там же в случае $m > 1$. Затем надо аналогичные построения проделать для g^- и f^-, и „склеить" ω из полученных кусков).

Справедливость утверждения (39) помогает нам получить неравенство, обратное неравенству (38). Действительно, зададим $\eta > 0$ и $\delta \in G(f)$. Существует $\omega \in \Omega_m$, для которого выполнено (39) с $\varepsilon = \eta[\sup_{n \in Z^m} \varrho(n)]^{-1}$. Отсюда

$$\|\widehat{f \circ \omega}\|_{2,\varrho} \leqslant \|\widehat{(f \circ \omega) - g}\|_{2,\varrho} + \|\hat{g}\|_{2,\varrho} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{n \in Z^m} \varrho(n) \left\{ \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{T^m} |(f \circ \omega)(x) - g(x)|^2 dx \right\}^{1/2} + \|\hat{g}\|_{2,\varrho} \leqslant \eta + \|\hat{g}\|_{2,\varrho}.$$

Следовательно, $\inf_{\omega \in \Omega_m} \|\widehat{f \circ \omega}\|_{2,\varrho} \leqslant \inf_{g \in G(f)} \|\hat{g}\|_{2,\varrho}$, и комбинируя это неравенство с неравенством (38), получим (37). Значит, ввиду справедливости (36) для любого m, доказано равенство (2), а значит, и вся теорема.

4. Следствие для интегралов дробного порядка. Пусть

$$f \in \mathscr{L}_1(T^m) \quad \text{и} \quad \int_{T^m} f(x)\,dx = 0.$$

Через f_a, $0 < a \leqslant m$, будет обозначаться интеграл *дробного порядка*, введенный Вейлем в случае $m = 1$, и обобщенный Вейнгером (см. [5], определение 4.19 на стр. 86) для $m > 1$. По определению,

$$\hat{f}_a(n) = \hat{f}(n)|n|^{-a}, \quad n \in Z^m \setminus \{0\}, \quad \text{где} \quad |n| \text{ — норма в } R^m.$$

Покажем, что из нашей основной теоремы следует, что для любой функции $f \in \mathscr{L}_1(T^m)$ и функции ξ, определенной на Z^m, положительной, и такой, что $\xi(0) = 0$, и

$$\sum_{n \in Z^m \setminus \{0\}} [\xi(n)]^2 < \infty, \tag{40}$$

справедливо равенство

$$\inf_{\omega \in \Omega_m} \sum_{n \in Z^m} |(\widehat{f \circ \omega})(n)|\,\xi(n) = 0. \tag{41}$$

Действительно, существует ϱ, удовлетворяющее условиям основной теоремы, $\varrho(0) = 0$, и положительное на $Z^m \setminus \{0\}$, для которого

$$\sum_{n \in Z^m \setminus \{0\}} \frac{[\xi(n)]^2}{\varrho(n)} < \infty. \tag{42}$$

Из (40), (41) и (42) и из основной теоремы при помощи неравенства Коши получаем, что

$$\inf_{\omega \in \Omega_m} \sum_{n \in Z^m} |(\widehat{f \circ \omega})(n)|\,\xi(n) \leqslant \inf_{\omega \in \Omega_m} \|\widehat{f \circ \omega}\|_{2,\varrho} \left\{ \sum_{n \in Z^m \setminus \{0\}} \frac{[\xi(n)]^2}{\varrho(n)} \right\}^{1/2} = 0,$$

согласно (2), и (41) доказано.

Для интегралов дробного порядка получаем

Следствие. *Пусть* $f \in \mathscr{L}_1(T^m)$, $\int_{T^m} f(x)\,dx = 0$, *и* $\frac{1}{2}m < a \leqslant m$. *Тогда*

$$\inf_{\omega \in \Omega_m} \sum_{n \in Z^m} |(\widehat{f \circ \omega})_a(n)| = 0.$$

Цитированная литература

[1] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, т. I, Москва 1965.
[2] П. Р. Халмош, *Теория меры*, Москва 1953.
[3] — *Лекции по эргодической теории*, Москва 1959.
[4] А. Б. Гулисашвили, *Метрическая эквивалентность и коэффициенты Фурье*, Сообщения А. Н. Грузинской ССР, 67, № 3 (1972), стр. 553-555.
[5] S. Wainger, *Special trigonometric series in k-dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc., No 59 (1965).

АКАДЕМИЯ НАУК ГРУЗИНСКОЙ ССР
ТБИЛИССКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. А. М. РАЗМАДЗЕ

Received August 25, 1973 (716)