[5] J. S. Pym, *The convolution of functionals on spaces of bounded functions*, ibid., 15 (1965), pp. 84–104.
[6] K. A. Ross, *The structure of certain measure algebras*, Pacific J. Math. 11 (1961), pp. 723–737.
[7] N. J. Young, *Semigroup algebras having regular multiplication*, Studia Math. 47 (1973), pp. 191–196.

UNIVERSITY OF SHEFFIELD, ENGLAND
PANJAB UNIVERSITY, CHANDIGARH, INDIA

Received January 21, 1974 (783)

STUDIA MATHEMATICA, T. LIV. (1975)

Isometrien in metrischen Vektorräumen

von

REINHARD WOBST (Dresden)

Zusammenfassung. Wir untersuchen, ob eine surjektive Isometrie zwischen metrischen Vektorräumen linear sein muß. Insbesondere wird ein Satz von Charzyński (1953) verallgemeinert und wesentlich kürzer bewiesen. Ein Satz von Rolewicz (1968) wird etwas verallgemeinert. Es wird gezeigt, daß jede Isometrie einer lokalkompakten metrischen Gruppe mit endlich vielen Komponenten in sich surjektiv sein muß. Die Gestalten aller surjektiven Isometrien der Räume $B(S)$ und $l(p_n)$ in sich werden bestimmt, und es wird eine spezielle Aussage über isometrische Einbettungen in l_p $(p\in(0,1))$ bewiesen.

§ 1. Einführung. Es seien (E, d); (F, h) reelle metrische Vektorräume (mit translationsinvarianter Metrik). Eine Abbildung $T\colon E\to F$ mit

$$d(x, y) = h(Tx, Ty) \qquad (x, y\in E)$$

heißt *Isometrie* von E in F.

Da für jede Isometrie auch die Abbildung $x\mapsto Tx-To$ eine Isometrie ist, dürfen wir $To = o$ annehmen (mit o bezeichnen wir das Nullelement eines Vektorraumes).

Eine bekannte Fragestellung ist, wann eine Isometrie T mit $To = o$ linear sein muß.

S. Mazur und S. M. Ulam [24] bewiesen, daß für den Fall normierter Räume jede surjektive Isometrie mit $To = o$ linear ist (vgl. S. Banach [4], S. 166). Mit analogen Fragen beschäftigten sich N. Aronszajn [2], J. A. Baker [3], Z. Charzyński [6], M. M. Day [8], S. Rolewicz [31] und A. Vogt [36]. Insbesondere bewies Charzyński folgendes Theorem:

Sind E und F metrische Vektorräume gleicher endlicher Dimension, und ist T eine Isometrie von E auf F mit $To = o$, so ist T linear.

Rolewicz ([30], S. 242) (vgl. Rolewicz [31]) zeigte:

Es seien X und Y zwei reelle lokalbeschränkte Räume mit den F-Normen $\|x\|_X$ bzw. $\|x\|_Y$. Außerdem seien für alle $x\in X$ und $y\in Y$ die Funktionen $\|tx\|_X$ und $\|ty\|_Y$ konkav für positive t.

Dann ist jede Isometrie U, die X auf Y mit $Uo = o$ abbildet, ein linearer Operator.

Die Frage, ob jede Isometrie eines metrischen Vektorraumes auf einen anderen affin sein muß, ist bisher noch ungeklärt.

Eine Reihe von Arbeiten (z. B. S. Banach [4], M. Cambern [5], J. Lamperti [17], D. P. Milman [27] und A. K. Roy [32]) beschäftigten sich mit dem Problem, die Gestalt aller Isometrien eines gegebenen Raumes auf sich zu bestimmen.

M. Edelstein und A. C. Thompson [10] sowie P. Mankiewicz [23] untersuchten, wann Isometrien von Teilmengen normierter Räume (in einen anderen normierten Raum) auf den ganzen Raum als Isometrie fortgesetzt werden können.

Schließlich bewies A. Lindenbaum [20] einige Sätze, wann jede Isometrie eines metrischen Raumes in sich surjektiv sein muß.

In § 2 dieser Arbeit werden Isometrien in normierten Räumen auf Linearität untersucht. In § 3 zeigen wir, daß jede Isometrie einer zusammenhängenden lokalkompakten metrischen Gruppe in sich, speziell eines endlichdimensionalen metrischen Vektorraumes in sich, surjektiv ist.

Satz 3 aus § 4 stellt eine Verallgemeinerung des Resultats von Charzyński (s.o.) mit einem wesentlich kürzeren Beweis als der bisher bekannte dar. Das obige Ergebnis von Rolewicz wird etwas verallgemeinert.

Als Anwendungen bestimmen wir in § 5 die Gestalt aller surjektiven Isometrien der Räume $B(S)$ und $l(p_n)$ und beweisen zwei Aussagen über isometrische Einbettungen.

Mit $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{R}$ bezeichnen wir die Mengen der natürlichen (einschließlich 0), der ganzen bzw. der reellen Zahlen.

§ 2. Isometrien in normierten Räumen. Der folgende Satz faßt lediglich die Ergebnisse für den Fall normierter Räume zusammen.

SATZ 1. *Es seien E und F normierte Räume, $T\colon E\to F$ eine Isometrie mit $To = o$.*

Ist T surjektiv, so ist T linear. Im folgenden sei T nicht notwendig surjektiv.

Dann muß $\dim E \leqslant \dim F$ gelten. Ist F strikt konvex oder $\dim E = \dim F$ endlich, so ist T linear; andernfalls existiert eine nicht-lineare Isometrie von $\boldsymbol{R}$ in F, die 0 in o überführt.

Beweis. Die erste Behauptung ist das Theorem von Mazur und Ulam (s. § 1).

$\dim E \leqslant \dim F$ folgt aus einem Satz von T. Figiel [11], der besagt, daß es zu jeder Isometrie $T\colon E\to F$ mit $To = o$ eine lineare (nicht notwendig stetige) Abbildung $S\colon F\to E$ mit $S(Tx) = x\,(x\in E)$ gibt. Speziell gibt es also eine lineare Abbildung von F *auf* E, woraus $\dim E\leqslant \dim F$ folgt.

Aus Satz 3 (§ 4) folgt, daß für $\dim E = \dim F < \infty$ jede Isometrie von E in F affin ist.

Nun sei F strikt konvex (aus $\|x\| = \|y\|$ und $\|x\|+\|y\| = \|x+y\|$ folgt $x = y$). Es gilt

$$\left\|Tx - T\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\| = \left\|T\left(\frac{x+y}{2}\right) - Ty\right\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$$

bei beliebigen $x, y\in E$, also ist

$$\|Tx-Ty\| = \|x-y\| = \left\|Tx - T\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\| + \left\|T\left(\frac{x+y}{2}\right) - Ty\right\|,$$

und wegen der strikten Konvexität von F folgt

$$Tx+Ty = 2T\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Für $y = 0$ ergibt sich $T(2x) = 2Tx$, und wir erhalten

$$T(x+y) = Tx+Ty.$$

T ist additiv, als Isometrie stetig und daher linear [1]. Jetzt sei F nicht strikt konvex, d.h. es gibt Elemente $x, y\in F$ mit $x\neq y$ und $\|x\| = \|y\| = \frac{1}{2}\|x+y\| = 1$. Es seien F_0 der von x und y aufgespannte zweidimensionale Teilraum und T die durch

$$Tt = \begin{cases} tx & \text{für} \quad t\leqslant 0, \\ ty & \text{für} \quad t>0 \end{cases}$$

erklärte Abbildung von $\boldsymbol{R}$ in F_0. T ist eine Isometrie mit $To = o$ und nicht linear (Konstruktion in Anlehnung an ein Beispiel von Baker [3]). ■

Falls E ein unendlichdimensionaler nicht strikt konvexer Raum ist, kann es auch nicht-lineare isometrische Einbettungen $T\colon E\to E$ mit $To = o$ geben (die natürlich nicht surjektiv sind). Als Beispiel betrachten wir den Raum l_∞ aller beschränkten Folgen.

Die Abbildung $T\colon l_\infty\to l_\infty$ mit

$$T(x_0, x_1, x_2, \ldots) = (|x_0|, x_0, x_1, x_2, \ldots)$$

ist Isometrie von l_∞ in sich mit $To = o$ und nicht linear.

[1] In Baker [3] wird dieser Sachverhalt ebenfalls bewiesen.

U. W. ist die Frage ungeklärt, ob in jedem unendlichdimensionalen nicht strikt konvexen normierten Raum eine solche Abbildung existiert.

§ 3. Surjektivität. Da bei der von uns behandelten Fragestellung die Surjektivität einer Isometrie meist vorausgesetzt wird, ist interessant, wann sie tatsächlich notwendig ist.

SATZ 2. *Es sei H eine zusammenhängende lokalkompakte metrische Gruppe mit der translationsinvarianten Metrik d und T eine Isometrie von H in sich.*

Dann ist T surjektiv.

Beweis. Wir nehmen zunächst $Te = e$ an, e neutrales Element von H. Es sei E_0 eine kompakte Kugel um e mit Radius r.

Wir setzen

$$E_n = T^n(E_0) \quad (n \in \boldsymbol{N}), \qquad E^* = \bigcap_{n \in \boldsymbol{N}} E_n.$$

Es gilt $E_{n+1} \subseteq E_n$ $(n \in \boldsymbol{N})$. E^* ist abgeschlossen (da alle E_n kompakt sind). Wegen der Injektivität von T ist $T(E^*) = E^*$. Angenommen, $E^* \neq E_0$; es gibt ein Element $y_0 \in E_0 \setminus E^*$ mit $d(y_0, E^*) = h > 0$. Dann ist mit $y_n = T^n y_0$ auch $d(y_n, E^*) = h$ für alle $n \in \boldsymbol{N}$. Weil $y_n \in E_0$ $(n \in \boldsymbol{N})$ und E_0 kompakt ist, haben die Elemente y_n einen Häufungspunkt y^*. Ersichtlich ist $d(y^*, E^*) = h$, d.h. $y^* \notin E^*$.

Es sei n_0 irgendein $n \in \boldsymbol{N}$ mit $y^* \notin E_n$. Da E_{n_0} abgeschlossen und $y_n \in E_{n_0}$ für $n > n_0$ ist, kann y^* nicht Häufungspunkt der Folge (y_n) sein.

Also gilt doch $T(E_0) = E_0$.

Ist nun T eine beliebige Isometrie von H in sich, $x \in H$ und $T_x(z) = T(zx)(Tx)^{-1}$ $(z \in H)$, so ist T_x eine Isometrie von H in sich mit $T_x e = e$, d.h. die Menge $T_x(H) = T(H)(Tx)^{-1}$ muß nach obigem Ergebnis eine Umgebung von e sein.

Daher ist $T(H)$ eine Umgebung von Tx, und folglich ist $T(H)$ offen. Andererseits ist jede lokalkompakte Gruppe vollständig. Wenn (Tx_n) Cauchyfolge ist, so ist auch (x_n) Cauchyfolge und besitzt einen Limes x^*. Wegen $Tx_n \to Tx^*$ ist auch $T(H)$ vollständig, somit abgeschlossen.

Weil H zusammenhängend ist und $T(H) \neq \emptyset$ gilt, folgt $T(H) = H$. ■

Dieses Resultat läßt sich auch auf lokalkompakte metrische Gruppen mit endlich vielen Komponenten übertragen (man beachte, daß jede Isometrie Homöomorphismus ist). Im allgemeinen gilt dies nicht; die Abbildung $m \mapsto 2m$ $(m \in \boldsymbol{Z})$ ist nicht-surjektive Isometrie der lokalkompakten metrischen Gruppe $\boldsymbol{Z}$ mit der diskreten Metrik.

FOLGERUNG. *Jede Isometrie eines endlichdimensionalen metrischen Vektorraumes in sich ist surjektiv.*

Sehr viel schwieriger wird das Problem, wenn T: $E \to F$ eine Isometrie zwischen zwei metrischen Vektorräumen gleicher endlicher Dimension ist.

Wir zeigen eine Verschärfung:

LEMMA 1. *Es sei M eine Teilmenge von $\boldsymbol{R}^n$ und T: $\boldsymbol{R}^n \to M$ ein Homöomorphismus von $\boldsymbol{R}^n$ auf M ($\boldsymbol{R}^n$ besitze die übliche Topologie; M versehen mit der induzierten Topologie).*

Ist die Abbildung T^{-1} gleichmäßig stetig, so gilt $M = \boldsymbol{R}^n$.

Beweis. Aus dem Gebietsinvarianzsatz (s.z. B. J. Dugundji [9]) folgt zunächst, daß M offen ist.

Nun ist M vollständig, da jedes Bild einer Cauchyfolge bezüglich einer gleichmäßig stetigen Abbildung wieder eine Cauchyfolge ist. Also ist M gleichzeitig abgeschlossen; weil $\boldsymbol{R}^n$ zusammenhängend und $M \neq \emptyset$ ist, folgt $M = \boldsymbol{R}^n$. ■

Im allgemeinen ist die Surjektivität auch linearer Isometrien nicht notwendig, wie das einfache Beispiel der Zuordnung $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_0, x_1, x_2, \ldots)$ im l_2 zeigt.

Jedoch konstruierte W. J. Davis [7] einen nicht strikt konvexen unendlichdimensionalen Banachraum, in dem die einzigen linearen (nicht notwendig surjektiven) Isometrien I bzw. $-I$ sind, wobei I die identische Abbildung dieses Banachraumes bezeichnet.

Interessant ist die Frage, ob es auch einen strikt konvexen Raum mit dieser Eigenschaft gibt.

§ 4. Metrische Vektorräume.

SATZ 3. *Es seien (E, d) und (F, h) metrische Vektorräume, E endlichdimensional und T eine Isometrie von E auf F mit $To = o$.*

Dann ist T linear.

Für den Fall $\dim E = \dim F$ ist die Voraussetzung der Surjektivität von T nicht erforderlich.

Beweis. Wir bemerken, daß E linear homöomorph zu $(\boldsymbol{R}^n, \|\cdot\|)$ ist, wobei $\|\cdot\|$ die übliche Norm des $\boldsymbol{R}^n$ bezeichnet.

Für den Fall $\dim E = \dim F < \infty$ genügt T den Voraussetzungen von Lemma 1 und ist somit surjektiv.

DEFINITION. Als *2-Extremalpunkt* einer Menge M eines Vektorraumes bezeichnen wir jedes Element $x \in M$ derart, daß aus $z, z' \in M$ und $z + z' = 2x$ folgt $z = z' = x$. M braucht dabei nicht konvex zu sein.

Wir benötigen zunächst zwei Hilfssätze.

LEMMA 2. *Ist x_0 2-Extremalpunkt von $\overline{K}(o, r) = \{x \in E\colon d(x, o) \leqslant r\}$, und ist $\overline{K}(o, 2r)$ kompakt, so gilt*

$$T(z + mx_0) = Tz + mTx_0 \quad (z \in E, m \in \boldsymbol{Z}).$$

Beweis. Für beliebiges $z \in E$ und $K = \overline{K}(o, r)$ sei
$$S = (K+z) \cap (K+z+2x_0).$$
Wir zeigen $S = \{z+x_0\}$.

Wegen $-x_0 \in K$ gilt $z+x_0 \in S$. Nun ist
$$x \in S \;\Rightarrow\; x' = 2(z+x_0)-x \in S;$$
es gilt nämlich
$$d(2(z+x_0)-x, z) = d(z+2x_0, x) \leqslant r, \quad \text{und}$$
$$d(2(z+x_0)-x, z+2x_0) = d(x, z) \leqslant r.$$
Ist nun x aus S beliebig, so gilt wegen $x' \in S$
$$x-z,\ x'-z \in K \quad \text{bei} \quad \tfrac{1}{2}\big((x-z)+(x'-z)\big) = x_0;$$
da x_0 2-Extremalpunkt von K ist, muß $x = x'$ und somit $S = \{z+x_0\}$ sein.

Da T bijektiv ist, folgt leicht
$$T(S) = (K_1+Tz) \cap \big(K_1+T(z+2x_0)\big),$$
wobei $K_1 = T(K)$ sei. Also gilt
$$2T(z+x_0) = Tz+T(z+2x_0).$$
Hieraus ergibt sich mit vollständiger Induktion
$$T(z+mx_0) = Tz+m\big(T(z+x_0)-Tz\big) \quad (z \in E,\ m \in \boldsymbol{Z}). \tag{1}$$
Nun sei z beliebig aus $\overline{K}(o, r)$. Wir zeigen durch Induktion nach k
$$T(kz+mx_0) = T(kz)+mTx_0.$$
Für $k = 0$ folgt das aus (1). Weiter erhalten wir aus (1) und der Induktionsvoraussetzung für $k-1$
$$\begin{aligned} h\Big(T(kz)+m\big(T(kz+x_0)-T(kz)\big),\ T\big((k-1)z\big)+mTx_0\Big) \\ = h\Big(T(kz+mx_0),\ T\big((k-1)z+mx_0\big)\Big) = d(z, o). \end{aligned} \tag{2}$$
Für $T(kz+x_0)-T(kz) \neq Tx_0$ kann die Menge P aller Elemente der Gestalt
$$m\big(T(kz+x_0)-T(kz)\big)-mTx_0 \quad (m \in \boldsymbol{Z})$$
nicht in einer kompakten Menge liegen; aus (2) folgt jedoch $P \subseteq T\big(\overline{K}(o, 2r)\big)$, und letztere Menge ist als stetiges Bild einer kompakten Menge wieder kompakt.

Wenn z beliebig ist, so erhalten wir mit $z/k \in \overline{K}(o, r)$ $(k \in \boldsymbol{N})$ schließlich $T\big(k(z/k)+x_0\big) = Tz+Tx_0$, woraus sich die Behauptung ergibt. ∎

Lemma 3. *Es sei $\overline{K}(o, r) \subseteq \overline{U}(o, t) = \{x \in E: \|x\| \leqslant t\}$, wobei $\overline{K}(o, r)$ die gleiche Bedeutung wie in Lemma 2 haben soll.*

Dann ist die lineare Hülle aller 2-Extremalpunkte von $\overline{K}(o, r)$ gleich E.

Beweis. Es sei $t_0 = \inf\{t \in \boldsymbol{R}: \overline{K}(o, r) \subseteq \overline{U}(o, t)\}$; dann gilt $t_0 > 0$, $\overline{K}(o, r) \subseteq \overline{U}(o, t_0)$. Nun ist $\overline{K}(o, r)$ abgeschlossen und $S = \{x \in E: \|x\| = t_0\}$ kompakt sowie $d\big(S, \overline{K}(o, r)\big) = 0$ nach Definition von t_0. Es gibt also ein Element x_0 aus $S \cap \overline{K}(o, r)$. x_0 ist 2-Extremalpunkt von $\overline{K}(o, r)$, da $\|\cdot\|$ strikt konvexe Norm ist.

Wir nehmen nun an, die Behauptung sei richtig für alle Räume kleinerer Dimension als $\dim E$.

Es sei H der von den 2-Extremalpunkten von $\overline{K}(o, r)$ aufgespannte Teilraum, $H \neq \{o\}$. Angenommen, es ist $H \neq E$ und $y_0 \in E \setminus H$. Da $\overline{K}(o, r)$ kompakt und H abgeschlossen ist, gilt
$$0 < s_0 = \sup\{s \in \boldsymbol{R}: \overline{K}(o, r) \cap (H+sy_0) \neq \emptyset\} < \infty \quad \text{und}$$
$$M = \overline{K}(o, r) \cap (H+s_0 y_0) \neq \emptyset.$$
M ist kompakt, liegt in $H+s_0y_0$ und hat also nach Induktionsannahme einen 2-Extremalpunkt, der gleichzeitig 2-Extremalpunkt von $\overline{K}(o, r)$ sein muß.

Somit gilt doch $H = E$. ∎

Beweis von Satz 3. Es sei $r > 0$ und $\overline{K}(o, 2r)$ kompakt (Bezeichnung wie in Lemma 2). Die 2-Extremalpunkte von $\overline{K}(o, r)$ erzeugen eine additive Untergruppe von E; die Vereinigung aller solchen Untergruppen liegt nach Lemma 3 dicht in E. Nach Lemma 2 ist T auf dieser Vereinigung additiv; da T stetig ist, muß T auch linear sein. ∎

Satz 4′. *Es seien E und F metrische Vektorräume mit den Metriken d und h. Für E gebe es ein $r > 0$ und ein $p > 1$ mit*
$$d(2x, o) \geqslant pd(x, o) \quad (x \in K(o, r));$$
für F gelte die analoge Aussage.

Ist T eine Isometrie von E auf F mit $To = o$, so ist T linear.

Der Beweis verläuft völlig analog zu den Beweisen von Mazur und Ulam [23] sowie des Theorems IX. 3.1. von Rolewicz [30].

Wir geben noch eine Verallgemeinerung von Satz 4′ und Theorem IX. 3.1. von Rolewicz (s. § 1) an.

Es sei (E, d) ein lokalbeschränkter metrischer Vektorraum mit konkaver Metrik (d.h., $d(tx, o)$ ist für positive t eine konkave Funktion in t). Für $x \neq o$, $\varepsilon \geqslant 0$ und $d(2x, o) = (1+\varepsilon)d(x, o)$ folgt
$$d(2x, o) = d\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{n+1}{n}x, o\right) \geqslant \frac{n-1}{n}d(x, o)+\frac{1}{n}d\big((n+1)x, o\big)$$
$(0 < n \in \boldsymbol{N})$ oder
$$d\big((n+1)x, o\big) \leqslant (1+n\varepsilon)d(x, o).$$

Wegen der Konkavität ist $d(tx, o)$ für positive t eine monoton wachsende Funktion in t. Wenn $K(o, 2r_0)$ beschränkt und $0 < r < r_0$ ist, so kann für die $x \in E$ mit $r \leqslant d(x, o) < r_0$ obiges ε nicht beliebig klein werden. Also ist

$$s_E(r; r_0) = \inf\left\{\frac{d(2x, o)}{d(x, o)} : r \leqslant d(x, o) < r_0\right\} > 1.$$

Nun gilt folgender

Satz 4. *Es seien E und F metrische Vektorräume mit den Metriken d und h. Es existiere ein $r_0 > 0$, so daß für alle $r \in (0, r_0)$ gilt*

$$s_E(r; r_0) > 1, \qquad s_F(r; r_0) > 1$$

(s_F bezeichne die zu s_E analoge Funktion für F).

Ist dann T eine Isometrie von E auf F mit $To = o$, so ist T linear.

Beweis. Der Einfachheit halber bezeichnen wir die F-Normen auf E bzw. F beide mit $\|\cdot\|$. Auf $E \times F$ erklären wir die F-Norm

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\| \qquad (x \in E, y \in F).$$

Die Voraussetzung des Satzes gilt auch für $E \times F$:

Wenn $(x, y) \in E \times F$ beliebig ist mit $0 < 2r \leqslant \|x\| + \|y\| < r_0$, so rechnet man für $x \neq o$, $y \neq o$ leicht nach, daß

$$\frac{\|2x\| + \|2y\|}{\|x\| + \|y\|} \geqslant \tfrac{1}{2}\left(1 + \min\left(s_E(r; r_0), s_F(r; r_0)\right)\right) > 1$$

gilt. Mit $s(r; r_0)$ bezeichnen wir die Funktion $s_{E\times F}(r; r_0)$. Weiter definieren wir in $E \times F$

$$n(r) = \sup_{\|2x\| < r} \|x\| \qquad (r > 0).$$

Ist $0 < r' < r < r_0$, so gilt für $r' \leqslant \|x\| \leqslant \|2x\| < r$

$$\frac{\|x\|}{r} < \frac{\|x\|}{\|2x\|} < \frac{1}{s(r'; r_0)} < 1,$$

also ist für alle $r' \in (0, r)$

$$n(r) \leqslant \max\left(\frac{r}{s(r'; r_0)}, r'\right) < r. \tag{3}$$

Jetzt sei $r_1 < r_0$ beliebig, $r_1 > 0$ und $r_n = n(r_{n-1})$ für $n = 2, 3, \ldots$ Dann ist $r_1 > r_2 > \ldots > 0$. Wäre $r' = \lim r_n > 0$, so wäre für $0 < \bar{r} < r'$ wegen (3)

$$r' = \lim r_n = \lim n(r_n) \leqslant \lim \frac{r_n}{s(\bar{r}; r_0)} = \frac{r'}{s(\bar{r}; r_0)} < r'$$

ein Widerspruch. Somit gilt $r_n \to 0$.

Schließlich ist die Abbildung $(x, y) \mapsto (T^{-1}y, Tx)$ Isometrie von $E \times F$ auf sich, die o festläßt. Ist diese Abbildung linear, so ist es auch T.

Damit überträgt sich der Beweis des Theorems IX. 3.1. von Rolewicz [30] auch auf diesen Fall. ■

Bemerkung 1. Es ist notwendig, den Beweis im Produktraum $E \times F$ durchzuführen. Rolewicz konstruiert mit Hilfe der r_n (ähnlich der Methode von Mazur und Ulam) für zwei gewisse Punkte $x, y \in E$ eine fallende Mengenfolge, deren Durchschnitt gerade $(x+y)/2$ ist. Diese Mengen werden rein metrisch definiert und bei der Isometrie in analoge Mengen übergeführt, die Tx und Ty entsprechen. Also wird $(x+y)/2$ in $\frac{1}{2}(Tx + Ty)$ übergeführt, womit man die Linearität von T zeigen kann.

Da sich aber im Bildraum F andere r_n ergeben können als in E, läßt sich die Methode von Rolewicz nur auf den Fall anwenden, daß ein Raum isometrisch auf sich abgebildet wird.

Bemerkung 2. Aus der Voraussetzung von Satz 4 folgt, daß E und F lokalbeschränkt sind:

Es sei

$$r \in (0, r_0) \qquad \text{und} \qquad p = \left[\frac{\ln r_0 - \ln r}{\ln s_E(r; r_0)}\right] + 1.$$

Wäre für ein $x \in E$ $r \leqslant d(2^m x, o) < r_0$ $(m \leqslant p, m \in N)$, so würde

$$d(2^p x, o) \geqslant \left(s_E(r; r_0)\right)^p d(x, o) > \frac{r_0}{r} d(x, o) \geqslant r_0$$

folgen, was ein Widerspruch ist. Wenn also U der sternförmige Teil von $K(o, r_0)$ ist, so gilt $2^{-p} U \subseteq K(o, r)$. Daher ist U beschränkte Nullumgebung.

Somit sind Satz 4 und Theorem IX. 3.1. von Rolewicz für den Fall konkaver Metriken identisch.

Jedoch braucht in Satz 4 die Funktion $d(tx, o)$ für positive t nicht einmal monoton zu sein. Als Beispiel betrachten wir den Raum $(\boldsymbol{R}, d)$, dessen Metrik erklärt ist durch

$$d(x, o) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} + 2^{-2n-4} - \left(|x| - 2^{-n} - 2^{-n-2}\right)^2, & |x| \in [2^{-n}, 2^{-n} + 2^{-n-1}], \\[2ex] \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{2^{n+1}}{n(n+1)}\left(|x| - 2^{-n} - 2^{-n-1}\right), & |x| \in [2^{-n} + 2^{-n-1}, 2^{-n+1}], \\[2ex] \dfrac{1}{2}, & |x| \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$(n \geqslant 2)$. Die Voraussetzungen von Satz 4′ sind hier nicht erfüllt, wohl aber die des Satzes 4.

§ 5. Anwendungen. Es sei S eine beliebige nichtleere Menge und $B(S)$ der Raum aller beschränkten reellen Funktionen auf S mit der Norm

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|\colon x \in S\} \qquad (f \in B(S)).$$

Dann gilt

SATZ 5. *Es seien $\varphi\colon S \to S$ eine Bijektion, a aus $B(S)$ mit $|a(x)| = 1$ $(x \in S)$ und T die durch $Tf = af\cdot\varphi$ erklärte Abbildung von $B(S)$ in sich. Dann ist T Isometrie von $B(S)$ auf sich, und alle surjektiven Isometrien von $B(S)$ sind Komposition einer Translation in $B(S)$ und einer Abbildung obiger Gestalt.*

Beweis. Trivialerweise ist T Isometrie. Weiterhin ist T surjektiv wegen $T\left(\frac{1}{a}f\cdot\varphi^{-1}\right) = f$.

Nun sei T eine Isometrie von $B(S)$ auf sich mit $To = o$. Weiter seien c_x die Indikatorfunktion von $\{x\}$, $e_x = Tc_x$ sowie $K_x = S\setminus e_x^{-1}(\{0\})$. Weil T nach dem Theorem von Mazur und Ulam linear ist, muß das Bild eines Extremalpunktes der Einheitskugel wieder ein solcher sein, d.h. eine Funktion f mit

$$(4) \qquad |f(x)| = 1 \qquad (x \in S).$$

Wenn für ein festes $x \in S$ gilt $f(x) = -1$, so ist auch

$$T(f+2c_x) = Tf+2e_x$$

ein solcher Extremalpunkt. Also ist $e_x z = 0$ oder $|e_x z| = 1$ für $z \in S$. Nun gilt aber

$$(5) \qquad |(Tf)(z)+2e_x z| = 1 \qquad (z \in S)$$

für jedes $f \in B(S)$ mit (4) und $f(x) = -1$. Wir nehmen an, es gebe zwei verschiedene Elemente v, w aus K_x. Dann hätte der Extremalpunkt g der Einheitskugel mit $g(w) = e_x w$, $g(v) = -e_x v$ und $g(u) = 1$ für $u \neq w$, $u \neq v$ ein Urbild $T^{-1}g$, das (4) genügt. Wir setzen

$$h = (-\operatorname{sgn}(T^{-1}g)(x))T^{-1}g.$$

Dann müßte h der Gleichung (5) genügen, und wegen $e_x w \neq 0$, $e_x v \neq 0$ wäre

$$|-\operatorname{sgn}(T^{-1}g)(x)e_x w+2e_x w| = |\operatorname{sgn}(T^{-1}g)(x)e_x v+2e_x v|$$

ein Widerspruch.

Somit ist K_x für alle $x \in S$ einelementig.

Weil T^{-1} auch Isometrie ist, muß $T^{-1}c_x$ bis auf Vorzeichen ebenfalls eine Funktion der Gestalt c_z sein. Schließlich gilt $K_x \neq K_z$ $(x \neq z)$, da T injektiv und homogen ist.

Also ist die Abbildung $x \mapsto \varphi x$ mit $K_x = \{\varphi x\}$ Bijektion von S auf sich. Wir setzen $ax = e_x(\varphi x)$.

Nun seien $o \neq f \in B(S)$, $x \in S$ beliebig und $g = f+3\|f\|c_x$. Dann ist $|g(z)| > \|f\|$ äquivalent zu $z = x$, und wegen $Tg = Tf+3\|f\|e_x$ ist $|(Tg)(z)| > \|f\|$ gleichwertig mit $z = \varphi x$. Aus $\|g\| = \|Tg\|$ folgt also

$$|f(x)+3\|f\|| = |(Tf)(\varphi x)+3\|f\|ax|.$$

Hieraus ergibt sich sofort $f(x) = a(x)(Tf)(\varphi x)$; da x beliebig war, gilt $Tf = af\cdot\varphi$. ∎

Wir bestimmen noch die Gestalt der Isometrien auf sich eines Raumes l_p $(0 < p \leqslant 1)$ aller Folgen (x_n) reeller Zahlen mit

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p < \infty$$

und diesem Term als F-Norm. Offenbar genügt diese F-Norm der Bedingung von Satz 4 (bzw. Satz 4′ oder Theorem IX. 3.1. von Rolewicz, vgl. § 1).

SATZ 6. *Es seien $\varphi\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ eine Bijektion und a eine Abbildung von $\mathbf{N}$ in $\{-1, 1\}$. Dann ist für $0 < p \leqslant 1$ die Abbildung*

$$T\colon (x_n) \mapsto (a_{\varphi n} x_{\varphi n})$$

eine Isometrie von l_p auf sich, und alle surjektiven Isometrien von l_p sind Komposition einer Translation in l_p und einer Abbildung obiger Gestalt.

Beweis. T ist surjektive Isometrie, da absolut konvergente Reihen umgeordnet werden dürfen.

Nun sei T eine surjektive Isometrie mit $To = o$. Wir setzen $c_k(k) = 1$, $c_k(n) = 0$ sonst $(k, n \in \mathbf{N})$ und $e_k = Tc_k$. Für $k \neq l$ gilt

$$\|T(c_k+c_l)\| = \|e_k+e_l\| = 2 = \|T(c_k-c_l)\| = \|e_k-e_l\|.$$

Mit $e_k = (a_n)$, $e_l = (b_n)$ folgt also

$$(6) \qquad \sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n+b_n|^p = \sum_{n \in \mathbf{N}} (|a_n|^p+|b_n|^p) = \sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n-b_n|^p.$$

Es sei $p < 1$. Für $a, b \geqslant 0$ gilt $(a+b)^p \leqslant a^p+b^p$ und Gleichheit genau dann, wenn $ab = 0$ ist. Aus (6) folgt daher für alle $n \in \mathbf{N}$

$$|a_n+b_n|^p = |a_n|^p+|b_n|^p$$

oder $a_n b_n = 0$.

Für $p = 1$ folgt aus (6) und der Dreiecksungleichung

$$|a_n+b_n| = |a_n|+|b_n| \qquad (n \in \mathbf{N}),$$

d.h. a_n und b_n haben gleiches Vorzeichen; die Gleichungen

$$|a_n-b_n| = |a_n+b_n| \quad \text{und} \quad \sum_{n\in N} |a_n+b_n| = \sum_{n\in N} |a_n-b_n|$$

liefern nun ebenfalls $a_n b_n = 0$.

Wenn wir $M_k = N \setminus e_k^{-1}(\{0\})$ setzen, ergibt sich somit

$$M_k \cap M_l = \emptyset \qquad (k \neq l).$$

Ist jetzt $\xi = (x_n) \in l_p$, so konvergiert die Folge (ξ_n) mit

$$\xi_n = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

gegen ξ, also gilt $T\xi_n \to T\xi$; daraus erhalten wir

$$T\xi = \sum_{n\in N} x_n e_n.$$

Wegen der Surjektivität von T ist $\bigcup_{n\in N} M_n = N$ und M_k einelementig (da speziell jedes Element e_k ein Urbild hat). Also ist ψ: $n \mapsto \psi(n)$ mit $M_n = \{\psi(n)\}$ Bijektion von N auf sich; mit $a_n = e_n(\psi n)$ und $\varphi = \psi^{-1}$ folgt schließlich $T\xi = (a_{\varphi n} x_{\varphi n})$. ∎

Bemerkung 3. Es seien (p_n) eine Folge reeller Zahlen mit $p_n \in (0, 1]$ $(n \in N)$ und $l(p_n)$ der Raum aller Folgen (x_n) reeller Zahlen mit

$$\|(x_n)\| = \sum_{n\in N} |x_n|^{p_n} < \infty$$

und diesem Term als F-Norm (vgl. M. Landsberg [18], S. Simons [35]). Nach Simons ist der Raum $l(p_n)$ genau dann lokalbeschränkt, wenn $\inf p_n > 0$ gilt. Genau dann sind auch die Voraussetzungen der Sätze 4, 4′ sowie des Theorems IX. 3.1 von Rolewicz (s. § 1) erfüllt. Jedoch gelten die Aussagen dieser Sätze auch für diesen Raum:

Die 2-Extremalpunkte der Metrikkugeln um o sind gerade die Folgen, die genau ein von o verschiedenes Element besitzen. Nun läßt sich Lemma 2 (Satz 3) anwenden. Man beachte nur, daß die dort auftretende Menge $P(=\{nx\colon n \in Z\},\ x \neq o)$ in keiner Metrikkugel liegen kann.

Da die von den 2-Extremalpunkten erzeugte additive Untergruppe von $l(p_n)$ überall dicht und T stetig ist, muß T additiv und als stetige Abbildung linear sein (vgl. Satz 3).

Damit läßt sich der Beweis von Satz 6 auch auf die Räume $l(p_n)$ ausdehnen, nur muß φ noch der Bedingung $p_n = p_{\varphi n} (n \in N)$ unterworfen werden.

Das alles trifft auch auf die Räume $l(p_j)$ zu, die wir wie folgt definieren:

Es sei $(p_j)_{j\in J}$ eine Famile reeller Zahlen mit $0 < p_j \leqslant 1$ $(j \in J)$, wobei J eine beliebige Indexmenge sei. Wir erklären $l(p_j)$ als den Raum aller Familien $(x_j)_{j\in J}$ reeller Zahlen mit

(a) höchstens abzählbar viele x_j sind nicht 0;

(b) es gilt $\sum_{j\in A} |x_j|^{p_j} < \infty$, wobei A die Menge aller j mit $x_j \neq 0$ sei.

Der Term in (b) definiert eine F-Norm auf $l(p_j)$.

Bemerkung 4. Banach [4] bestimmte in ähnlicher Weise wie in Satz 6 die Gestalt aller surjektiven Isometrien der Räume l_p für $p \geqslant 1$ (u.a.).

Es gibt keinen nichttrivialen normierten Raum, der einer Teilmenge eines Raumes l_p mit $p \in (0, 1)$ isometrisch ist.

Beweis. Für $\xi, \eta \in l_p$ und $\xi = (x_n)$ sei $M(\xi) = \{n \in N\colon x_n \neq 0\}$, $M(\eta)$ analog. Wenn $\|\xi+\eta\| = \|\xi\|+\|\eta\|$ gilt, so folgt wie in Satz 6 $M(\xi) \cap \cap M(\eta) = \emptyset$.

Angenommen, es gibt eine isometrische Einbettung T: $R \to l_p$. Wir dürfen $T0 = o$ annehmen. Mit $x \geqslant y \geqslant 0$ gilt $|x-y|+|y| = |x|$ oder $\|Tx-Ty\|+\|Ty\| = \|Tx\|$, d.h. $M(Tx-Ty) \cap M(Ty) = \emptyset$. Wenn also $x \geqslant y \geqslant 0$, $Tx = (x_n)$, $Ty = (y_n)$ und $y_n \neq 0$ für eine Zahl $n \in N$ ist, folgt $x_n = y_n$.

Wegen $T0 = o$ springt daher mit wachsendem x eine Komponente x entweder in einem gewissen Punkt von 0 auf einen von 0 verschiedenen Wert, den sie dann beibehält, oder sie bleibt identisch 0. Also kann T nicht stetig sein, oder es gilt $Tx = o$ $(x \geqslant 0)$. Folglich läßt sich R nicht isometrisch in l_p einbetten und somit kein nichttrivialer normierter Raum. ∎

Für derartige Einbettungssätze haben die Sätze 3, 4 und 5 ebenfalls Bedeutung. Rolewicz ([30], S. 265) zeigte, daß es keinen metrischen Vektorraum H derart geben kann, daß jeder endlichdimensionale metrische Vektorraum einem Teilraum von H linear isometrisch ist. Wegen Satz 3 gilt dies auch für beliebige Isometrien auf einen Teilraum.

Literatur

[1] R. F. Arens, J. L. Kelley, *Characterizations of the space of continuous functions over a compact Hausdorff space*, Trans. Amer. Math. Soc. 62 (1947), S. 499–508.

[2] N. Aronszajn, *Charactérisation métrique de l'espace de Hilbert, des espaces vectoriels et de certains groupes métriques*, C. R. (Paris) 201 (1935), S. 811–813.

[3] J. A. Baker, *Isometries in normed spaces*, Amer. Math. Monthly 78 (1971), S. 655–658.

[4] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Monogr. Mat., Tom 1, Warszawa 1932.

[5] M. Cambern, *Isometries of certain Banach algebras*, Studia Math. 25 (1965), S. 217–225.

[6] Z. Charzyński, *Sur les transformations isométriques des espaces du type (F)*, Studia Math. 13 (1953), S. 94–121.

[7] W. J. Davis, *Separable Banach spaces with only trivial isometries*, Revue Roum. Math. Pures Appl. 16 (1971), S. 1051–1054.

[8] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.
[9] J. Dugundji, *Topology*, Boston, Mass. 1966.
[10] M. Edelstein, A. C. Thompson, *Contractions, isometries and some properties of inner-product spaces*, Indag. Math. 29 (1967), S. 326–331.
[11] T. Figiel, *On nonlinear isometric embeddings of normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 16 (1968), S. 185–188.
[12] F. Forelli, *The isometries of H^p*, Canad. J. Math. 18 (1964), S. 721–728.
[13] W. Holsztyński, *Continuous mappings induced by isometries of spaces of continuous functions*, Studia Math. 26 (1966), S. 133–136.
[14] — *Linearization of isometric embeddings of Banach spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 16 (1968), S. 189–193.
[15] R. V. Kadison, *Isometries of operator algebras*, Ann. of Math. 54 (1951), S. 325–338.
[16] N. Lal, S. Merill, *Isometries of H^p spaces of the torus*, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), S. 465–471.
[17] J. Lamperti, *On the isometries of some function spaces*, Pac. J. Math. 8 (1958), S. 459–466.
[18] M. Landsberg, *Lineare topologische Räume, die nicht lokalkonvex sind*, Math. Zeitschr. 65 (1956), S. 104–112.
[19] K. de Leeuw, W. Rudin, J. Werner, *The isometries of some function spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), S. 694–698.
[20] A. Lindenbaum, *Contributions à l'étude de l'espace métrique I*, Fund. Math. 8 (1926), S. 209–222.
[21] G. Lumer, *On the isometries of reflexive Orlicz spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 13 (1963), S. 99–109.
[22] — *Isometries of Orlicz spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 68 (1962), S. 28–30.
[23] P. Mankiewicz, *On Extension of Isometries in Normed Linear Spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 20 (1972), S. 367–371.
[24] S. Mazur, S. M. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. (Paris) 194 (1932), S. 946–948.
[25] D. P. Milman, *Изометрия и экстремальные точки*, Докл. АН СССР 59 (1948), S. 1241–1244.
[26] A. L. Paterson, *Isometries between B^*-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969), S. 570–572.
[27] A. I. Plotkin, *Об изометрических операторах в пространствах суммируемых аналитических и гармонических функций*, Докл. АН СССР 185 (1969), S. 995–997.
[28] — *Об изометрических операторах на подпространствах в L^p*, Докл. АН СССР 193 (1970), S. 537–539.
[29] J. Rätz, *On isometries of generalized inner product spaces*, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), S. 6–9.
[30] S. Rolewicz, *Metric linear spaces*, Monogr. Mat., Tom 56, Warszawa 1972.
[31] — *A generalization of the Mazur-Ulam theorem*, Studia Math. 31 (1968), S. 501–505.
[32] A. K. Roy, *Extreme points and linear isometries of the Banach space of Lipschitz functions*, Canad. J. Math. 20 (1968), S. 1150–1164.
[33] B. Russo, *Isometries of L^p spaces associated with finite von Neumann algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 74 (1968), S. 228–232.
[34] — *Isometries of the trace class*, Proc. Amer. Math. Soc. 23 (1969), S. 213.
[35] S. Simons, *The sequence spaces $l(p_\nu)$ and $m(p_\nu)$*, Proc. London Math. Soc. (3) 15 (1965), S. 422–436.
[36] A. Vogt, *Maps which preserve equality of distance*, Studia Math. 65 (1973), S. 43–48.

Received January 28, 1974 (784)

STUDIA MATHEMATICA, T. LIV. (1975)

Extensions by mollifiers in Besov spaces*

by

PAWEŁ SZEPTYCKI (Lawrence, Kansas)

Abstract. An operator E of extension from lower dimensional subspaces for functions in Besov spaces is constructed using Friedrichs mollifiers. E has the useful property that for u defined on a hyperplane in $\boldsymbol{R}^n$ the support Eu is contained in the union of cones with vertices in the support of u and axes perpendicular to the hyperplane. Also if support of u is compact then so is the support of Eu.

1. Introduction. In this section we shall set up the notations, recall certain facts concerning Besov spaces and state the problem to be dealt with in the paper. Most of the facts about Besov spaces quoted below can be found in [1].

For a (complex, real or vector valued) function u defined in $\boldsymbol{R}^n$ we denote by $\Delta_h^k u$ the kth forward difference with increment $h \in \boldsymbol{R}^n$. If $\boldsymbol{R}^n$ is represented as $\boldsymbol{R}^n = \boldsymbol{R}^m \times \boldsymbol{R}^l$ with $x = (x', x'')$, $x' \in \boldsymbol{R}^m$, $x'' \in \boldsymbol{R}^l$ the corresponding partial differences are denoted by $\Delta^k_{h',x'}$, $\Delta^k_{h'',x''}$, $h' \in \boldsymbol{R}^m$, $h'' \in \boldsymbol{R}^l$.

The symbol $\| \ \|_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, is used to denote the L^p norm on $\boldsymbol{R}^n$ and, with notations as above, $\|u(\cdot, x'')\|_p$, $\|u(x', \cdot)\|_p$ denote the norms of $u(x', x'')$ as a function of x' with x'' fixed or respectively as a function of x'' with x' fixed.

The *Besov norm* $\| \ \|_{\alpha,p,\theta}$, $\alpha > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$ is defined by

$$\|u\|_{\alpha,p,\theta} = \Big[\|u\|_p^p + \Big(\int_{\boldsymbol{R}^n} |h|^{-n-\theta\alpha} \|\Delta_h^k u\|_p^\theta \, dh\Big)^{p/\theta}\Big]^{1/p} \tag{1.1}$$

where k is an integer $k > \alpha$ and for $\theta = \infty$ the integral in parantheses is replaced by $\sup\{|h|^{-\alpha}\|\Delta_h u\|_p;\ h \neq 0\}$.

The different choices of $k > \alpha$ give rise to equivalent norms, this is why k is suppressed in the notation.

A norm equivalent to (1.1) is given by the formula

$$\Big[\|u\|_p^p + \Big(\int_{\boldsymbol{R}^m} |h'|^{-m-\theta\alpha} \|\Delta^{k'}_{h',x'} u\|_p^\theta \, dh' + \int_{\boldsymbol{R}^l} |h''|^{-l-\theta\alpha} \|\Delta^{k''}_{h'',x''} u\|_p^\theta\Big)^{p/\theta}\Big]^{1/p} \tag{1.2}$$

---

* This research was supported by NSF grant GP-16292.