Contents of volume LIV, number 1

STUDIA MATHEMATICA

Managing Editors: **Z. Ciesielski, W. Orlicz** (*Editor-in-Chief*), **A. Pełczyński, W. Żelazko**

The journal prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysi and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The papers submitted should be typed on one side only and they should be accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies, one of them being the typed, not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

"ARS POLONA"
Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Sur les rapports entre sommabilité et dimension diamétrale

par

JEAN-PIERRE LIGAUD (Talence)

Résumé. Il est bien connu qu'un espace de Fréchet dans lequel toute suite sommable est absolument sommable, est nucléaire. Le problème se pose de savoir si cette propriété reste vraie quand on supprime la locale convexité (cf. [1], p. 478, Problème n° 46). On résoud la question pour les espaces de Köthe $l^p(a_{m,n})$ $(0<p<1)$.

Soit $0<p\leqslant 1$ et $(a_{m,n})_{m\in N, n\in N}$ une matrice réelle infinie telle que

$$a_{m,n}\geqslant 0 \quad \text{et} \quad a_{m+1,n}\geqslant a_{m,n} \quad \text{pour tout } m \text{ et tout } n.$$

L'espace de Köthe $l^p(a_{m,n})$ est l'espace de toutes les suites réelles $(\xi_n)_{n\in N}$ telles que pour tout m, on ait:

$$\|(\xi_n)\|_m = \sum_n a_{m,n}|\xi_n|^p < +\infty.$$

$l^p(a_{m,n})$ est alors un espace vectoriel, et on le munit de la topologie *localement p-convexe métrisable, complète* définie par les voisinages de 0

$$V_{m,\varepsilon} = \{(\xi_n)\in l^p(a_{m,n}),\ \|(\xi_n)\|_m\leqslant\varepsilon\}.$$

Pour que cette topologie soit séparée, on supposera que pour tout entier n, il existe un entier m avec $a_{m,n}>0$.

Si A est une partie équilibrée et absorbante d'un espace vectoriel E, et si x est un point de E, on note $|x|_A = \inf\{\lambda>0,\ x\in\lambda A\}$.

Une suite (x_k) d'éléments de $l^p(a_{m,n})$ sera dite *absolument sommable* si, quelque soit m et $\varepsilon>0$, on a $\sum_k |x_k|_{V_{m,\varepsilon}} < +\infty$ (cf. [1], p. 478).

THÉORÈME. *Si, dans $l^p(a_{m,n})$ $(0<p\leqslant 1)$ toute suite sommable est absolument sommable, $l^p(a_{m,n})$ est localement convexe et nucléaire.*

Pour démontrer ce théorème, on va se servir d'un lemme:

Soit (b_n) une suite de nombres >0 et soit

$$B = \Big\{(\xi_n)\in l^p(a_{m,n}),\ \sum_n b_n|\xi_n|^p\leqslant 1\Big\}.$$

Soit $d_n(B, V_{m,1}) = \inf\{\lambda>0,\ \exists L,\ \dim L\leqslant n,\ B\subset\lambda V_{m,1}+L\}$ la n-ième épaisseur de B par rapport à $V_{m,1}$. On a:

LEMME 1.
$$\inf_{k\leqslant n}\left(\frac{a_{m,k}}{b_k}\right)^{1/p}\leqslant d_n(B, V_{m,1})\leqslant \sup_{k\geqslant n}\left(\frac{a_{m,k}}{b_k}\right)^{1/p}.$$

Preuve. L'argument est standard (voir par exemple, [4], p. 75, 76, ou [5], p. 145, 146).

Démonstration du théorème. On suppose donc que, dans $l^p(a_{m,n})$, toute suite sommable est absolument sommable.

Soit γ un réel fixé une fois pour toutes, tel que $\frac{1}{2}<\gamma<1$. Soit β un *entier* fixé tel que $\beta(2\gamma-1)p/2>1$, et soit $a=4/(1-\gamma)$.

$l^p(a_{m,n})$ étant métrisable et localement p-convexe, si pour tout compact K et tout voisinage de 0, $V_{m,1}$, on a $\sum_n [d_n(K, V_{m,1})]^a<+\infty$, alors il existe un nombre $\delta>0$ tel que pour tout compact K et tout voisinage $V_{m;\varepsilon}$ on ait
$$\lim_{n\to+\infty} n^\delta d_n(K, V_{m,\varepsilon})=0$$
et, d'après [3], $l^p(a_{m,n})$ est diamétralement nucléaire (c'est-à-dire que sa dimension diamétrale contient une suite du type $((n+1)^b)$ avec $b>0$). La méthode de démonstration est celle utilisée par B. S. Mitiagin dans [4], p. 91, 92. Supposons que $l^p(a_{m,n})$ ne soit pas diamétralement nucléaire. Il existe alors un compact K et un voisinage $V_{m_0,1}$ tels que l'on ait
$$\sum_k [d_k(K, V_{m_0,1})]^a=+\infty.$$

Soit $\lambda_m>0$ tel que $K\subset \lambda_m V_{m,1}$ et soit
$$B=\left\{(\xi_n)\in l^p(a_{m,n}),\ \sum_m \frac{1}{2^{m+1}\lambda_m^p}\|(\xi_n)\|_m=\sum_n b_n|\xi_n|^p\leqslant 1\right\}$$
avec
$$b_n=\sum_m \frac{a_{m,n}}{2^{m+1}\lambda_m^p}.$$
B est un p-disque borné de $l^p(a_{m,n})$ car si $x\in B$, on a $\|x\|_m\leqslant 2^{m+1}\lambda_m^p$ et d'après les hypothèses faites sur les $a_{m,n}$ on a $b_n>0$ pour tout n. Enfin, si $x\in K$, on a $\|x\|_m\leqslant \lambda_m^p$ donc
$$\sum_m \frac{1}{2^{m+1}\lambda_m^p}\|x\|_m\leqslant 1$$
et $K\subset B$.

On a donc encore $\sum_k [d_k(B, V_{m_0,1})]^a=+\infty$.

Considérons la suite $((a_{m_0,k}/b_k)^{1/p})_k$. Deux cas sont possibles. Ou bien cette suite ne converge pas vers zéro. Il existe alors une suite (k_s) d'entiers, strictement croissante, et $a>0$ tels que
$$\left(\frac{a_{m_0,k_s}}{b_{k_s}}\right)^{1/p}>a.$$

Dans ces conditions, soit
$$E=\{(\xi_n)\in l^p(a_{m,n}),\ \xi_n=0 \text{ si } n\neq k_s \text{ pour tout } s\}.$$
Munissons E de la topologie induite par $l^p(a_{m,n})$. E est isomorphe à l'espace de Köthe $l^p(a'_{m,s})$ avec $a'_{m,s}=a_{m,k_s}$ et si (x_k) est une suite sommable dans E, elle est à fortiori sommable dans $l^p(a_{m,n})$, donc absolument sommable dans $l^p(a_{m,n})$ et donc absolument sommable dans E, car les voisinages de 0 de E sont les traces sur E des voisinages de 0 de $l^p(a_{m,n})$.

Il en résulte que dans l'espace $l^p(a'_{m,s})$ toute suite sommable est absolument sommable, et si $\varphi=E\to l^p(a'_{m,s})$ est l'isomorphisme indiqué plus haut, on a:
$$A=\varphi(B\cap E)=\left\{(\xi_s)\in l^p(a'_{m,s}),\ \sum_s b_{k_s}|\xi_s|^p\leqslant 1\right\}$$
qui est un p-disque borné de $l^p(a'_{m,s})$.

On note
$$V'_{m_0,1}=\varphi(V_{m_0,1}\cap E)\quad \text{et}\quad b'_s=b_{k_s}.$$
Si la suite $((a_{m_0,k}/b_k)^{1/p})_k$ converge vers 0, en effectuant au besoin une permutation sur les indices k, ce qui revient à faire un isomorphisme φ sur $l^p(a_{m,n})$ on peut supposer que $((a_{m_0,k}/b_k)^{1/p})_k$ est décroissante. Dans ce cas, on notera $(a'_{m,s})_s$ et $(b'_s)_s$ les nouvelles suites obtenues à partir de $(a_{m,n})$ et (b_n)
$$l^p(a'_{m,s})=\varphi[l^p(a_{m,n})],\quad A=\varphi(B)\quad \text{et}\quad V'_{m_0,1}=\varphi(V_{m_0,1}).$$
On utilise le résultat suivant:

LEMME 2. *Soit $n\geqslant i(i-1)$, alors dans tout espace vectoriel de dimension n, si K est un compact équilibré et absorbant de cet espace (muni de la topologie canonique), il existe des vecteurs $x_1,\ldots,x_i$ tels que*
$$|x_j|_K=1\quad \textit{pour}\quad 1\leqslant j\leqslant i,$$
$$\Big|\sum_{j=1}^i t_j x_j\Big|_K\leqslant 2\Big(\sum_{j=1}^i t_j^2\Big)^{1/2}\quad \textit{quels que soient les réels } t_j.$$

Ce résultat est montré dans [2], p. 61, 62 en supposant K convexe, mais la convexité de K n'intervient pas en fait dans la démonstration des lemmes 1 et 2 de [2].

Posons $N_r=r^\beta$ pour $r\in \mathbf{N}$, et soit G_r le sous-espace de $l^p(a'_{m,s})$ engendré par les vecteurs canoniques (e_s); $N_r^2\leqslant s<N_{r+1}^2$.

Pour le compact $A\cap G_r$, comme on a $\dim G_r = N_{r+1}^2 - N_r^2 \geqslant (N_{r+1}-N_r)^2$ il existe des points (y_s), $N_r \leqslant s < N_{r+1}$, tels que

$$y_s \in G_r, \qquad |y_s|_A = 1$$

et quels que soient les réels t_i

$$\Big|\sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} t_s y_s\Big|_A \leqslant 2\Big(\sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} t_s^2\Big)^{1/2}.$$

A est un p-disque, donc $\|x\|_A = |x|_A^p$ est une p-norme et si on prend $t_s = 1/s^\gamma$, $\varepsilon_s = +1$ ou -1 on a:

$$\Big\|\sum_{s=N}^{N'} \varepsilon_s t_s y_s\Big\|_A \leqslant 2\sum_{r=R}^{R'}\Big(\sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} t_s^2\Big)^{p/2}$$

où R est le plus grand entier r tel que $N_r \leqslant N$ et R' le plus petit entier r tel que $N' < N_{r+1}$.

$l^p(a'_{m,s})$ étant complet et A étant borné, il suffit de constater que la série $\sum_r \big(\sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} t_s^2\big)^{p/2}$ est convergente pour être sûr que la suite $(t_s y_s)$ est sommable. On a:

$$\sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} t_s^2 = \sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} \frac{1}{s^{2\gamma}} \leqslant \int_{N_r-1}^{N_{r+1}} \frac{dx}{x^{2\gamma}} \leqslant \frac{C}{N_{r-1}^{2\gamma-1}}$$

où C est une constante positive ne dépendant que de γ. Donc

$$\sum_{r>1}\Big(\sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} t_s^2\Big)^{p/2} \leqslant C'\sum_{r>1}\frac{1}{(r-1)^{\beta(2\gamma-1)p/2}} < +\infty$$

d'après le choix de β.

On va montrer que la suite $(t_s y_s)$ n'est pas absolument sommable, ce qui achève la démonstration.

$$\sum_s |t_s y_s|_{V'_{m_0,1}} = \sum_r \sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} t_s |y_s|_{V'_{m_0,1}}.$$

Mais pour $N_r \leqslant s < N_{r+1}$ on a:

$$y_s = \sum_{q=N_r^2}^{N_{r+1}^2-1} \mu_q e_q \quad \text{avec} \quad |y_s|_A = \Big(\sum_{q=N_r^2}^{N_{r+1}^2-1} b'_q |\mu_q|^p\Big)^{1/p} = 1$$

donc:

$$|y_s|_{V'_{m_0,1}} = \Big(\sum_{q=N_r^2}^{N_{r+1}^2-1} a'_{m_0,q}|\mu_q|^p\Big)^{1/p} = \Big(\sum_{q=N_r^2}^{N_{r+1}^2-1} \frac{a'_{m_0,q}}{b'_q} b'_q |\mu_q|^p\Big)^{1/p}$$
$$\geqslant \inf_{N_r^2 \leqslant q < N_{r+1}^2} \Big(\frac{a'_{m_0,q}}{b'_q}\Big)^{1/p}.$$

Dans le premier cas on a donc $|y_s|_{V'_{m_0,1}} \geqslant a$, si bien que

$$\sum_s |t_s y_s|_{V'_{m_0,1}} \geqslant \sum_r \sum_{s=N_r}^{N_{r+1}-1} \frac{a}{s^\gamma} = a\sum_s \frac{1}{s^\gamma} = +\infty.$$

Dans le deuxième cas, si on pose $d_k = d_k(B, V_{m_0,1})$, d'après le lemme 1 on a:

$$|y_s|_{V'_{m_0,1}} \geqslant d_{N_{r+1}^2}.$$

Si on avait $\sum_s |t_s y_s|_{V'_{m_0,1}} < +\infty$, comme $v_s = \frac{1}{s^\gamma} d_{N_{r+1}^2}$ décroît avec s et que $\sum_s v_s < +\infty$, d'après une propriété classique, il existerait constante D telle que pour $N_r \leqslant s < N_{r+1}$ on ait

$$s v_s = s^{1-\gamma} d_{N_{r+1}^2} \leqslant D$$

et donc en particulier

$$d_{N_{r+1}^2} \leqslant \frac{D}{N_r^{1-\gamma}}.$$

Pour $N_{r+1}^2 \leqslant k < N_{r+2}^2$ on a:

$$d_k \leqslant d_{N_{r+1}^2} \leqslant \frac{D}{r^{\beta(1-\gamma)}} \leqslant \frac{D'}{N_{r+2}^{1-\gamma}} \leqslant \frac{D'}{k^{(1-\gamma)/2}}$$

et finalement

$$\sum_k (d_k)^\alpha = \sum_k (d_k)^{4/(1-\gamma)} \leqslant D''\sum_k \frac{1}{k^2} < +\infty$$

ce qui est contradictoire.

$l^p(a_{m,n})$ est donc diamétralement nucléaire. Il est alors localement convexe d'après [3].

Bibliographie

[1] *Colloque International sur les Espaces Nucléaires et les Idéaux dans les Algèbres d'opérateurs*, Studia Math. 38 (1969), p. 469–483.

[2] M. M. Day, *Normed linear spaces*, Ergeb. der Math. 21, 1962.

[3] J. P. Ligaud, *Sur les rapports de convexité des topologies et bornologies dans les espaces nucléaires*, Studia Math. 45 (1973), p. 181–190.
[4] B. S. Mitiagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russian Math. Surveys 16 (1961), p. 59–127.
[5] A. Pietsch, *Nuclear locally convex spaces*, Berlin 1972.

Received August 25, 1973 (735)

STUDIA MATHEMATICA, T. LIV. (1975)

Products of group-valued measures

by

H. MILLINGTON (Mona, Jamaica)

Abstract. Limit theorems for group-valued integrals are established, and applied to derive conditions guaranteeing the existence of a product of two group-valued measures. Fubini-type theorems for both sets and functions are given. Also presented is a construction of a Radon product measure of two Radon measures. Applications to the case of vector-valued measures yield results on the ε- and projective tensor products of such measures.

0. Preliminaries. Throughout this paper, $\emptyset$ denotes the empty set, ω the set $\{0, 1, \ldots\}$ and for any sets $A, B, A\setminus B$ the set-theoretic difference. For any family $\mathscr{A}$ of sets let

$$\bigcup \mathscr{A} = \bigcup_{A\in\mathscr{A}} A, \quad \text{and} \quad \bigcap \mathscr{A} = \bigcap_{A\in\mathscr{A}} A.$$

For any set X let $\mathscr{S}X$ denote the family of all non-empty subsets of X. We shall often denote a sequence $(x_n)_{n\in\omega}$ simply by x.

Let X be a commutative group, with addition represented by $+$. For any subsets A, B of X, and $n\in\omega$, let

$$A\pm B = \{x\pm y\colon x\in A, y\in B\},$$
$$nA = A+\ldots+A, \ n \text{ times}.$$

The identity will always be denoted by 0.

For any topological space X and $x\in X$, nbhd$x$ *in* X will be the family of all neighbourhoods of x. Our topologies will be always Hausdorff.

0.1. Definitions. Let X be a commutative, topological group, and S an abstract space. For any X-valued function u on all subsets of S:

$A\subset S$ is *u-measurable* iff $u(B) = u(B\cap A)+u(B\setminus A)$ for all $B\subset S$.

A is *u-null* iff $u(B) = 0$ for all $B\subset A$.

M_u is the family of all u-measurable subsets of S. For any family $\mathscr{A}$ of subsets of S, u is *σ-additive* on $\mathscr{A}$ iff for each countable, disjoint $P\subset\mathscr{A}$ with $\bigcup P\in\mathscr{A}$,

$$u\big(\bigcup P\big) = \sum_{A\in P} u(A),$$